فصل بیست و یکم

بار الکتریکی

۲۱-۱ قانون کولن

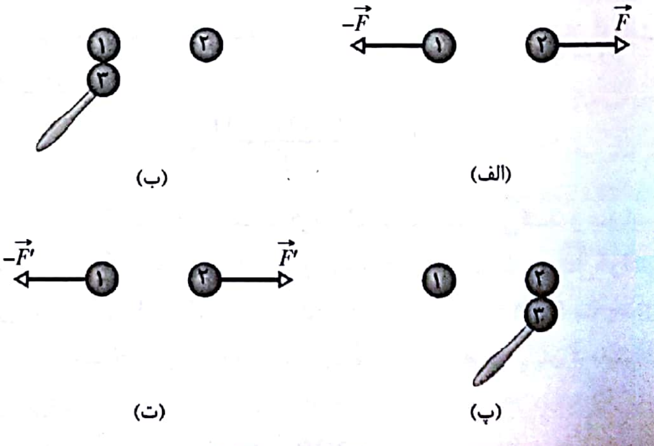
۱ ILW از بار اولیه‌ی Q که روی کره کوچکی واقع است، جزء q به کره دیگری در نزدیکی آن منتقل می‌شود. هر دو کره را می‌توان به صورت ذره در نظر گرفت. به‌ازای چه مقدار q/Q نیروی الکتروستاتیکی میان این دو کره بیشینه است؟

حل بزرگی نیروی وارد از هر یک از بارها بر دیگری چنین می‌شود

$$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q(Q-q)}{r^2}$$

که در آن r فاصله‌ی میان بارهاست. عملاً ما به‌دنبال آن qای می‌گردیم که تابع $f(q)=q(Q-q)$ را بیشینه کند. به این منظور $df/dq=0$ قرار می‌دهیم و از آنجا به $Q-2q=0$ و یا $q=Q/2$ می‌رسیم. پس $q/Q=0.500$ می‌شود.

۲ کره‌های رسانای منزوی مشابه ۱ و ۲ که دارای بارهای یکسانی هستند، در فاصله‌ای از هم قرار دارند که نسبت به قطر آنها بزرگ است (شکل ۲۱-۲۲ الف). نیروی الکتروستاتیکی‌ای که از سوی کره‌ی ۱ بر کره‌ی ۲ وارد می‌شود برابر با $\vec{F}$ است. حال فرض کنید که کره‌ی مشابه ۳، که دارای دسته‌ی عایقی است و در ابتدا خنثی است، نخست با کره‌ی ۱ (شکل ۲۱-۲۲ ب) و سپس با کره‌ی ۲ (شکل ۲۱-۲۲ پ) تماس پیدا کند، و سرانجام برداشته شود (شکل ۲۱-۲۲ ت). اکنون بزرگی نیروی الکتروستاتیکی‌ای که بر کره‌ی ۲ اثر می‌کند برابر با F' است. نسبت F'/F چقدر است؟



شکل ۲۱-۲۲ مسئله‌ی ۲

حل توجه کنید که چون کره‌ها مشابه هستند، وقتی آنها را با هم تماس می‌دهیم، بارهایشان با هم برابر می‌شود. بنابراین وقتی کره‌ی خنثی ۳ به کره‌ی باردار ۱ تماس پیدا می‌کند، نیمی از بار کره‌ی ۱ را جذب می‌کند. بنابراین پس از اولین تماس، بار کره‌ی ۱ برابر با $q/2$ می‌شود. حال اگر کره‌ی ۳ را که دیگر خنثی نیست و باری برابر با $q/2$ دارد با کره‌ی ۲ تماس دهیم، بعد از این تماس، بار هر کدام از این دو کره برابر با مقدار زیر می‌شود:

$$\frac{q_2+q_3}{2}=\frac{q+q/2}{2}=\frac{3q}{4}$$

پس، سرانجام بار کره‌های ۱ و ۲ به‌ترتیب $q/2$ و $3q/4$ می‌شود. وقتی که بار آنها یکسان و برابر با q بود، به یکدیگر نیروی $F=kq^2/r^2$ را وارد می‌کردند. حال می‌خواهیم ببینیم در این وضعیت جدید، نیروی F'ای که بر هم وارد می‌کنند بر حسب F چقدر می‌شود؟

$$F'=k\frac{(q/2)(3q/4)}{r^2}=\frac{3}{8}k\frac{q^2}{r^2}=\frac{3}{8}F$$

بنابراین $F'/F=3/8=0.375$ می‌شود.

۳ فاصله‌ی میان دو بار نقطه‌ای $q_1=26.0\mu C$ و $q_2=-47.0\mu C$ باید چقدر باشد تا بزرگی نیروی الکتروستاتیکی بین آنها $5.70N$ شود؟

حل قانون کولن $F=k|q_1||q_2|/r^2$ را برای r حل می‌کنیم

$$r=\sqrt{\frac{k|q_1||q_2|}{F}}$$

$$=\sqrt{\frac{(8.99\times10^9\ N\cdot m^2/C^2)(26.0\times10^{-6}C)(47.0\times10^{-6}C)}{5.70N}}$$

$$=1.39m$$

۴ در ضربه‌ی برگشت یک آذرخش، جریان $2.5\times10^{-4}A$ در عرض $20\mu s$ به‌وجود می‌آید. در این فرایند چقدر بار منتقل می‌شود؟

حل با استفاده از رابطه‌ی $q=it$، بار انتقال یافته چنین می‌شود

$$q=(2.5\times10^4A)(20\times10^{-6}s)=0.50C$$

Scanned by CamScanner

۵۰ ذره‌ای با بار $+۳٫۰۰\times۱۰^{-۶}C$ در فاصله‌ی $۱۲٫۰cm$ از ذره‌ی دیگری با بار $-۱٫۵۰\times۱۰^{-۶}C$ قرار دارد. بزرگی نیروی الکتروستاتیکی بین این دو ذره را محاسبه کنید.

حل بزرگی متقابل این نیروی جاذبه، طبق قانون کولن چنین می‌شود

$$F=k\frac{|q_1||q_2|}{r^2}$$
$$=(۸٫۹۹\times۱۰^{۹}N\cdot m^{۲}/C)\frac{(۳٫۰۰\times۱۰^{-۶}C)(۱٫۵۰\times۱۰^{-۶}C)}{(۱۲٫۰\times۱۰^{-۲}m)^{۲}}$$
$$=۲٫۸۱N$$

۶۰ ILW دو ذره با بارهای یکسان در فاصله‌ی $۳٫۲\times۱۰^{-۳}m$ از هم نگه داشته شده‌اند و سپس از حالت سکون رها می‌شوند. مشاهده می‌شود شتاب اولیه‌ی ذره‌ی اول $۷٫۰m/s^{۲}$ و شتاب اولیه‌ی ذره‌ی دوم $۹٫۰m/s^{۲}$ است. اگر جرم ذره‌ی اول $۶٫۳\times۱۰^{-۷}kg$ باشد، (الف) جرم ذره‌ی دوم و (ب) بزرگی بار هر ذره چقدر است؟

حل (الف) هر کدام از دو بار در میدان بار دیگر قرار می‌گیرد و شتابی که به‌دست می‌آورد ناشی از نیرویی است که بار مقابل به‌آن وارد می‌سازد. از طرفی، طبق قانون سوم نیوتون، بزرگی این دو نیرو با هم برابر است و بنابراین داریم:

$$m_1a_1=m_2a_2$$

و از آنجا

$$m_2=\frac{m_1a_1}{a_2}$$
$$=\frac{(۶٫۳\times۱۰^{-۷}kg)(۷٫۰m/s^{۲})}{۹٫۰m/s^{۲}}=۴٫۹\times۱۰^{-۷}kg$$

(ب) بزرگی نیروی وارد بر ذره‌ی ۱ برابر است با

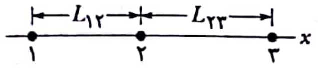
$$F=k\frac{|q_1||q_2|}{r^2}=k\frac{q^2}{r^2}$$
$$=(۸٫۹۹\times۱۰^{۹}N\cdot m^{۲}/C)\frac{|q|^{۲}}{(۳٫۲\times۱۰^{-۳}m)^{۲}}$$

از طرفی، طبق قانون دوم نیوتون داریم

$$F=m_1a_1=(۶٫۳\times۱۰^{-۷}kg)(۷٫۰m/s^{۲})=۴٫۴\times۱۰^{-۶}N$$

با برابر قرار دادن دو رابطه‌ی بالا به‌مقدار $|q|=۷٫۱\times۱۰^{-۱۱}C$ خواهیم رسید.

۷۰ در شکل ۲۱-۲۳، سه ذره‌ی باردار روی محور x قرار دارند. ذره‌های ۱ و ۲ در جای خود ثابت شده‌اند. ذره‌ی ۳ می‌تواند آزادانه حرکت کند، ولی نیروی الکتروستاتیکی خالص وارد بر آن از سوی دو ذره‌ی دیگر در جایی برابر صفر می‌شود. اگر $L_{۲۳}=L_{۱۲}$ باشد، نسبت q_1/q_2 چقدر است؟



شکل ۲۱-۲۳ مسئله‌های ۷ و ۴۰

حل چون q_3 در خارج دو بار q_1 و q_2 به‌حال تعادل است نتیجه می‌گیریم که باید بارهای q_1 و q_2 دارای علامت‌های مخالف باشند. بنابراین شرط تعادل نیروهای وارد بر q_3 چنین به‌دست می‌دهد:

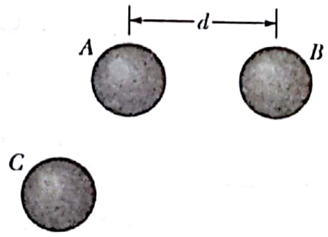
$$F_3=F_{13}+F_{23}=k\frac{|q_1q_3|}{(L_{12}+L_{23})^2}-k\frac{|q_1q_3|}{L_{23}^2}=0$$

که با توجه به این‌که $L_{23}=L_{12}$ است به رابطه‌ی زیر می‌انجامد

$$\frac{|q_1|}{۴٫۰۰}-|q_2|=0 \Rightarrow \left|\frac{q_1}{q_2}\right|=۴٫۰۰$$

با توجه به این‌که علامت بارهای q_1 و q_2 مخالف هم‌اند، $q_1/q_2=-۴٫۰۰$ می‌شود.

۸۰ در شکل ۲۱-۲۴، سه کره‌ی رسانای مشابه در ابتدا دارای بارهای زیر هستند: کره‌ی A با بار $۴Q$؛ کره‌ی B با بار $-۶Q$؛ و کره‌ی C بدون بار. کره‌های A و B در جای خود ثابت شده‌اند و فاصله‌ی مرکز به مرکز آنها بسیار بزرگ‌تر از اندازه‌ی کره‌هاست. می‌خواهیم دو آزمایش انجام دهیم. در آزمایش ۱، کره‌ی C به کره‌ی A تماس داده می‌شود و سپس (به‌طور جداگانه) به کره‌ی B تماس داده شده، و آنگاه برداشته می‌شود. در آزمایش ۲، با همان شرایط اولیه، مراحل کار وارونه می‌شوند: کره‌ی C به کره‌ی B تماس داده می‌شود و سپس (به‌طور جداگانه) به کره‌ی A تماس داده شده، و آنگاه برداشته می‌شود. نسبت نیروی الکتروستاتیکی میان A و B در پایان آزمایش ۲ به مقدار آن در پایان آزمایش ۱ چقدر است؟



شکل ۲۱-۲۴ مسئله‌های ۸ و ۶۵

حل در آزمایش ۱، کره‌ی C نخست با کره‌ی A تماس پیدا می‌کند و آنها بار کلّ خود ($Q/۲$ به‌علاوه‌ی Q) را به‌طور مساوی تقسیم می‌کنند. بنابراین، کره‌های A و C به بار $۳Q/۴$ می‌رسند. آنگاه کره‌ی C با کره‌ی B تماس پیدا می‌کند و آنها بارهایشان ($۳Q/۴$ و $-Q/۴$) را به‌طور مساوی بین خود تقسیم می‌کنند. بنابراین سرانجام بار کره‌ی B برابر با $Q/۴$ می‌شود. پس، نیروی دافعه‌ی میان کره‌های A و B در پایان آزمایش ۱ چنین می‌شود:

$$F_1=k\frac{(۳Q/۴)(Q/۴)}{d^2}$$

در آزمایش ۲، کره‌ی C نخست با کره‌ی B تماس پیدا می‌کند و به این ترتیب بار هر یک پس از جدا شدن برابر با $Q/۸$ می‌شوند. سپس، وقتی کره‌ی C با کره‌ی A تماس پیدا می‌کند، کره‌ی A با بار $۹Q/۱۶$ به جای می‌ماند. در نتیجه، نیروی دافعه‌ی میان کره‌های A و B در پایان آزمایش ۲ چنین می‌شود:

$$F_2=k\frac{(۹Q/۱۶)(Q/۸)}{d^2}$$

Scanned by CamScanner

پس، نسبت $F_۲/F_۱$ عبارت است از:

$$\frac{F_۲}{F_۱}=\frac{(۹/۱۶)(۱/۸)}{(۳/۴)(۱/۴)}=۰٫۳۷۵$$

۹●● WWW دو کره‌ی رسانای مشابه که در جای خود ثابت شده‌اند، وقتی در فاصله‌ی مرکز به مرکز $۵۰٫۰\text{cm}$ قرار دارند، با نیروی الکتروستاتیکی $۰٫۱۰۸\text{N}$ همدیگر را جذب می‌کنند. سپس کره‌ها با سیم رسانای نازکی به هم متصل می‌شوند. وقتی سیم برداشته شود، کره‌ها یکدیگر را با نیروی الکتروستاتیکی $۰٫۰۳۶۰\text{N}$ دفع می‌کنند. از بار اولیه‌ی روی کره‌ها که مقدار خالص مثبتی دارد، چه مقدار (الف) بار منفی روی یکی از آنها و (ب) بار مثبت روی دیگری قرار دارد؟

حل چون پیش از اتصال، کره‌ها همدیگر را جذب می‌کنند باید بار اولیه‌ی آنها مخالف هم باشد. آنگاه از قانون کولن خواهیم داشت:

$$F=-\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{q_۱q_۲}{r^۲}=-(۸٫۹۹\times۱۰^۹\,\text{N}\cdot\text{m}^۲/\text{C})\frac{q_۱q_۲}{(۰٫۵۰۰\text{m})^۲}$$

و از آنجا $q_۱q_۲=-۳٫۰۰\times۱۰^{-۱۲}\text{C}^۲$ می‌شود.

پس از اتصال، کره‌ها همدیگر را دفع می‌کنند و بنابراین بار آنها هم‌علامت است. کره‌ها مشابه‌اند و از پایستگی بار نتیجه می‌گیریم که بار آنها پس از اتصال $(q_۱+q_۲)/۲$ می‌شود. بنابراین داریم:

$$F'=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{\left(\frac{q_۱+q_۲}{۲}\right)\left(\frac{q_۱+q_۲}{۲}\right)}{r^۲}$$

$$=(۸٫۹۹\times۱۰^۹\,\text{N}\cdot\text{m}^۲/\text{C}^۲)\frac{(q_۱+q_۲)^۲}{۴(۰٫۵۰۰\text{m})^۲}=۰٫۰۳۶۰\text{N}$$

و از آنجا $q_۱+q_۲=\pm۲٫۰۰\times۱۰^{-۶}\text{C}$ می‌شود. با اختیار $q_۱+q_۲>۰$، $q_۲=۲٫۰۰\times۱۰^{-۶}\text{C}$ می‌شود و آنگاه با قرار دادن $q_۲$ در رابطه‌ی اول، به معادله‌ی درجه دوم زیر می‌رسیم

$$q_۱^۲-۲٫۰۰\times۱۰^{-۶}q_۱-۳٫۰۰\times۱۰^{-۱۲}=۰$$

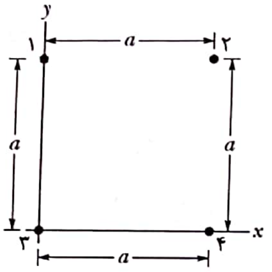
این معادله، دو جواب دارد: $q_۱=۳٫۰۰\times۱۰^{-۶}\text{C}$ و $q_۱=-۱٫۰۰\times۱۰^{-۶}\text{C}$.

(الف) به‌ازای $q_۱=۳٫۰۰\times۱۰^{-۶}\text{C}$، $q_۲=-۱٫۰۰\times۱۰^{-۶}\text{C}$ می‌شود.

(ب) به‌ازای $q_۱=۱٫۰۰\times۱۰^{-۶}\text{C}$، $q_۲=۳٫۰۰\times۱۰^{-۶}\text{C}$ می‌شود.

اگر بررسی کنید درمی‌یابید که با اختیار $q_۱+q_۲<۰$، تنها علامت جواب‌های بالا تغییر می‌کند. یعنی بار $q_۱$ یا برابر با $-۳٫۰۰\times۱۰^{-۶}\text{C}$ و یا برابر با $+۱٫۰۰\times۱۰^{-۶}\text{C}$ می‌شود که این دو مقدار به‌ترتیب به $q_۲=۱٫۰۰\times۱۰^{-۶}\text{C}$ و $q_۲=-۳٫۰۰\times۱۰^{-۶}\text{C}$ می‌انجامد.

۱۰●● GO در شکل ۲۱-۲۵، چهار ذره تشکیل مربعی را داده‌اند. بارها عبارت‌اند از $q_۱=q_۴=Q$ و $q_۲=q_۳=q$. (الف) اگر نیروی الکتروستاتیکی خالص وارد بر ذره‌های ۱ و ۴ برابر صفر باشد، نسبت Q/q چقدر است؟ (ب) آیا هیچ مقداری از q وجود دارد که به‌ازای آن نیروی الکتروستاتیکی وارد بر هر چهار ذره برابر صفر شود؟ توضیح دهید.



شکل ۲۱-۲۵ مسئله‌های ۱۰، ۱۱، و ۷۰

حل توجه شود برای آنکه نیروی وارد به یکی از بارها صفر باشد باید بارهای Q و q علامت‌های مختلفی داشته باشند. زیرا، در غیر این صورت تمام نیروهای وارد بر یک بار دافعه می‌شود و تعادل امکان‌پذیر نیست.

(الف) شرط تعادل $q_۱=Q$ این است که مجموع مؤلفه‌های x و y نیروهای وارد بر آن صفر باشد. در اینجا از $F_{۱x}=۰$ استفاده می‌کنیم:

$$F_{۱x}=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\left[-\frac{(Q)(Q)}{(\sqrt{۲}a)^۲}\cos۴۵^\circ+\frac{(|q_۱|)(Q)}{a^۲}\right]$$

$$=\frac{Q|q|}{۴\pi\varepsilon_۰a^۲}\left(-\frac{Q/|q|}{۲\sqrt{۲}}+۱\right)=۰$$

و از آنجا $Q/|q|=۲\sqrt{۲}$ و یا $Q/q=-۲\sqrt{۲}$ می‌شود.

(ب) خیر، مثلاً بیابید مؤلفه‌ی y نیروی خالص وارد بر $q_۲=q$ را بررسی کنیم.

$$F_{۲y}=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\left[-\frac{|q|^۲}{(\sqrt{۲}a)^۲}\sin۴۵^\circ-\frac{(|q_۱|)(Q)}{a^۲}\right]$$

$$=\frac{|q|^۲}{۴\pi\varepsilon_۰a^۲}\left(-\frac{Q/|q|}{۲\sqrt{۲}}-\frac{Q}{|q|}\right)$$

از آنجا درمی‌یابیم که به‌ازای $Q=-\frac{۱}{۲}\frac{q}{\sqrt{۲}}$، $F_{۲y}=۰$ می‌شود که این مغایر نتیجه‌ی قسمت الف است.

۱۱●● ILW در شکل ۲۱-۲۵ بار ذرات عبارت‌اند از $q_۱=-q_۲=۱۰۰\text{nC}$ و $q_۳=-q_۴=۲۰۰\text{nC}$، و فاصله‌ی آنها $a=۵٫۰\text{cm}$ است. مؤلفه‌های (الف) x و (ب) y نیروی الکتروستاتیکی خالص وارد بر ذره‌ی ۳ چقدر است؟

حل (الف) مؤلفه‌ی x نیروی استاتیکی برایند وارد بر $q_۳$ چنین می‌شود

$$F_{۳x}=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\left[-\frac{|q_۳||q_۲|}{(\sqrt{۲}a)^۲}\cos۴۵^\circ+\frac{|q_۳||q_۴|}{a^۲}\right]$$

$$=\frac{|q_۳|}{۴\pi\varepsilon_۰a^۲}\left(\frac{|q_۲|}{۲\sqrt{۲}}+|q_۴|\right)$$

$$=(۸٫۹۹\times۱۰^۹)\frac{۲(۱٫۰\times۱۰^{-۷})^۲}{(۰٫۰۵۰)^۲}\left(\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}+۲\right)=۰٫۱۷\text{N}$$

(ب) به‌همین ترتیب، مؤلفه‌ی y نیروی الکتروستاتیکی برایند وارد بر $q_۳$ چنین می‌شود

Scanned by CamScanner

$$F_{۳y} = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\left(-\frac{|q_۳||q_۱|}{a^۲} + \frac{|q_۳||q_۲|}{(\sqrt{۲}a)^۲}\sin ۴۵°\right)$$

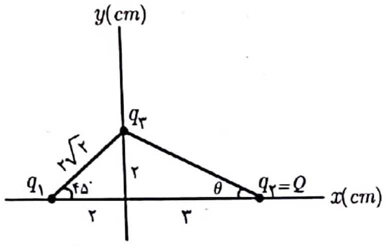
$$= \frac{|q_۳|}{۴\pi\varepsilon_۰ a^۲}\left(-|q_۱| + \frac{|q_۲|}{۲\sqrt{۲}}\right)$$

$$= (۸٫۹۹\times ۱۰^۹)\frac{۲(۱٫۰۰\times ۱۰^{-۷})^۲}{(۰٫۰۵۰)^۲}\left(-۱ + \frac{۱}{۲\sqrt{۲}}\right)$$

$$= -۰٫۰۴۶\text{N}$$

۱۲●● دو ذره روی محور x ثابت شده‌اند. ذره‌ی ۱ با بار $۴۰\mu C$ در $x = -۲٫۰\text{cm}$ قرار گرفته است؛ ذره‌ی ۲ با بار Q در $x = ۳٫۰\text{cm}$ قرار گرفته است؛ ذره‌ی ۳ با باری به بزرگی $۲۰\mu C$ از حالت سکون روی محور y در $y = ۲٫۰\text{cm}$ رها می‌شود. اگر شتاب اولیه‌ی ذره‌ی ۳ در جهت مثبت (الف) محور x و (ب) محور y باشد، مقدار Q چقدر است؟

حل (الف) برای آنکه نیروی خالص در جهت $+x$ باشد، باید مؤلفه‌های y نیروهای مجزا همدیگر را خنثی کنند. از مثلث شکل درمی‌یابیم، زاویه‌ی نیرویی که بار $q_۱ = ۴۰\mu C$ روی بار $q_۳ = ۲۰\mu C$ وارد می‌کند برابر با $۴۵°$ است و زاویه‌ی نیروی وارد از Q به $q_۳$ عبارت است از



$$\theta = \tan^{-۱}\left(\frac{۲٫۰}{۳٫۰}\right) \approx ۳۴°$$

پس، لازمه‌ی حذف مؤلفه‌های y به‌این قرار است

$$k\frac{q_۱q_۳}{(۰٫۰۲\sqrt{۲})^۲}\sin ۴۵° = k\frac{|Q|q_۳}{\left(\sqrt{(۰٫۰۳۰)^۲ + (۰٫۰۲۰)^۲}\right)^۲}\sin\theta$$

از آنجا به $|Q| = ۸۳\mu C$ می‌رسیم. بار Q، $q_۳$ را جذب می‌کند و چون $q_۳ > ۰$ است، نتیجه می‌گیریم که $Q = -۸۳\mu C$ است.

(ب) اکنون باید مؤلفه‌های x همدیگر را خنثی کنند و بنابراین داریم

$$\frac{kq_۱q_۳}{(۰٫۰۲\sqrt{۲})^۲}\cos ۴۵° = k\frac{|Q|q_۳}{\left(\sqrt{(۰٫۰۳۰)^۲ + (۰٫۰۲۰)^۲}\right)^۲}\cos\theta$$

از آنجا به $|Q| \approx ۵۵\mu C$ می‌رسیم. بار Q، $q_۳$ را دفع می‌کند و نتیجه می‌گیریم که $Q = ۵۵\mu C$ است.

۱۳●● GO در شکل ۲۱-۲۶ ذره‌ی ۱ با بار $+۱٫۰\mu C$ و ذره‌ی ۲ با بار $-۳٫۰\mu C$ در فاصله‌ی $L = ۱۰٫۰\text{cm}$ روی محور x ثابت نگه داشته شده‌اند. اگر ذره‌ی ۳ با بار نامعلوم $q_۳$ به گونه‌ای قرار داده شود که نیروی الکتروستاتیکی خالص وارد بر آن از سوی ذره‌های ۱ و ۲ برابر صفر باشد، مختصه‌ی (الف) x و (ب) y ذره‌ی ۳ باید چقدر باشد؟

شکل ۲۱-۲۶ مسئله‌های ۱۳، ۱۹، ۳۰، ۵۱، و ۶۷

حل چون $q_۱$ و $q_۲$ دارای بارهایی با علامت مخالفند، بار $q_۳$ نمی‌تواند در میان آنها به‌حالت تعادل قرار گیرد. در این حالت نیروهای وارد بر $q_۳$ هر دو به یک سمت خواهند بود و نمی‌توانند همدیگر را خنثی کنند. همچنین چون $|q_۲| > |q_۱|$ است، $q_۳$ نمی‌تواند در پشت $q_۲$ قرار گیرد و تنها امکان تعادل در مکانی پشت $q_۱$ است. در آنجا، بزرگی نیروی خالص وارد بر $q_۳$ چنین می‌شود:

$$F_۳ = k\frac{|q_۱q_۳|}{x^۲} - k\frac{|q_۲q_۳|}{(d+x)^۲}$$

که در آن $d = ۱۰٫۰\text{cm}$ و x کمیتی مثبت است. در وضعیت تعادل $F_۳ = ۰$ است و از آنجا خواهیم داشت:

$$\frac{|q_۱|}{x^۲} - \frac{|q_۲|}{(d+x)^۲} = ۰$$

و یا

$$\left(\frac{d+x}{x}\right)^۲ = \left|\frac{q_۲}{q_۱}\right| = ۳٫۰$$

که با گرفتن ریشه‌ی دوم چنین به‌دست می‌دهد:

$$\frac{d+x}{x} = \sqrt{۳} \quad\Rightarrow\quad x = \frac{d}{\sqrt{۳}-۱} = \frac{۱۰\text{cm}}{\sqrt{۳}-۱} \approx ۱۴\text{cm}$$

(ب) کلاً در نقاط خارج از محوری که از بارهای ثابت شده‌ی این مسئله می‌گذرد، تعادل امکان ندارد. محور y نیز یکی از این مجموعه نقاط است و بنابراین پاسخ $y = ۰$ می‌شود.

۱۴●● سه ذره روی محور x ثابت شده‌اند. ذره‌ی ۱ با بار $q_۱$ در $x = -a$، و ذره‌ی ۲ با بار $q_۲$ در $x = +a$. برای آنکه نیروی الکتروستاتیکی خالص وارد بر ذره‌ی ۳ با بار $+Q$ برابر با صفر باشد، وقتی‌که ذره‌ی ۳ در (الف) $x = +۰٫۵۰۰a$ و (ب) $x = +۱٫۵۰a$ قرار دارد، نسبت $q_۱/q_۲$ باید چقدر باشد؟

حل (الف) چون Q در میان $q_۱$ و $q_۲$ قرار گرفته است، نتیجه می‌گیریم که $q_۱$ و $q_۲$ حتماً هم‌علامت هستند. چراکه اگر $q_۱$ و $q_۲$ دارای علامت‌های مخالف بودند، هیچ بار سومی نمی‌توانست در میان آنها به‌حالت تعادل قرار گیرد. آنگاه از برابر قرار دادن بزرگی نیروهای وارد بر Q خواهیم داشت:

$$k\frac{q_۱Q}{\left(-a-\frac{a}{۲}\right)^۲} = k\frac{q_۲Q}{\left(a-\frac{a}{۲}\right)^۲}$$

و از آنجا $q_۱/q_۲ = ۹٫۰$ می‌شود.

(ب) این دفعه Q میان $q_۱$ و $q_۲$ قرار نگرفته است و بنابراین یکی از آنها باید منفی باشد تا نیروی جاذبه‌ی وارد از یکی توسط نیروی دافعه‌ی وارد از دیگری خنثی شود و بار Q در تعادل بماند. البته بار Q در پشت باری

Scanned by CamScanner

قرار می‌گیرد که قدرمطلق آن کوچک‌تر از دیگری است، زیرا نیروی الکتروستاتیکی طبق قانون کولن با وارون مربع فاصله و حاصل‌ضرب اندازه‌ی بار متناسب است. اگر بار Q در پشت بار کوچک‌تر قرار گیرد، نیروهای وارد بر آن می‌توانند همدیگر را خنثی کنند؛ چرا که هر چند حاصل‌ضرب اندازه‌های بار بزرگ در بار کوچک زیاد است، ولی به‌دلیل فاصله‌ی زیاد آن از بار Q، نیروی وارد بر بار Q از سوی بار بزرگ‌تر تعدیل می‌شود و به‌همین ترتیب هرچند فاصله‌ی بار کوچک‌تر از بار Q کم است ولی به‌دلیل حاصل‌ضرب کوچک اندازه‌ی بارهایشان، نیروی وارد بر بار Q تعدیل می‌شود. در حالی که اگر Q در پشت بار بزرگ‌تر قرار گیرد، همواره نیروی وارد از بار بزرگ‌تر بیشتر از نیروی وارد از بار کوچک‌تر خواهد بود و هیچ‌گاه تعادلی حاصل نمی‌شود. در هر حال، از برابر قرار دادن بزرگی نیروهای وارد بر Q خواهیم داشت:

$$k\frac{|q_1|Q}{(-a-3a/2)^2}=k\frac{|q_2|Q}{(a-3a/2)^2}$$

با توجه به‌توضیحات بالا $q_1/q_2=-25$ می‌شود.

۱۵ ●● GO بارها و مختصات دو ذره‌ی باردار که در صفحه‌ی xy ثابت نگه داشته شده‌اند عبارت‌اند از $q_1=+3{,}0\mu C$، $x_1=3{,}5cm$، $y_1=0{,}50cm$، $q_2=-4{,}0\mu C$، $x_2=-2{,}0cm$ و $y_2=1{,}5cm$. (الف) بزرگی و (ب) جهت نیروی الکتروستاتیکی وارد بر ذره‌ی ۲ از سوی ذره‌ی ۱ چیست؟ در چه مختصه‌ی (پ) x و (ت) y یی ذره‌ی سوم با بار $q_3=+4{,}0\mu C$ باید قرار گیرد تا نیروی الکتروستاتیکی خالص وارد بر ذره‌ی ۲ از سوی ذره‌های ۱ و ۳ برابر با صفر شود؟

حل (الف) فاصله‌ی میان q_1 و q_2 برابر است با

$$r_{12}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$=\sqrt{(0{,}20-0{,}035)^2+(0{,}015-0{,}0050)^2}=0{,}056m$$

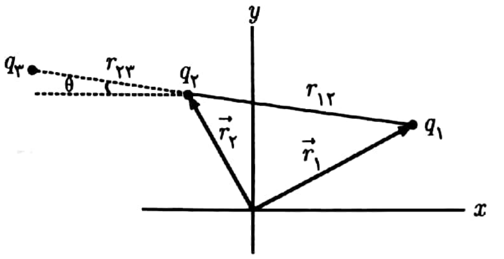
بنابراین بزرگی نیروی وارد بر q_2 از سوی q_1 چنین می‌شود:

$$F_{21}=k\frac{|q_1q_2|}{r_{12}^2}$$
$$=(8{,}99\times10^9 N\cdot m^2/C^2)\frac{(3{,}0\times10^{-6}C)(4{,}0\times10^{-6}C)}{(0{,}056m)^2}$$
$$\approx 35N$$

(ب) زاویه‌ای که $\vec{F}_{21}$ با سوی مثبت محور x می‌سازد، عبارت است از:

$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{1{,}5-0{,}50}{-2{,}0-3{,}5}\right)\approx-10^\circ$$

(پ) و (ت) توجه شود که در این‌جا قرار است نیروی وارد بر q_2 صفر باشد. پس q_2 باید در میان دو بار هم‌علامت q_1 و q_3 قرار گیرد (اگر بر فرض قرار بود نیروی وارد بر q_3 صفر باشد، آنگاه q_3 را باید پشت q_1 قرار می‌دادیم) و بنابراین شکلی مشابه زیر خواهیم داشت



شرط تعادل q_2 حکم می‌کند که $F_{21}=F_{23}$ باشد و از آنجا خواهیم داشت

$$k\frac{|q_2q_3|}{r_{23}^2}=k\frac{|q_1q_2|}{r_{12}^2}$$

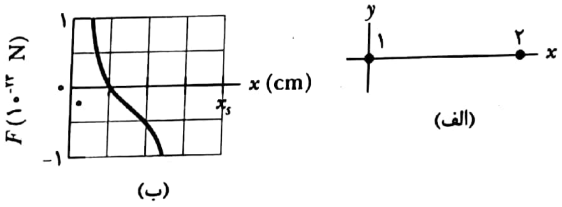
و در نتیجه

$$r_{23}=r_{12}\sqrt{\frac{q_3}{q_1}}=r_{12}\sqrt{\frac{4{,}0\mu C}{3{,}0\mu C}}=(0{,}056\ m)\sqrt{\frac{4{,}0}{3{,}0}}=0{,}065m$$

بنابراین x_3 و y_3 به‌ترتیب چنین می‌شوند:

$$x_3=x_2-r_{23}\cos\theta=-2{,}0cm-(6{,}5cm)\cos(-10^\circ)$$
$$=-8{,}4cm$$
$$y_3=y_2-r_{23}\sin\theta=-1{,}5cm-(6{,}5cm)\sin(-10^\circ)$$
$$=2{,}7cm$$

۱۶ ●● GO در شکل ۲۱-۲۷ الف، ذره‌ی ۱ (با بار q_1) و ذره‌ی ۲ (با بار q_2) که در مکانی روی محور x ثابت شده‌اند به فاصله‌ی $8{,}00cm$ از هم قرار گرفته‌اند. قرار است ذره‌ی ۳ (با بار $q_3=+8{,}00\times10^{-19}C$) روی خط واصل ذره‌های ۱ و ۲ قرار گیرد، به‌گونه‌ای که نیروی الکتروستاتیکی خالص وارد بر ذره‌ی ۳ برابر با $\vec{F}_{3,net}$ شود. شکل ۲۱-۲۷ ب مؤلفه‌ی x این نیرو را برحسب مختصه‌ی x ای نشان می‌دهد که ذره‌ی ۳ در آن واقع شده است. محور x با $x_s=8{,}0cm$ مقیاس‌بندی شده است. (الف) علامت بار q_1 و (ب) نسبت q_2/q_1 چیست؟



شکل ۲۱-۲۷ مسئله‌ی ۱۶

حل (الف) طبق نمودار، وقتی q_3 خیلی به q_1 نزدیک است (نقطه‌ای که در آن نیروی وارد ازذره‌ی ۱ بر ذره‌ی۳ زیاد است) یک نیروی بزرگ در جهت مثبت x وجود دارد. این نیرو، دافعه است و بنابراین نتیجه می‌گیریم که q_1 با q_3 هم‌علامت است. پس، q_3 باردار مثبت است.

(ب) چون منحنی، صفر را قطع می‌کند و ذره‌ی ۳ میان دو ذره‌ی دیگر است، q_1 باید با q_2 هم‌علامت باشد و بنابراین q_1 مثبت است. توجه کنید که منحنی در $r=0{,}020m$، صفر را قطع می‌کند (این در فاصله‌ی $d=0{,}060m$ از q_2 است). با استفاده از قانون کولن در آن نقطه خواهیم داشت

$$\frac{q_1q_3}{4\pi\varepsilon_0r^2}=\frac{q_3q_2}{4\pi\varepsilon_0d^2}$$

و در نتیجه

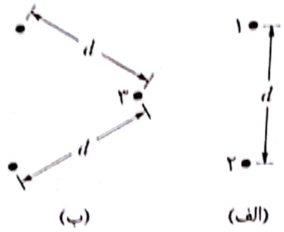
$$q_2=\left(\frac{d}{r}\right)^2q_1=\left(\frac{0{,}060m}{0{,}020m}\right)^2q_1=9{,}0q_1$$

پس، $q_2/q_1=9{,}0$ می‌شود.

۱۷ ●● در شکل ۲۱-۲۸ الف، ذره‌های ۱ و ۲ که هر دو دارای بار $20{,}0\mu C$ هستند در فاصله‌ی $d=1{,}50m$ از یکدیگر ثابت نگه داشته

Scanned by CamScanner

شده‌اند. (الف) بزرگی نیروی الکتروستاتیکی وارد بر ذره‌ی ۱ از سوی ذره‌ی ۲ چقدر است؟ در شکل ۲۱-۲۷ ب، ذره‌ی ۳ با بار $20.0\,\mu C$ به‌گونه‌ای قرار گرفته است که یک مثلث متساوی‌الاضلاع ایجاد شود. (ب) بزرگی نیروی الکتروستاتیکی خالص وارد بر ذره‌ی ۱ از سوی ذره‌های ۲ و ۳ چقدر است؟



شکل ۲۱-۲۸ مسئله‌ی ۱۷

حل (الف) قانون کولن چنین به‌دست می‌دهد.

$$F_{12} = k\frac{q_1 q_2}{d^2} = (8.99\times10^9\,\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\frac{(20.0\times10^{-6}\,\text{C})^2}{(1.50\,\text{m})^2}$$
$$= 1.60\,\text{N}$$

(ب) نیروهای وارد بر q_1 دارای دو مؤلفه‌ی x و y هستند. با اختیار سوی مثبت محور y در راستای خط واصل q_2 و q_1 و سوی مثبت محور x به سمت راست، خواهیم داشت:

$$F_x = F_{12,x} + F_{13,x} = F_{13,x} = F_{13}\sin 60.0°$$
$$F_y = F_{12,y} + F_{13,y} = F_{12} + F_{13}\cos 60.0°$$

که در آن

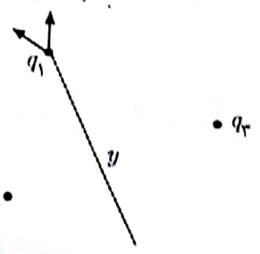
$$F_{12} = k\frac{q_1 q_2}{d^2} = (8.99\times10^9)\frac{(20.0\times10^{-6})^2}{(1.50)^2} = 1.60\,\text{N}$$
$$F_{13} = k\frac{q_1 q_3}{d^2} = (8.99\times10^9)\frac{(20\times10^{-6})^2}{(1.50)^2} = 1.60\,\text{N}$$

و از آنجا F چنین می‌شود

$$F = \sqrt{F_{1x}^2 + F_{1y}^2} = \sqrt{F_{12}^2 + F_{13}^2 + 2F_{12}F_{13}\cos 60.0°}$$
$$= 2.77\,\text{N}$$

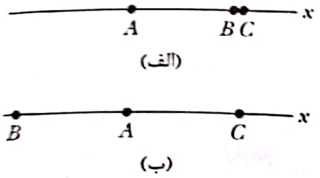
توجه! **روش دیگر، استفاده از تقارن است. می‌توانیم مطابق شکل زیر، محور y را در امتداد نیروی $\vec{F}$ بگیریم. با توجه به این‌که بارها برابر و طول ضلع‌ها یکسان است، نیروی $\vec{F}$ در امتداد خط‌چین نشان داده شده و نیمساز زاویه‌ی حاصل از بردارهای نیروی وارد بر q_1 است. بنابراین به‌راحتی درمی‌یابیم که نیروی برایند چنین می‌شود**

$$|F_y| = 2\left(k\frac{q^2}{d^2}\right)\cos 30.0° = 2.77\,\text{N}$$



پس، توجه به تقارن‌های مسئله ممکن است حل مسئله‌ها را به مراتب راحت‌تر کند.

۱۸●● در شکل ۲۱-۲۹ الف، سه ذره‌ی باردار مثبت روی محور x ثابت شده‌اند. ذره‌های B و C چنان به یکدیگر نزدیک‌اند که می‌توانیم فاصله‌ی آنها را از ذره‌ی A یکسان در نظر بگیریم. نیروی خالص وارد بر ذره‌ی A از سوی ذره‌های B و C برابر با $2.014\times10^{-23}\,\text{N}$ و در جهت منفی محور x است. در شکل ۲۱-۲۹ ب، ذره‌ی B به سمت مقابل A منتقل شده است ولی هنوز در همان فاصله از آن قرار دارد. اکنون نیروی خالص وارد بر A برابر با $2.877\times10^{-24}\,\text{N}$ و در جهت منفی محور x است. نسبت q_C/q_B چقدر است؟



شکل ۲۱-۲۹ مسئله‌ی ۱۸

حل چون طبق قانون کولن، نیرو متناسب با حاصل‌ضرب بارهاست، وقتی بارها در یک طرف هستند $F\propto q_A(q_B+q_C)$ و وقتی در مقابل هم هستند $F'\propto q_A(-q_B+q_C)$ می‌شود. بنابراین نسبت نیروها برابر است با

$$\frac{F}{F'} = \frac{q_B+q_C}{-q_b+q_C} \Rightarrow \frac{2.014\times10^{-23}\,\text{N}}{2.877\times10^{-24}\,\text{N}} = \frac{1+q_C/q_B}{-1+q_C/q_B}$$

و یا

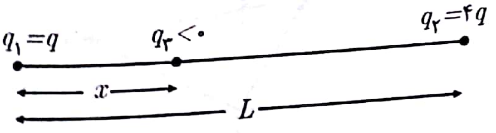
$$\frac{20.14}{-2.877} = \frac{1+r}{-1+r}$$

که در آن $r=q_C/q_B$ است. سمت چپ معادله‌ی بالا برابر با -7.000 است و از آنجا r چنین می‌شود:

$$r = \frac{7.000+1.000}{7.000-1.000} = \frac{8.000}{6.000} = 1.333$$

۱۹●● www در شکل ۲۱-۲۶، ذره‌ی ۱ با بار $+q$ و ذره‌ی ۲ با بار $+4.00q$ در فاصله‌ی $L=9.00\,\text{cm}$ از هم روی محور x ثابت نگه داشته شده‌اند. اگر ذره‌ی ۳ با بار q_3 به‌گونه‌ای قرار داده شود که این سه ذره به هنگام رها شدن در جای خود ثابت بمانند، مختصه‌ی (الف) x و (ب) y ذره‌ی ۳ و (پ) نسبت q_3/q باید چقدر باشد؟

حل توجه کنید که قرار است "کل" دستگاه در حال تعادل باشد. اگر دو بار کناری هم‌علامت باشند، بار سومی با هر علامتی می‌تواند در مکانی میان آنها به حالت تعادل قرار گیرد. ولی اگر این بار میانی هم‌علامت با دو بار کناری باشد، تعادل آنها را بر هم خواهد زد، مگر آنکه آن دو بار را در جای خود ثابت کرده باشیم. بنابراین اگر قرار باشد "کل" دستگاه در این مسئله به حالت تعادل باشد، بار میانی حتماً باید منفی باشد و شکل تقریبی مسئله چنین می‌شود:



Scanned by CamScanner

(الف) شرط تعادل دستگاه چنین به‌دست می‌دهد:

$$k\frac{|q_1q_3|}{x^2}=k\frac{|q_3q_2|}{(L-x)^2}=k\frac{|q_1q_2|}{L^2}$$

از دو معادله‌ی اول درمی‌یابیم

$$\frac{q}{x^2}=\frac{4q}{(L-x)^2}$$

و از آنجا به معادله‌ی درجه دوم زیر می‌رسیم:

$$3x^2+2Lx-L^2=0$$

که این معادله، دو جواب $-L$ و $L/3$ را دارد که جواب قابل قبول $L/3$ است، که به‌ازای $L=9{,}00\,\text{cm}$ برابر $x=3{,}00\,\text{cm}$ می‌شود.

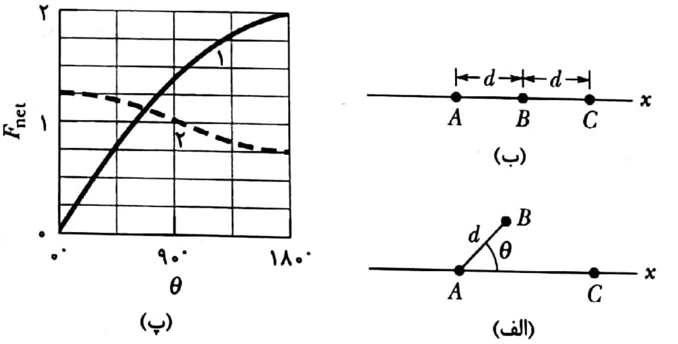
(ب) مختصه‌ی y بار q_3 برابر با $y=0$ است.

(پ) در قسمت الف مکان بار q_3 را $L/3$ به‌دست آوردیم. این پاسخ را در معادله‌ی دوم شرط تعادل می‌گذاریم

$$k=\frac{|q_3q_2|}{(L-x)^2}=k\frac{|q_1q_2|}{L^2}\Rightarrow\frac{|q_3|}{(2L/3)^2}=\frac{q}{L^2}$$

و از آنجا $|q_3|=4q/9$ می‌شود. با توجه به این‌که پیش‌تر استدلال کردیم $q_3<0$ است، نتیجه می‌گیریم $q_3=-4q/9$ و یا $q_3/q=-0{,}444$ می‌شود.

۲۰ ●●● GO شکل ۲۱-۳۰ الف چیدمانی از سه ذره‌ی باردار را نشان می‌دهد که به فاصله‌ی d قرار گرفته‌اند. ذره‌های A و C روی محور x ثابت شده‌اند، ولی ذره‌ی B می‌توانند روی دایره‌ای به مرکز ذره‌ی A حرکت کند. در حین این حرکت، خط شعاعی میان A و B با جهت مثبت محور x زاویه‌ی θ می‌سازد (شکل ۲۱-۳۰ ب). منحنی‌های شکل ۲۱-۳۰ پ، برای دو وضعیت، بزرگی F_{net} نیروی الکتروستاتیکی خالص وارد بر ذره‌ی A از سوی دو ذره‌ی دیگر را نشان می‌دهد. این نیروی خالص بر حسب تابعی از زاویه‌ی θ و بر حسب مضربی از مقدار پایه‌ی F_0 نشان داده شده است. مثلاً از روی منحنی ۱ درمی‌یابیم که در $\theta=180°$، $F_{net}=2F_0$ است. (الف) برای وضعیت مربوط به منحنی ۱، نسبت بار ذره‌ی C به بار ذره‌ی B (با در نظر گرفتن علامت) چقدر است؟ (ب) برای وضعیت مربوط به منحنی ۲، این نسبت چقدر است؟



شکل ۲۱-۳۰ مسئله‌ی ۲۰

حل توجه کنید که در اینجا قرار است نیروی وارد بر A را بررسی کنیم، به‌گونه‌ای که با حرکت B بر روی مسیر دایره‌ای، فاصله‌ی میان B و A، و C و A تغییر نکند. روی نقاط انتهایی ($\theta=0°,180°$) هر منحنی متمرکز می‌شویم، زیرا این نقاط حالت‌هایی را نمایش می‌دهند که در آنجا نیروهای وارد به A از سوی B و C، موازی یا پادموازی‌اند (این دو حالت به‌ترتیب بزرگی‌های نیروی بیشینه یا کمینه را به‌دست می‌دهند). همچنین توجه کنید که قانون کولن متناسب با وارون r^2 است و اگر بر فرض همه‌ی بارها یکسان می‌بودند، نیروی حاصل از C برابر $\frac{1}{4}$ نیروی حاصل از B می‌شد (چون فاصله‌ی C دو برابر فاصله‌ی B تا A است). ولی بارها یکسان نیستند و بنابراین یک عامل نسبت باری α (نسبت بار C به بار B) باید در $\frac{1}{4}$ ضرب شود. یعنی، نیروی وارد از C، طبق قانون کولن برابر با $\pm\frac{\alpha}{4}$ نیروی وارد از B است.

(الف) نیروی بیشینه برابر $2F_0$ است و در $\theta=180°$ ظاهر می‌شود (B در سمت چپ A است، در حالی که C در سمت راست A قرار دارد). علامت منفی را انتخاب می‌کنیم و چنین می‌نویسیم

$$2F_0=\left(1-\frac{\alpha}{4}\right)F_0\quad\Rightarrow\quad\alpha=-4$$

یک راه برای درک انتخاب علامت منفی این است که $\cos(180°)=-1$ است. این یقیناً با نسبت نیروی کمینه (صفر) در $\theta=0°$ می‌خواند. زیرا در آن صورت داریم

$$0=1+\frac{\alpha}{4}\quad\Rightarrow\quad\alpha=-4$$

(ب) در این حالت، نسبت نیروی بیشینه به کمینه برابر با $\frac{5}{3}=1{,}25/0{,}75$ است که بیان می‌دارد

$$\frac{5}{3}=\frac{1+\alpha/4}{1-a/4}\quad\Rightarrow\quad\alpha=16$$

۲۱ ●●● GO یک پوسته‌ی نارسانای کروی، با شعاع داخلی $4{,}0\,\text{cm}$ و شعاع خارجی $6{,}0\,\text{cm}$ دارای باری است که به‌طور غیریکنواخت در فضای بین سطوح داخلی و خارجی آن توزیع شده است. *چگالی حجمی بار* ρ، بار در واحد حجم، با یکای کولن بر مترمکعب است. برای این پوسته $\rho=b/r$ است که در آن r فاصله بر حسب متر از مرکز پوسته و $b=3{,}0\,\mu C/m^2$ است. بار خالص داخل پوسته چقدر است؟

حل بار dq داخل یک پوسته‌ی نازک به ضخامت dr برابر با $\rho A dr$ است که در آن $A=4\pi r^2$ است. بنابراین، با $\rho=b/r$ خواهیم داشت

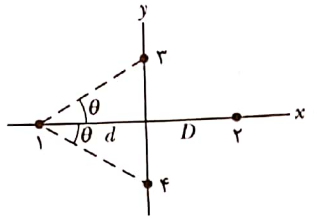
$$q=\int dq=4\pi b\int_{r_1}^{r_2} r\,dr=2\pi b(r_2^2-r_1^2)$$

که به‌ازای $b=3{,}0\,\mu C/m^2$، $r_2=0{,}060\,m$ و $r_1=0{,}040\,m$ به مقدار $q=0{,}038\,\mu C=3{,}8\times10^{-8}\,C$ برای بار می‌انجامد.

۲۲ ●●● GO شکل ۲۱-۳۱ چیدمانی از چهار ذره‌ی باردار را، با زاویه‌ی $\theta=30{,}0°$ و فاصله‌ی $d=2{,}00\,\text{cm}$ نشان می‌دهد. بار ذره‌ی ۲ برابر $q_2=+8{,}00\times10^{-19}\,C$، و بار ذره‌های ۳ و ۴ برابر با $q_3=q_4=-1{,}60\times10^{-19}\,C$ است. (الف) فاصله‌ی D میان مبدأ و ذره‌ی ۲ چقدر باشد تا نیروی الکتروستاتیکی خالص وارد بر ذره‌ی ۱ از

Scanned by CamScanner

سوی ذره‌های دیگر برابر صفر شود؟ (ب) اگر ذره‌های ۳ و ۴ به محور x نزدیک‌تر آورده شوند ولی تقارن آنها نسبت به این محور تغییر نکند، آیا مقدار مورد نیاز D باید بزرگتر از مقدار آن در قسمت (الف) باشد یا کوچکتر یا مساوی با آن باشد؟



شکل ۲۱-۳۱ مسئله‌ی ۲۲

حل (الف) با توجه به این‌که در شکل $d = r\cos 30.0°$ است، فاصله‌ی خط‌چین r شکل برابر با $r = 2d/\sqrt{3}$ می‌شود. نیروی برایند وارد بر q_1 از سوی بارهای q_3 و q_4 (با $|q_3|=|q_4|=1.60\times10^{-19}\,C$) واقع بر روی محور y، دارای بزرگی زیر است

$$2\frac{|q_1q_3|}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos(30.0°) = \frac{3\sqrt{3}|q_1q_3|}{16\pi\varepsilon_0 d^2}$$

برای آنکه نیروی خالص برابر صفر باشد، این مقدار باید با بزرگی نیروی وارد بر q_1 از سوی $q_2 = 8.00\times10^{-19}\,C = 5.00|q_3|$ برابر باشد:

$$\frac{3\sqrt{3}|q_1q_3|}{16\pi\varepsilon_0 d^2} = \frac{|q_1q_2|}{4\pi\varepsilon_0 (D+d)^2}$$

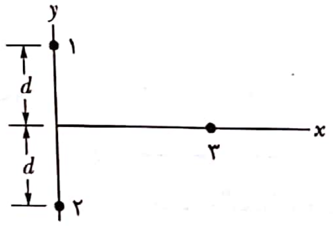
و از آنجا D چنین می‌شود

$$D = d\left(2\sqrt{\frac{5}{3\sqrt{3}}} - 1\right) = 0.924d$$

که به‌ازای $d = 2.00\,cm$ به $D = 1.92\,cm$ می‌انجامد.

(ب) وقتی زاویه کاهش می‌یابد، کسینوس آن افزایش می‌یابد و این منجر به افزایش نیروی حاصل از بارهای روی محور y می‌شود. برای آنکه نیروی خالص برابر با صفر بماند، نیروی وارد از q_2 نیز باید افزایش یابد و به این منظور باید q_2 به q_1 نزدیک‌تر بشود (زیرا طبق قانون کولن، بزرگی نیرو متناسب با وارون مربع فاصله است). پس، D باید کاهش یابد.

۲۳ ••• GO در شکل ۲۱-۳۲، ذره‌های ۱ و ۳ با بار $q_1 = q_2 = +3.20\times10^{-19}\,C$ روی محور y به فاصله‌ی $d = 17.0\,cm$ از مبدأ واقع شده‌اند. ذره‌ی ۳ با بار $q_3 = +6.40\times10^{-19}\,C$ به‌تدریج روی محور x از $x = 0$ به $x = +5.0\,m$ آورده می‌شود. به‌ازای چه مقادیری از x بزرگی نیروی الکتروستاتیکی وارد بر ذره‌ی سوم از سوی دو ذره‌ی دیگر (الف) کمینه و (ب) بیشینه می‌شود؟ این مقادیر (پ) کمینه و (ت) بیشینه چقدر است؟



شکل ۲۱-۳۲ مسئله‌ی ۲۳

حل اگر θ زاویه‌ی بین نیرو و محور x باشد، خواهیم داشت

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+d^2}}$$

از روی تقارن مسئله درمی‌یابیم که نیروی خالص وارد بر ذره‌ی سوم، مؤلفه‌ی y ندارد. بنابراین، F بزرگی نیروی حاصل از q_1 یا q_2 بر روی q_3 است. با توجه به این‌که $q_1 = q_2 = +2e$ و $q_3 = 4.0e$ است، برای نیروی خالص خواهیم داشت

$$F_{net} = 2F\cos\theta = \frac{2(2e)(4e)}{4\pi\varepsilon_0(x^2+d^2)}\frac{x}{\sqrt{x^2+d^2}} = \frac{4e^2x}{\pi\varepsilon_0(x^2+d^2)^{3/2}}$$

که در آن $e = +1.60\times10^{-19}\,C$ است.

(الف) برای یافتن مکانی که در آن نیرو فرینه (اکسترمم: بیشینه یا کمینه) است، می‌توانیم از رابطه F_{net} نسبت به x مشتق بگیریم و نتیجه‌ی آن را برابر با صفر قرار دهیم و از آنجا x_{max} را به‌دست بیاوریم.

$$\frac{dF_{net}}{dx} = \frac{4e^2}{\pi\varepsilon_0}\left[\frac{(x^2+d^2)^{3/2} - \frac{3}{2}(2x^2)(x^2+d^2)^{1/2}}{(x^2+d^2)^3}\right] = 0$$

و از آنجا

$$(x^2+d^2)^{1/2}\left[(x^2+d^2) - 3x^2\right] = 0$$

در نتیجه $x_{max} = d/\sqrt{2}$ می‌شود. البته برای آنکه تشخیص دهیم که این مکان فرینگی، مکان بیشینه یا کمینه‌ی نیرو است، بهترین راه رسم نمودار F_{net} است. اگر منحنی F_{net} را رسم کنید درمی‌یابید که مکان کمینگی در $x_{min} = 0$ قرار دارد.

(ب) همان‌طور که در بالا دیدیم، بیشینه‌ی نیرو در $x = d/\sqrt{2}$ رخ می‌دهد که تقریباً برابر $12\,cm$ می‌شود.

(پ) مقدار نیروی خالص در $x = 0$ برابر با $F_{net} = 0$ است.

(ت) مقدار نیروی خالص در $x = d/\sqrt{2}$ برابر با $F_{net} = 4.9\times10^{-26}\,N$ است.

۲-۲۱ بار کوانتیده است

۲۴• فاصله‌ی مرکز به مرکز دو قطره‌ی آب کروی کوچک با بار یکسان $-1.00\times10^{-16}\,C$ برابر با $1.00\,cm$ است. (الف) بزرگی نیروی الکتروستاتیکی وارد بر آنها چقدر است؟ (ب) چند الکترون اضافی در هر قطره موجب بر هم خوردن توازن بار آنها شده است؟

حل (الف) از قانون کولن داریم

$$F = k\frac{q^2}{r^2} = (8.99\times10^9\,N\cdot m^2/C^2)\frac{(1.00\times10^{-16}\,C)^2}{(1.00\times10^{-2}\,m)^2} = 8.99\times10^{-19}\,N$$

(ب) اگر n تعداد الکترون‌های اضافی (هر یک به بار $-e$) روی هر قطره باشد، خواهیم داشت

Scanned by CamScanner

$$n=-\frac{q}{e}=\frac{-1.00\times10^{-16}}{1.60\times10^{-19}C}=625$$

••۲۵ ILW چند الکترون باید از یک سکه برداشته شود تا بار $+1.0\times10^{-7}C$ در آن باقی بماند؟

حل معادله‌ی ۲۱-۱۱ چنین به‌دست می‌دهد

$$n=\frac{|q|}{e}=\frac{1.0\times10^{-7}C}{1.60\times10^{-19}C}=6.3\times10^{11}$$

•۲۶ اگر فاصله‌ی میان یک یون مجزای سدیم باردار (Na^+، با بار $+e$) و یک یون مجزای کلر باردار (Cl^-، با بار $-e$) در یک بلور نمک طعام برابر با $2.82\times10^{-10}m$ باشد، بزرگی نیروی الکتروستاتیکی میان آنها چقدر است؟

حل بزرگی این نیرو برابر است با

$$F=k\frac{e^2}{r^2}=(8.99\times10^9\,N\cdot m^2/C^2)\frac{(1.60\times10^{-19}C)^2}{(2.82\times10^{-10}m)^2}$$

$$=2.89\times10^{-9}N$$

•۲۷ بزرگی نیروی الکتروستاتیکی میان دو یون مشابه که به فاصله‌ی $5.0\times10^{-10}m$ از هم قرار گرفته‌اند برابر با $3.7\times10^{-9}N$ است. (الف) بار هر یون چقدر است؟ (ب) چند الکترون از هر یون "از دست رفته" است (که موجب عدم توازن بار آن شده است)؟

حل (الف) بزرگی نیروی میان یون‌های (مثبت) با رابطه‌ی زیر داده می‌شود:

$$F=\frac{(q)(q)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=k\frac{q^2}{r^2}$$

که q بار روی هر یک از یون‌ها و r فاصله‌ی جدایی آنهاست. با حل آن برای q خواهیم داشت:

$$q=r\sqrt{\frac{F}{k}}=(5.0\times10^{-10}m)\sqrt{\frac{3.7\times10^{-9}N}{8.99\times10^9 N\cdot m^2/C^2}}$$

$$=3.2\times10^{-19}C$$

(ب) N را تعداد الکترون‌هایی بگیرید که هر یون فاقد آن است. بنابراین $Ne=q$ و از آنجا خواهیم داشت:

$$N=\frac{q}{e}=\frac{3.2\times10^{-19}C}{1.6\times10^{-19}C}=2.0$$

••۲۸ عبور جریان $0.300A$ از قفسه‌ی سینه شما می‌تواند موجب لرزش بطنی قلب شما، بر هم خوردن ضرب‌آهنگ طبیعی ضربان قلب و اختلال در گردش خون (و بنابراین اکسیژن) به مغز شما شود. اگر این جریان به مدت $2.00min$ برقرار بماند، چند الکترون رسانش از قفسه‌ی سینه شما عبور خواهد کرد؟

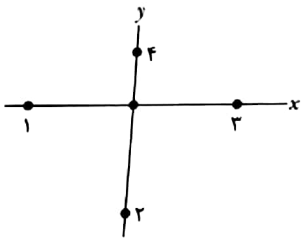
حل به‌خاطر داشته باشید که یک آمپر برابر با یک کولن بر ثانیه است، و در ۲ دقیقه (۱۲۰ ثانیه)، بزرگی باری که از قفسه‌ی سینه عبور می‌کند برابر می‌شود با

$$|q|=\left(0.300\frac{C}{s}\right)(120s)=36.0C$$

این بار شامل N الکترون، هر یک به بار e است. بنابراین داریم

$$N=\frac{|q|}{e}=\frac{36.0C}{1.60\times10^{-19}C}=2.25\times10^{20}$$

••۲۹ GO در شکل ۲۱-۳۳، ذره‌های ۲ و ۴، با بار $-e$ در جای خود روی محور y، در $y_2=-10.0cm$ و $y_4=5.00cm$ ثابت شده‌اند. ذره‌های ۱ و ۳، با بار $-e$، می‌توانند روی محور x حرکت کنند. ذره‌ی ۵، با بار $+e$، در مبدأ ثابت شده است. در ابتدا ذره‌ی ۱ در $x_1=-10.0cm$ و ذره‌ی ۳ در $x_3=10.0cm$ قرار دارند. (الف) ذره‌ی ۱ را باید تا چه مقدار x حرکت داد تا جهت نیروی الکتریکی خالص $\vec{F}_{net}$ وارد بر ذره‌ی ۵ به اندازه‌ی $30°$ پادساعتگرد بچرخد؟ (ب) وقتی ذره‌ی ۱ در مکان جدید خود ثابت شود، ذره‌ی ۳ را باید تا چه مقدار x حرکت داد تا $\vec{F}_{net}$ به جهت اولیه‌ی خود برگردد؟



شکل ۲۱-۳۳ مسئله‌ی ۲۹

حل (الف) توجه کنید که $\tan(30°)=1/\sqrt{3}$ است. در پیکربندی اولیه، نیروی خالص وارد بر ذره‌ی مرکزی در جهت $-y$ و دارای بزرگی $3F$ است که F نیروی کولنی وارد از یک ذره به ذره‌ی دیگر در فاصله‌ی $d=10cm$ است. این، ناشی از این واقعیت است که نیروهای وارد بر ذره‌ی مرکزی (در پیکربندی اولیه) از سوی سایر ذره‌ها، در روی محور x همدیگر را خنثی می‌کنند. همچنین این نیرو از آن‌رو به‌سوی پایین است که نیروی "رو به پایین" حاصل از ذره‌ی ۴ بر ذره‌ی مرکزی، چهار برابر بزرگ‌تر از نیروی "رو به بالای" وارد از ذره‌ی ۲ بر ذره‌ی مرکزی است. اکنون با حرکت ذره‌ی ۱، هرچند مؤلفه‌ی x نیرو غیرصفر می‌شود، ولی نیروی خالص در امتداد محور y تغییر نخواهد کرد. حال مؤلفه‌ها با رابطه‌ی زیر به هم مربوط می‌شوند

$$\tan(30°)=\frac{F_x}{F_y}\ \Rightarrow\ \frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{F_x}{3F}$$

که به $F_x=\sqrt{3}F$ می‌انجامد. اکنون، ذره‌ی ۳ یک نیروی "رو به سمت چپ" به بزرگی F بر ذره‌ی مرکزی وارد می‌کند، در حالی‌که ذره‌ی ۱ یک نیروی "رو به سمت راست" به بزرگی F' بر آن وارد می‌کند. بنابراین داریم

$$F'-F=\sqrt{3}F\ \Rightarrow\ F'=(\sqrt{3}+1)F$$

Scanned by CamScanner

با توجه به این‌که طبق قانون کولن، نیرو به‌طور وارون با توان دوم فاصله رابطه دارد، نتیجه می‌گیریم

$$r^2=\frac{d^2}{\sqrt{3}+1} \Rightarrow r=\frac{d}{(\sqrt{3}+1)^{1/2}}$$

که r فاصله‌ی میان مهره‌ی ۱ و مهره‌ی مرکزی است. بنابراین با قرار دادن $d=10.0\,\text{cm}$، $r=6.05\,\text{cm}$ می‌شود.

(ب) برای آنکه دوباره شرایط تقارن حاصل بشود، باید ذره‌ی ۳ به‌همان فاصله‌ی r ذره‌ی ۱ از ذره‌ی مرکزی آورده شود تا مؤلفه‌های x دوباره همدیگر را خنثی کنند.

۳۰۰۰ در شکل ۲۱-۲۶ ذره‌های ۱ و ۲ در جای خود روی محور x به فاصله‌ی $L=8.00\,\text{cm}$ از هم، ثابت شده‌اند. بار آنها $q_1=+e$ و $q_2=-27e$ است. ذره‌ی ۳ با بار $q_3=+4e$ باید روی خطّ میان ذره‌های ۱ و ۲ قرار گیرد تا نیروی الکتروستاتیکی خالص $\vec{F}_{3,net}$ بر آن وارد شود. (الف) ذره‌ی ۳ باید در چه مختصه‌ای قرار گیرد تا بزرگی این نیرو کمینه شود؟ (ب) بزرگی این نیروی کمینه چقدر است؟

حل

(الف) x را فاصله‌ی میان ذره‌ی ۱ و ذره‌ی ۳ بگیرید. بنابراین، فاصله‌ی میان ذره‌ی ۳ و ذره‌ی ۲ برابر با $L-x$ می‌شود. هر دو ذره‌ی ۱ و ۲ نیروهایی رو به سمت چپ به q_3 وارد می‌کنند (به شرطی که q_3 روی خطّ واصل میان آنها باشد). بنابراین بزرگی نیروی خالص وارد بر q_3 چنین می‌شود:

$$F_{net}=\left|\vec{F}_{13}\right|+\left|\vec{F}_{23}\right|=\frac{|q_1q_3|}{4\pi\varepsilon_0 x^2}+\frac{|q_2q_3|}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$$

$$=\frac{e^2}{\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{27}{(L-x)^2}\right)$$

که در محاسبه‌ی نهایی، مقادیر بارها از صورت مسئله گذشته شده است. برای یافتن آن مقدار x ای که F_{net} را کمینه می‌کند، از آن نسبت به x مشتق می‌گیریم و برابر صفر قرار می‌دهیم

$$\frac{dF_{net}}{dx}=\frac{e^2}{\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{2}{x^3}+\frac{54}{(L-x)^3}\right)=0$$

از آنجا به $(3x)^3=(L-x)^3$ و یا $x=L/4$ می‌رسیم. بنابراین $x=2.00\,\text{cm}$ می‌شود.

(ب) با قرار دادن $x=L/4$ در رابطه‌ی نیروی خالص به $F_{net}=9.21\times10^{-24}\,\text{N}$ می‌رسیم که در آن از $e=1.60\times10^{-19}\,\text{C}$ استفاده کردیم.

۳۱۰۰ ILW جوّ زمین دائماً توسط *پروتون‌های پرتوی کیهانی* که مبداء آنها جایی در فضاست بمباران می‌شود. اگر همه‌ی این پروتون‌ها از جو عبور کرده باشند، آنها با آهنگ متوسط ۱۵۰۰ پروتون در هر ثانیه به هر مترمربع از سطح زمین برخود می‌کنند. جریان الکتریکی‌ای که از کلّ سطح زمین عبور می‌کند چقدر است؟

حل جریان وارد بر هر مترمربع از سطح زمین برابر است با

$$i/A=\left(1500\,\frac{\text{protons}}{\text{s}\cdot\text{m}^2}\right)(1.60\times10^{-19}\,\text{C/proton})$$

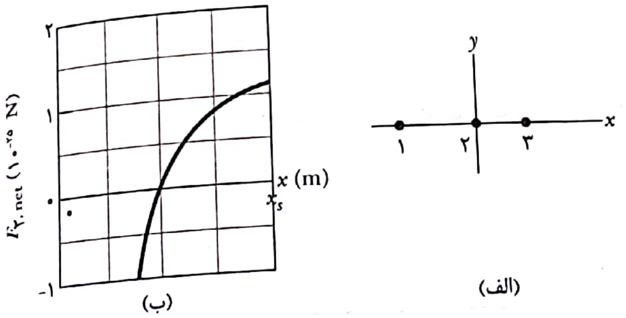
$$=2.40\times10^{-16}\,\text{C/s}\cdot\text{m}^2$$

در نتیجه، جریانی که از سطح کروی زمین به مساحت $A=4\pi R_E^2=4\pi(6.37\times10^6\,\text{m})^2=5.10\times10^{14}\,\text{m}^2$ می‌گذرد چنین می‌شود

$$i=(5.10\times10^{14}\,\text{m}^2)(2.40\times10^{-16}\,\text{C/s}\cdot\text{m}^2)=0.123\,\text{C/s}$$

$$=0.123\,\text{A}$$

۳۲۰۰ GO شکل ۲۱-۳۴ الف دو ذره‌ی باردار ۱ و ۲ را نشان می‌دهد که در جای خود روی محور x ثابت شده‌اند. ذره‌ی ۱ دارای باری به بزرگی $|q_1|=8.00e$ است. ذره‌ی ۳ با بار $q_3=+7.00e$ در ابتدا روی محور x در نزدیکی ذره‌ی ۲ قرار دارد. سپس ذره‌ی ۳ را به‌تدریج در سوی مثبت محور x حرکت می‌دهیم. در نتیجه، بزرگی نیروی الکتروستاتیکی خالص $\vec{F}_{2,net}$ وارد بر ذره‌ی ۲ از سوی ذره‌های ۱ و ۳ تغییر می‌کند. شکل ۲۱-۳۴ ب مؤلفه‌ی x این نیروی خالص را بر حسب تابعی از مکان x ذره‌ی ۳ نشان می‌دهد. محور x با $x_s=0.80\,\text{m}$ مقیاس‌بندی شده است. این نمودار وقتی $x\to\infty$ میل کند دارای مجانب $\vec{F}_{2,net}=1.5\times10^{-25}\,\text{N}$ است. بار q_2 بر حسب مضربی از e که شامل علامت هم باشد، چیست؟



شکل ۲۱-۳۴ مسئله‌ی ۳۲

حل چون منحنی، صفر را قطع می‌کند، q_1 باید مثبت باشد: $q_1=+8.00e$. اگر توجه کنید درمی‌یابید که منحنی در $r=0.40\,\text{m}$، صفر را قطع می‌کند. حال مقدار مجانبی نیرو، بزرگی و علامت q_2 را به‌دست می‌دهد:

$$\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=F=1.5\times10^{-25}\,\text{N}$$

و از آنجا

$$q_2=\left(\frac{1.5\times10^{-25}}{kq_1}\right)r^2=2.1\times10^{-18}\,\text{C}=13e$$

۳۳۰۰ تعداد کولن‌های بار مثبت در $250\,\text{cm}^3$ آب (خنثی) چقدر است؟ (*راهنمایی:* اتم هیدروژن دارای یک پروتون و اتم اکسیژن دارای هشت پروتون است.)

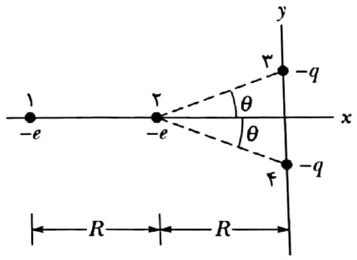
Scanned by CamScanner

حل چون چگالی آب برابر با $1/0\,g/cm^3$ است، $250\,cm^3$ آب دارای جرمی برابر با $250\,g$ است و چون جرم مولی آب برابر با ۱۸ است، در این جرم از آب، تعداد $14=250/18$ مول وجود دارد. از طرفی، در هر مولکول H_2O، ده پروتون (هر یک به بار $q=+e$) وجود دارد و بنابراین تعداد کولن‌های بار موجود چنین می‌شود:

$$Q=14N_A q=14(6/02\times10^{23})(10)(1/60\times10^{-19}\,C)$$

$$=1/33\times10^{7}\,C$$

۳۴●●● GO شکل ۲۱-۳۵ الکترون‌های ۱ و ۲ را روی محور x و یون‌های باردار ۳ و ۴ با بار یکسان $-q$ را در زاویه‌های یکسان θ نشان می‌دهد. الکترون ۲ می‌تواند حرکت کند؛ سه ذره‌ی دیگر در مکان‌های خود به فاصله‌ی افقی R از الکترون ۲ ثابت شده‌اند و می‌خواهیم بر اثر حضور آنها الکترون ۲ در جای خود ثابت بماند. به‌ازای مقادیر از لحاظ فیزیکی ممکن $q\le 5e$، (الف) کوچکترین، (ب) دومین کوچکترین، و (پ) سومین کوچکترین مقدار θ چقدر باشد تا الکترون ۲ در جای خود ثابت بماند؟



شکل ۲۱-۳۵ مسئله‌ی ۳۴

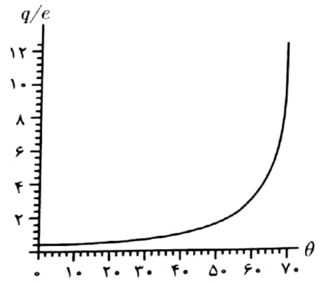
حل d را فاصله‌ی عمودی از مبدأ مختصات تا $q_3=-q$ روی محور $+y$ بگیرید، که d مقدار مثبتی فرض شده است. به‌همین ترتیب، d فاصله‌ی (مثبت) از مبدأ تا $q_4=-q$ روی محور $-y$ است. اگر هر زاویه‌ی θ در شکل را مثبت بگیریم، آنگاه $\tan\theta=d/R$ و $\cos\theta=R/r$ می‌شود (که r فاصله‌ی خطچین نشان داده شده در شکل است). از روی تقارن شکل درمی‌یابیم که نیروی خالص وارد بر $q_2=-e$ دارای هیچ مؤلفه‌ی قائمی نیست و شرط تعادل q_2 تنها این است که مؤلفه‌ی x نیروهای وارد بر آن صفر باشد. بزرگی مؤلفه‌ی x نیروی خالص وارد از q_3 و q_4 بر q_e برابر است با

$$2\frac{qe}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta=\frac{2qe\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0(R/\cos\theta)^2}=\frac{2qe\cos^3\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

در نتیجه برای آنکه مؤلفه‌ی x نیرو صفر باشد باید بزرگی نیروی دافعه‌ی حاصل $q_1=-e$ بر q_2 با رابطه‌ی بالا برابر باشد:

$$\frac{2qe\cos^3\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2}=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

و در نتیجه $q=\frac{e}{2\cos^3\theta}$ می‌شود. در پایین q/e بر حسب تابعی از زاویه (به درجه) رسم شده است.



این منحنی نشان می‌دهد که به‌ازای $\theta>60^\circ$، تقریباً $q/e<5$ است.
روش دقیق‌تر این است که معادله‌ی زیر را حل کنیم:

$$\frac{e}{2\cos^3\theta}\le 5e \;\Rightarrow\; \frac{1}{(10)^{1/3}}\le\cos\theta$$

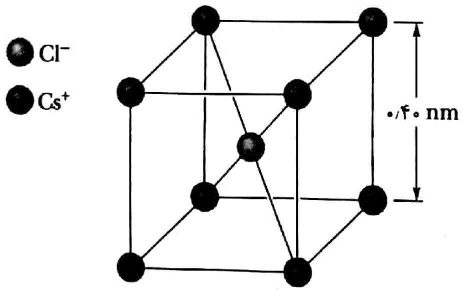
که به $\theta\le 62^\circ$ می‌انجامد. مسئله "مقدارهای ممکن از لحاظ فیزیکی" را خواسته است. با توجه به اینکه $q=Ne$ و $N=1,\ldots,5$ است، از رابطه‌ای که برای q به‌دست آوردیم درمی‌یابیم که $\cos\theta=(\frac{1}{2}N)^{1/3}$ می‌شود و از آنجا خواهیم داشت:

(الف) کم‌ترین مقدار زاویه به‌ازای $N=1$ برابر با $\theta_1=37^\circ$ (یا $0/64\,rad$) می‌شود.

(ب) دومین کم‌ترین مقدار زاویه به‌ازای $N=2$ برابر با $\theta_2=51^\circ$ (یا $0/90\,rad$) می‌شود.

(پ) سومین کم‌ترین مقدار زاویه به‌ازای $N=3$ برابر با $\theta_3=57^\circ$ (یا $0/99\,rad$) می‌شود.

۳۵●●● در بلورهای نمک سزیم‌کلراید، یون‌های سزیم Cs^+ هشت گوشه‌ی یک مکعب را تشکیل می‌دهند و یون Cl^- در مرکز مکعب قرار دارد (شکل ۲۱-۳۶). طول هر ضلع مکعب $0/40\,nm$ است. یون‌های Cs^+ هر کدام فاقد یک الکترون‌اند (و بنابراین بار هر یک $+e$ است)، و یون Cl^- یک الکترون اضافی دارد (و بنابراین بار آن $-e$ است). (الف) بزرگی نیروی الکتروستاتیکی خالص وارد بر یون Cl^- از سوی ۸ یون Cs^+ که در گوشه‌های مکعب قرار دارند چیست؟ اگر یکی از یون‌های Cs^+ حضور نداشته باشد، گفته می‌شود که بلور دارای *نقص* است؛ آنگاه بزرگی نیروی الکتروستاتیکی خالص وارد بر یون Cl^- از سوی هفت یون Cs^+ باقی‌مانده چقدر می‌شود؟



شکل ۲۱-۳۶ مسئله‌ی ۳۵

Scanned by CamScanner

حل (الف) هر یون سزیم در گوشه‌های مکعب، نیرویی با بزرگی یکسان بر یون کلر در مرکز مکعب وارد می‌کند. این نیرو، جاذبه و به‌سوی یون سزیم و در امتداد قطر حجمی مکعب است. توجه کنید که یون‌های سزیم را می‌توانیم به جفت‌هایی تقسیم کنیم که به‌طور قطری در گوشه‌های مخالف مکعب قرار گرفته‌اند. چون یون‌های هر جفت نیروهایی با بزرگی یکسان، ولی در جهت مخالف به یون سزیم وارد می‌کنند، بنابراین نیروی کل وارد بر یون کلر برابر با صفر می‌شود.

(ب) به‌جای این‌که یک اتم سزیم را برداریم، می‌توانیم بار $-e$ را به‌جای یک یون سزیم بنشانیم. با این کار، آن یون از لحاظ باری خنثی می‌شود که این معادل آن است که آن یون را برداشته باشیم. همان‌طور که در قسمت (الف) دیدیم، نیروهای حاصل از هشت اتم سزیم در مرکز مکعب برابر با صفر می‌شود و بنابراین تنها نیروی وارد بر یون کلر ناشی از نیروی بار اضافه شده است.

طول یک قطر حجمی مکعب برابر با $\sqrt{3}a$ است که a طول هر ضلع مکعب است. بنابراین، فاصله از مرکز مکعب تا یک گوشه برابر با $d=(\sqrt{3}/2)a$ می‌شود. این نیرو دارای بزرگی زیر است:

$$F=k\frac{e^2}{d^2}=\frac{ke^2}{3a^2/4}$$

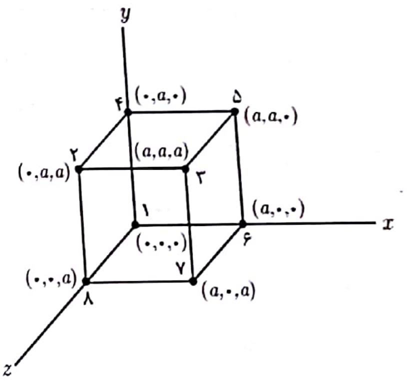
$$=\frac{(8.99\times10^{9}\,\mathrm{N\cdot m^2/C^2})(1.60\times10^{-19}\,\mathrm{C})^2}{3(0.40\times10^{-9}\,\mathrm{m})^2/4}$$

$$=1.9\times10^{-9}\,\mathrm{N}$$

چون هم بار اضافه شده و هم یون کلر دارای بار منفی هستند، این نیرو دافعه است. یون کلر، از طرف یون سزیم برداشته شده دفع می‌شود.

توجه! در حلّ مسئله‌ی بالا از خاصیت‌های تقارنی استفاده کردیم. ولی گاهی اوقات با مسئله‌هایی مواجه می‌شویم که باید برای پاسخ‌گویی به آنها حتماً از محاسبات ریاضی استفاده کنیم. برای نمونه به مسئله‌ی زیر توجه کنید:

مسئله. در هر یک از گوشه‌های مکعبی به ضلع a، یک بار نقطه‌ای q قرار دارد. بزرگی نیروی برایند وارد بر هرکدام از بارها را به‌دست آورید.



در حل چنین مسئله‌هایی بهتر است از شکل برداری قانون کولن استفاده کنیم:

$$\vec{F}=k\frac{q^2}{r^2}\hat{\mathbf{r}}=k\frac{q^2}{r^2}\frac{\vec{\mathbf{r}}}{r}=k\frac{q^2}{r^3}\vec{r}$$

ر فرض، بیایید نیروهای وارد بر بار ۵ را تعیین کنیم:

$$\vec{F}_5=\vec{F}_{15}+\vec{F}_{25}+\vec{F}_{35}+\vec{F}_{45}+\vec{F}_{65}+\vec{F}_{75}+\vec{F}_{85}$$

برای محاسبه‌ی نیروهای منفرد به r ها و بزرگی آنها نیاز داریم:

$$\vec{r}_{15}=\vec{r}_5-\vec{r}_1=a\hat{\mathbf{i}}+a\hat{\mathbf{j}}\Rightarrow r_{15}=\sqrt{2}a$$

$$\vec{r}_{25}=\vec{r}_5-\vec{r}_2=(a-0)\hat{\mathbf{i}}+(a-a)\hat{\mathbf{j}}+(0-a)\hat{\mathbf{k}}=a\hat{\mathbf{i}}-a\hat{\mathbf{k}}\Rightarrow r_{25}=\sqrt{2}a$$

$$\vec{r}_{35}=\vec{r}_5-\vec{r}_3=(a-a)\hat{\mathbf{i}}+(a-a)\hat{\mathbf{j}}+(0-a)\hat{\mathbf{k}}=-a\hat{\mathbf{k}}\Rightarrow r_{35}=a$$

$$\vec{r}_{45}=\vec{r}_5-\vec{r}_4=(a-0)\hat{\mathbf{i}}+(a-a)\hat{\mathbf{j}}+(0-0)\hat{\mathbf{k}}=a\hat{\mathbf{i}}\Rightarrow r_{45}=a$$

$$\vec{r}_{65}=\vec{r}_5-\vec{r}_6=(a-a)\hat{\mathbf{i}}+(a-0)\hat{\mathbf{j}}+(0-0)\hat{\mathbf{k}}=a\hat{\mathbf{j}}\Rightarrow r_{65}=a$$

$$\vec{r}_{75}=\vec{r}_5-\vec{r}_7=(a-a)\hat{\mathbf{i}}+(a-0)\hat{\mathbf{j}}+(0-a)\hat{\mathbf{k}}=a\hat{\mathbf{j}}-a\hat{\mathbf{k}}$$
$$\Rightarrow r_{75}=\sqrt{2}a$$

$$\vec{r}_{85}=\vec{r}_5-\vec{r}_8=(a-0)\hat{\mathbf{i}}+(a-0)\hat{\mathbf{j}}+(0-a)\hat{\mathbf{k}}=a\hat{\mathbf{i}}-a\hat{\mathbf{j}}-a\hat{\mathbf{k}}$$
$$\Rightarrow r_{85}=\sqrt{3}a$$

بنابراین نیروها به‌ترتیب چنین می‌شوند:

$$\vec{F}_{15}=k\frac{q^2}{(\sqrt{2}a)^3}(a\hat{\mathbf{i}}+a\hat{\mathbf{j}})$$

$$\vec{F}_{25}=k\frac{q^2}{(\sqrt{2}a)^3}(a\hat{\mathbf{i}}-a\hat{\mathbf{k}})$$

$$\vec{F}_{35}=k\frac{q^2}{a^3}(-a\hat{\mathbf{k}})$$

$$\vec{F}_{45}=k\frac{q^2}{a^3}(a\hat{\mathbf{i}})$$

$$\vec{F}_{65}=k\frac{q^2}{a^3}(a\hat{\mathbf{j}})$$

$$\vec{F}_{75}=k\frac{q^2}{(\sqrt{2}a)^3}(a\hat{\mathbf{i}}-a\hat{\mathbf{k}})$$

$$\vec{F}_{25}=k\frac{q^2}{(\sqrt{3}a)^3}(a\hat{\mathbf{i}}+a\hat{\mathbf{j}}-a\hat{\mathbf{k}})$$

و از آنجا $\vec{F}_5$ چنین می‌شود:

$$\vec{F}_5=kq^2$$

$$\left[\frac{(a\hat{\mathbf{i}}+a\hat{\mathbf{j}})}{(\sqrt{2}a)^3}+\frac{(a\hat{\mathbf{i}}-a\hat{\mathbf{k}})}{(\sqrt{2}a)^3}+\frac{(-a\hat{\mathbf{k}})}{a^3}+\frac{a\hat{\mathbf{i}}}{a^3}+\frac{a\hat{\mathbf{j}}}{a^3}+\frac{(a\hat{\mathbf{j}}-a\hat{\mathbf{k}})}{(\sqrt{2}a)^3}+\frac{(a\hat{\mathbf{i}}+a\hat{\mathbf{j}}-a\hat{\mathbf{k}})}{(\sqrt{3}a)^3}\right]$$

$$=kq^2\left[\frac{(2a\hat{\mathbf{i}}+2a\hat{\mathbf{j}}-2a\hat{\mathbf{k}})}{(\sqrt{2}a)^3}+\frac{(a\hat{\mathbf{i}}+a\hat{\mathbf{j}}-a\hat{\mathbf{k}})}{a^3}+\frac{(a\hat{\mathbf{i}}+a\hat{\mathbf{j}}-a\hat{\mathbf{k}})}{(\sqrt{3}a)^3}\right]$$

$$=\frac{kq^2}{a^3}\left[\frac{2(a\hat{\mathbf{i}}+a\hat{\mathbf{j}}-a\hat{\mathbf{k}})}{2.8}+\frac{(a\hat{\mathbf{i}}+a\hat{\mathbf{j}}-a\hat{\mathbf{k}})}{1}+\frac{(a\hat{\mathbf{i}}+a\hat{\mathbf{j}}-a\hat{\mathbf{k}})}{5.2}\right]$$

$$=\frac{kq^2}{a^3}\left[\frac{27.9(a\hat{\mathbf{i}}+a\hat{\mathbf{j}}-a\hat{\mathbf{k}})}{14.7}\right]$$

$$=\frac{kq^2}{a^3}\left[1.90(a\hat{\mathbf{i}}+a\hat{\mathbf{j}}-a\hat{\mathbf{k}})\right]=1.90\left(\frac{kq^2}{a^2}\right)(\hat{\mathbf{i}}+\hat{\mathbf{j}}-\hat{\mathbf{k}})$$

و از آنجا بزرگی $\vec{F}_5$ به‌دست می‌آید

$$\vec{F}_5=\sqrt{3}\,\frac{1.90\,q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2}=\frac{0.262q^2}{\varepsilon_0 a^2}$$

Scanned by CamScanner

بخش ۲۱-۳ بار پایسته است

●۳۶ الکترون‌ها و پوزیترون‌ها توسط تبدیل‌های هسته‌ای پروتون‌ها و نوترون‌ها ایجاد می‌شوند که به *واپاشی بتا* معروف‌اند. (الف) با تبدیل یک پروتون به یک نوترون، آیا یک الکترون یا یک پوزیترون ایجاد می‌شود؟ (ب) با تبدیل یک نوترون به یک پروتون، آیا یک الکترون یا یک پوزیترون ایجاد می‌شود؟

حل (الف) بار اولیه مثبت است و برای آنکه پایستگی بار برقرار بماند باید یک پوزیترون که دارای بار مثبت است، گسیل شود.

(ب) در این حالت، بار اولیه برابر صفر است و بنابراین برای این‌که پس از واپاشی، پایستگی بار برقرار بماند باید یک الکترون که دارای بار منفی است گسیل شود تا مجموع بار آن و پروتون برابر صفر شود.

●۳۷ X را با استفاده از پیوست ج در واکنش‌های زیر تعیین کنید:

(الف) $^{1}H+{}^{9}Be\rightarrow X+n$

(ب) $^{12}C+H^{1}\rightarrow X$

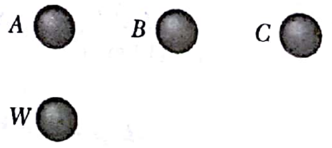
(پ) $^{15}N+{}^{1}H\rightarrow {}^{4}He+X$

حل (الف) ^{1}H دارای یک پروتون و یک الکترون، و بدون نوترون است. ^{9}Be دارای ۴ پروتون، ۴ الکترون، و ۵=۴−۹ نوترون است. بنابراین X باید دارای ۵=۴+۱ پروتون، ۵=۴+۱ الکترون، و ۴=۱−۵+۰ نوترون باشد. یک نوترون در واکنش آزاد شده است. پس X باید بورون ^{9}Be باشد.

(ب) ^{12}C دارای ۶ پروتون، ۶ الکترون، و ۶=۶−۱۲ نوترون و ^{1}H دارای یک پروتون و یک الکترون و بدون نوترون است. ^{4}He دارای ۲ پروتون، ۲ الکترون، و ۲=۲−۴ نوترون است؛ بنابراین X دارای ۶=۲−۱+۷ پروتون، ۶ الکترون، و ۶=۲−۰+۸ نوترون است. پس X باید کربن ^{12}C باشد.

مسئله‌های تکمیلی

۳۸ GO شکل ۲۱-۳۷ چهار کره‌ی رسانای مشابه را نشان می‌دهد که در واقع به فاصله‌ی دوری از هم قرار دارند. کره‌ی W (با بار اولیه‌ی صفر) به کره‌ی A تماس داده می‌شود و سپس از آن جدا می‌گردد. آنگاه، کره‌ی W به کره‌ی B (با بار اولیه‌ی $-۳۲e$) تماس داده می‌شود و سپس از آن جدا می‌گردد. سرانجام، کره‌ی W به کره‌ی C (با بار اولیه‌ی $+۴۸e$) تماس داده می‌شود، و سپس از آن جدا می‌گردد. بار نهایی روی کره‌ی W برابر با $+۱۸e$ است. بار اولیه‌ی کره‌ی A چقدر بوده است؟



شکل ۲۱-۳۷ مسئله‌ی ۳۸

حل بر اثر تماس اول، هم کره‌ی W و هم کره‌ی A به بار $q_A/۲$ می‌رسند، که q_A بار اولیه‌ی کره‌ی A است. بر اثر تماس دوم، کره‌ی W به بار زیر می‌رسد

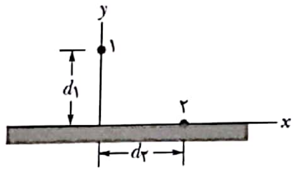
$$\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲}q_A-۳۲e\right)$$

بر اثر تماس نهایی، کره‌ی W اکنون دارای باری برابر با

$$\frac{۱}{۲}\left[\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲}q_A-۳۲e\right)+۴۸e\right]$$

است. طبق راهنمایی مسئله، این عبارت نهایی را برابر با $+۱۸e$ قرار می‌دهیم و از آنجا به $q_A=+۱۶e$ می‌رسیم.

۳۹ در شکل ۲۱-۳۸، ذره‌ی ۱ با بار $+۴e$ به فاصله‌ی $d_۱=۲{,}۰\,mm$ بالای سطح افقی و ذره‌ی ۲ با بار $+۶e$ به فاصله‌ی افقی $d_۲=۶{,}۰\,mm$ از ذره‌ی ۱ قرار گرفته است. مؤلفه‌ی x نیروی الکتروستاتیکی وارد بر ذره‌ی ۲ از سوی ذره‌ی ۱ چقدر است؟



شکل ۲۱-۳۸ مسئله‌ی ۳۹

حل اگر θ زاویه‌ی میان نیرو و محور x باشد، خواهیم داشت:

$$\cos\theta=\frac{d_۲}{\sqrt{d_۱^۲+d_۲^۲}}$$

بنابراین، با استفاده از قانون کولن برای F، مؤلفه‌ی x نیرو چنین می‌شود:

$$F_x=F\cos\theta=\frac{q_۱q_۲}{۴\pi\varepsilon_۰(d_۱^۲+d_۲^۲)}\frac{d_۲}{\sqrt{d_۱^۲+d_۲^۲}}$$

$$=۱{,}۳۱\times۱۰^{-۲۲}N$$

۴۰ در شکل ۲۱-۲۳، ذره‌های ۱ و ۲ در جای خود ثابت شده‌اند، ولی ذره‌ی ۳ می‌تواند حرکت کند. اگر نیروی الکتروستاتیکی خالص وارد بر ذره‌ی ۳ از سوی ذره‌های ۱ و ۲ برابر صفر و $L_{۲۳}=۲{,}۰۰L_{۱۲}$ باشد، نسبت $q_۱/q_۲$ چقدر است؟

حل توجه کنید برای آنکه نیروی الکتروستاتیکی خالص وارد بر $q_۳$ برابر با صفر باشد، باید یکی از نیروهای حاصل از بارهای $q_۱$ و $q_۲$، دافعه و دیگری جاذبه باشد. بنابراین، $q_۱$ و $q_۲$ دارای بارهای مخالفند. برای آنکه این نیروها همدیگر را خنثی کنند، بایستی داشته باشیم

$$k\frac{|q_۱||q_۳|}{(L_{۱۲}+L_{۲۳})^۲}=k\frac{|q_۲||q_۳|}{(L_{۲۳})^۲}$$

که به‌ازای $L_{۲۳}=۲{,}۰۰L_{۱۲}$، رابطه‌ی بالا به $|q_۱|/۹=|q_۲|/۴$ می‌انجامد. بنابراین $q_۱=-۹q_۲/۴$ و یا $q_۱/q_۲=-۲{,}۲۵$ می‌شود.

۴۱ (الف) چه بارهای مثبت یکسانی باید روی کره زمین و کره ماه قرار داده شوند تا جاذبه‌ی گرانشی بین آنها را خنثی کند؟ (ب) چرا در حلّ این

Scanned by CamScanner

مسئله نیازی به دانستن فاصله‌ی ماه از زمین ندارید؟ (پ) چند کیلوگرم یون هیدروژن (یعنی، پروتون) لازم است تا بار مثبت محاسبه شده در قسمت (الف) تهیه شود؟

حل (الف) بزرگی نیروهای گرانشی و الکتریکی را باید با هم برابر قرار دهیم:

$$\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_\circ}\frac{q^۲}{r^۲}=G\frac{mM}{r^۲}$$

که q بار روی هر کدام و r فاصله‌ی جدایی مرکز به مرکز زمین و ماه، M جرم کره زمین و m جرم کره ماه است. با حل آن برای q خواهیم داشت:

$$q=\sqrt{۴\pi\varepsilon_\circ GmM}=\sqrt{GmM/k}$$

از پیوست پ کتاب مبانی فیزیک می‌دانیم که $M=۵/۹۸\times۱۰^{۲۴}\,\text{kg}$ و $m=۷/۳۶\times۱۰^{۲۲}\,\text{kg}$ است. بنابراین q چنین می‌شود:

$$q=\sqrt{\frac{(۶/۶۷\times۱۰^{-۱۱}\,\text{N}\cdot\text{m}^۲/\text{kg}^۲)(۷/۳۶\times۱۰^{۲۲}\,\text{kg})(۵/۹۸\times۱۰^{۲۴}\,\text{kg})}{۸/۹۹\times۱۰^۹\,\text{N}\cdot\text{m}^۲/\text{C}^۲}}$$

$$=۵/۷\times۱۰^{۱۳}\,\text{C}$$

(ب) چون هم نیروی الکتریکی و هم نیروی گرانشی متناسب با $۱/r^۲$ هستند، فاصله‌ی r حذف می‌شود.

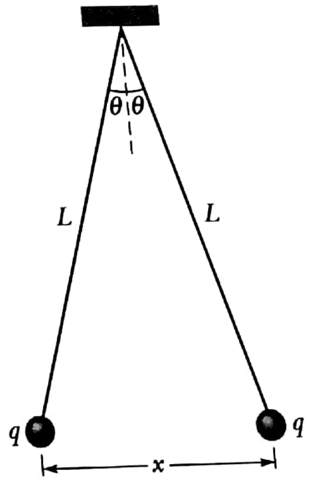
(پ) بار روی یک یون هیدروژن برابر با $e=۱/۶۰\times۱۰^{-۱۹}\,\text{C}$ است. بنابراین، تعداد یون‌ها برابر می‌شود با

$$\frac{q}{e}=\frac{۵/۷\times۱۰^{۱۳}\,\text{C}}{۱/۶\times۱۰^{-۱۹}\,\text{C}}=۳/۶\times۱۰^{۳۲}\ \text{یون}$$

جرم هر یون برابر با $۱/۶۷\times۱۰^{-۲۷}\,\text{kg}$ است و بنابراین جرم کلّ مورد نیاز عبارت است از:

$$(۳/۶\times۱۰^{۳۲})(۱/۶۷\times۱۰^{-۲۷}\,\text{kg})=۶/۰\times۱۰^۵\,\text{kg}$$

۴۲ در شکل ۲۱-۳۹، دو گوی رسانای کوچک با جرم یکسان m و بار یکسان q از نخ‌های نارسانایی به طول L آویخته شده‌اند. فرض کنید θ به حدّی کوچک است که $\tan\theta$ را می‌توان با مقدار تقریبی آن، $\sin\theta$، جایگزین کرد. (الف) نشان دهید

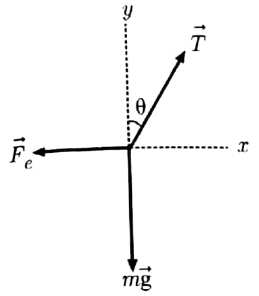


شکل ۲۱-۳۹ مسئله‌های ۴۲ و ۴۳

$$x=\left(\frac{q^۲L}{۲\pi\varepsilon_\circ mg}\right)^{\frac{۱}{۳}}$$

فاصله‌ی جدایی گوی‌ها را در وضعیت تعادل به‌دست می‌دهد. (ب) اگر $L=۱۲۰\,\text{cm}$، $m=۱۰\,\text{g}$ و $x=۵/۰\,\text{cm}$ باشد، $|q|$ چقدر است؟

حل (الف) نمودار جسم ـ آزاد برای گلوله‌ی سمت چپ در پایین رسم شده است که در آن $m\vec{g}$ نیروی گرانشی رو به پایین وارد بر گلوله، $\vec{F}_e$ نیروی الکتریکی رو به سمت چپ وارد از گلوله‌ی دیگر، و $\vec{T}$ کشش نخ است.



شرط تعادل گلوله در دو راستای افقی و قائم، با استفاده از قانون دوم نیوتون، به‌ترتیب چنین به‌دست می‌دهد

$$T\cos\theta-mg=\circ\quad\Rightarrow\quad T\cos\theta=mg$$

$$T\sin\theta-F_e=\circ\quad\Rightarrow\quad T\sin\theta=F_e$$

از تقسیم دو معادله‌ی بالا، T را حذف می‌کنیم و به رابطه‌ی زیر می‌رسیم

$$\tan\theta=\frac{F_e}{mg}=\frac{q^۲/۴\pi\varepsilon_\circ x^۲}{mg}$$

چون زاویه‌ی θ، طبق فرض بسیار کوچک است و آن را می‌توانیم برابر $\sin\theta$ قرار دهیم، از شکل مسئله درمی‌یابیم

$$\tan\theta\approx\sin\theta=\frac{x/۲}{L}$$

با قراردادن این نتیجه در معادله‌ی اول، به رابطه‌ی زیر می‌رسیم

$$\frac{mgx}{۲L}\approx\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_\circ}\frac{q^۲}{x^۲}$$

و از آنجا x چنین می‌شود

$$x=\left(\frac{q^۲L}{۲\pi\varepsilon_\circ mg}\right)^{۱/۳}$$

(ب) $x^۳=۲kq^۲L/mg$ را برای بار q حل می‌کنیم

$$q=\sqrt{\frac{mgx^۳}{۲kL}}$$

$$=\sqrt{\frac{(۰/۰۱۰\,\text{kg})(۹/۸\,\text{m/s}^۲)(۰/۰۵۰\,\text{m})^۳}{۲(۸/۹۹\times۱۰^۹\,\text{N}\cdot\text{m}^۲/\text{C}^۲)(۱/۲۰\,\text{m})}}=\pm۲/۴\times۱۰^{-۸}\,\text{C}$$

بنابراین $|q|=۲/۴\times۱۰^{-۸}\,\text{C}$ می‌شود.

Scanned by CamScanner

۴۳ (الف) توضیح دهید اگر یکی از گوی‌های مسئله ۴۲ تخلیه شود (بار خود را، مثلاً از طریق زمین از دست دهد) برای گوی‌ها چه رخ می‌دهد. (ب) فاصله‌ی تعادل جدید x را، با استفاده از مقادیر معین L و m و مقدار محاسبه شده‌ی $|q|$، به‌دست آورید.

حل (الف) وقتی یکی از دو گوی تخلیه شود، دیگر هیچ دافعه‌ای میان دو گوی نخواهیم داشت و هر دو گوی به‌هم می‌چسبند. چون هر دو گوی مشابه هستند، بار q بین آنها تقسیم می‌شود و چون حالا باز هر دو دارای بار هم‌علامتی شده‌اند از هم فاصله می‌گیرند. بدیهی است که در این حالت، فاصله‌ی دو بار به دلیل بار کمترشان، کمتر از سابق خواهد بود.

(ب) در رابطه‌ی x به‌دست آمده در قسمت الف مسئله به جای q مقدار $q'=q/2$ را قرار می‌دهیم و از آنجا خواهیم داشت

$$x' \approx \left[\frac{(q/2)^2 L}{2\pi\varepsilon_0 mg}\right]^{1/3} = \left(\frac{1}{4}\right)^{1/3} x = \left(\frac{1}{4}\right)^{1/3}(5.0\,\mathrm{cm}) = 3.1\,\mathrm{cm}$$

۴۴ دو پروتون باید در چه فاصله‌ای از هم قرار گیرند تا بزرگی نیروی الکتروستاتیکی وارد بر هر کدام از سوی دیگری برابر با بزرگی نیروی گرانشی وارد بر یک پروتون در سطح کره زمین شود؟

حل $kq_p^2/r^2 = mg$ قرار می‌دهیم و از آنجا چنین به‌دست می‌آوریم:

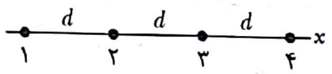
$$r = qe\sqrt{\frac{k}{mg}} = (1.60\times10^{-19}\,\mathrm{C})\sqrt{\frac{8.99\times10^{9}\,\mathrm{N\cdot m^2/C^2}}{(1.67\times10^{-27}\,\mathrm{kg})(9.80\,\mathrm{m/s^2})}} = 0.119\,\mathrm{m}$$

۴۵ چند مگاکولن بار مثبت در ۱٫۰۰ مول گاز هیدروژن مولکولی خنثی (H_2) وجود دارد؟

حل هر مولکول ^2H دارای دو پروتون (هر یک به بار $q=+e$) است. چون یک مول گاز داریم، تعداد اتم‌ها برابر با عدد آووگادرو می‌شود و داریم:

$$Q = N_A Ze = (6.02\times10^{23})(2)(1.60\times10^{-19}\,\mathrm{C}) = 1.92\times10^{5}\,\mathrm{C} = 0.19\,\mathrm{MC}$$

۴۶ در شکل ۲۱-۴۰، چهار ذره روی محور x، با فاصله‌ی $d = 2.00\,\mathrm{cm}$، ثابت شده‌اند. بارها عبارت‌اند از $q_1 = +2e$، $q_2 = -e$، $q_3 = +e$، و $q_4 = +4e$، با $e = 1.60\times10^{-19}\,\mathrm{C}$. برحسب نمادگذاری بردارهای یکه، نیروی الکتروستاتیکی خالص وارد بر (الف) ذره‌ی ۱ و (ب) ذره‌ی ۲ از سوی ذره‌های دیگر چگونه است؟



شکل ۲۱-۴۰ مسئله‌ی ۴۶

حل $\vec{F}_{12}$ را نیروی وارد بر q_1 توسط q_2 و F_{12} را بزرگی آن در نظر بگیرید.

(الف) نیروی خالص وارد بر q_1 مورد نظر است. چون q_1 به‌سمت q_2 جذب می‌شود، سوی نیروی $\vec{F}_{12}$ در جهت $+x$ است. همچنین چون q_1 توسط q_3 و q_4 دفع می‌شود، سوی $\vec{F}_{13}$ و $\vec{F}_{14}$ هر دو در جهت $-x$ است. بنابراین، با استفاده از $d = 0.0200\,\mathrm{m}$، بزرگی نیروی خالص وارد بر q_1 چنین می‌شود:

$$F_1 = F_{12} - F_{13} - F_{14} = \frac{2e|-e|}{4\pi\varepsilon_0 d^2} - \frac{(2e)(e)}{4\pi\varepsilon_0 (2d)^2} - \frac{(2e)(4e)}{4\pi\varepsilon_0 (3d)^2} = +3.52\times10^{-25}\,\mathrm{N}$$

که به‌صورت نمادگذاری برداری $\vec{F}_1 = (3.52\times10^{-25}\,\mathrm{N})\hat{\mathrm{i}}$ می‌شود.

(ب) حال می‌خواهیم نیروی خالص وارد بر q_2 را بررسی کنیم. توجه کنید که $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ در جهت $-x$، و $\vec{F}_{23}$ و $\vec{F}_{24}$ هر دو در جهت $+x$ هستند. بنابراین نیروی خالص وارد بر q_2 چنین می‌شود:

$$F_2 = F_{23} + F_{24} - F_{21} = \frac{4e|-e|}{4\pi\varepsilon_0 (2d)^2} + \frac{e|-e|}{4\pi\varepsilon_0 d^2} - \frac{2e|-e|}{4\pi\varepsilon_0 d^2} = 0$$

۴۷ (GO) بارهای نقطه‌ای $+6.0\,\mu\mathrm{C}$ و $-4.0\,\mu\mathrm{C}$ روی محور x، به ترتیب در $x = 8.0\,\mathrm{m}$ و $x = 16\,\mathrm{m}$ ثابت شده‌اند. چه باری باید در $x = 24\,\mathrm{m}$ قرار داده شود تا به هر بار واقع در مبدأ هیچ نیروی الکتروستاتیکی خالصی وارد نشود؟

حل دنبال بار q یی می‌گردیم که وقتی در مبدأ قرار گیرد نیروی خالص وارد بر آن F_{net} شود که F_{net} به این قرار است:

$$\vec{F}_{\mathrm{net}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

بزرگی این نیروهای مجزا توسط قانون کولن به‌دست می‌آید و بی‌آنکه از عمومیت مسئله کاسته شود فرض می‌کنیم $q > 0$ است. بارهای $q_1(=+6.0\,\mu\mathrm{C})$ و $q_2(=-4.0\,\mu\mathrm{C})$، q_3 (مجهول)، روی محور $+x$ قرار گرفته‌اند و در نتیجه سوی $\vec{F}_1$ به سمت $-x$، سوی $\vec{F}_2$ به سمت $+x$ و سوی $\vec{F}_3$ بسته به اینکه $q_3 > 0$ یا $q_3 < 0$ باشد، به‌ترتیب رو به سوی $-x$ و یا $+x$ می‌شود. بنابراین، به‌ازای $r_1 = 8.0\,\mathrm{m}$، $r_2 = 16\,\mathrm{m}$، و $r_3 = 24\,\mathrm{m}$، داریم

$$0 = -k\frac{q_1 q}{r_1^2} + k\frac{|q_2| q}{r_2^2} - k\frac{q_3 q}{r_3^2}$$

و یا

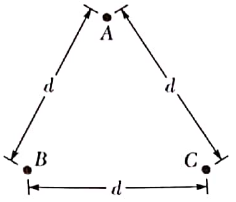
$$0 = -\frac{6.0}{8.0^2} + \frac{4.0}{16^2} - \frac{q_3}{24^2}$$

که q_3 برحسب $\mu\mathrm{C}$ است. از آنجا $q_3 = -45\,\mu\mathrm{C}$ به‌دست می‌آید.

۴۸ در شکل ۲۱-۴۱، سه کره‌ی رسانای مشابه تشکیل مثلث متساوی‌الاضلاعی به طول $d = 20.0\,\mathrm{cm}$ را داده‌اند. شعاع کره‌ها کوچکتر از d است و بار کره‌ها عبارت‌اند از $q_A = -2.00\,\mathrm{nC}$،

Scanned by CamScanner

$q_B=-۴٫۰۰\,\mathrm{nC}$، و $q_C=+۸٫۰۰\,\mathrm{nC}$. (الف) بزرگی نیروی الکتروستاتیکی میان کره‌های A و C چقدر است؟ حال مراحل زیر را در پی هم انجام می‌دهیم: A و B را با سیم نازکی به هم وصل می‌کنیم و سپس اتصال را برمی‌داریم؛ B را با سیمی به زمین وصل می‌کنیم و سپس اتصال را برمی‌داریم؛ B و C را با سیمی به هم وصل می‌کنیم و سپس اتصال را برمی‌داریم. اکنون بزرگی نیروی الکتروستاتیکی میان (ب) کره‌های A و C و (پ) کره‌های B و C چقدر است؟



شکل ۲۱-۴۱ مسئله‌ی ۴۸

حل (الف) چون $q_A=-۲٫۰۰\,\mathrm{nC}$ و $q_C=+۸٫۰۰\,\mathrm{nC}$ است، قانون کولن چنین به‌دست می‌دهد:

$$|\vec F_{AC}|=\frac{|q_Aq_C|}{۴\pi\varepsilon_۰ d^۲}=\frac{(۸٫۹۹\times۱۰^۹\,\mathrm{N\cdot m^۲/C^۲})\left|(-۲٫۰۰\times۱۰^{-۹}\,\mathrm{C})(۸٫۰۰\times۱۰^{-۹}\,\mathrm{C})\right|}{(۰٫۲۰۰\,\mathrm{m})^۲}=۳٫۶۰\times۱۰^{-۶}\,\mathrm{N}$$

(ب) چون کره‌ها مشابه‌اند، پس از اتصال کره‌های A و B، بار این کره‌ها برابر مقدار زیر می‌شود:

$$\frac{q_A+q_B}{۲}=\left(\frac{-۲٫۰۰+(-۴٫۰۰)}{۲}\right)\mathrm{nC}=-۳٫۰۰\,\mathrm{nC}$$

پس از آنکه اتصال A و B را قطع و B را به زمین وصل می‌کنیم، بار این کره تخلیه می‌شود. سپس با اتصال B با C، بار هر کدام از این کره‌ها نصف بار اولیه‌ی کره‌ی C می‌شود: $Q_B=Q_C=-۴٫۰۰\,\mathrm{nC}$. بنابراین، اکنون داریم:

$$|\vec F_{AC}|=\frac{|q_Aq_C|}{۴\pi\varepsilon_۰ d^۲}=\frac{(۸٫۹۹\times۱۰^۹\,\mathrm{N\cdot m^۲/C^۲})\left|(-۳٫۰۰\times۱۰^{-۹}\,\mathrm{C})(-۴٫۰۰\times۱۰^{-۹}\,\mathrm{C})\right|}{(۰٫۲۰۰\,\mathrm{m})^۲}=۲٫۷۰\times۱۰^{-۶}\,\mathrm{N}$$

(پ) همچنین داریم

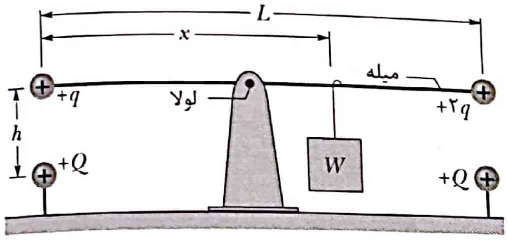
$$|\vec F_{BC}|=\frac{|q_Bq_C|}{۴\pi\varepsilon_۰ d^۲}=\frac{(۸٫۹۹\times۱۰^۹\,\mathrm{N\cdot m^۲/C^۲})\left|(-۴٫۰۰\times۱۰^{-۹}\,\mathrm{C})(-۴٫۰۰\times۱۰^{-۹}\,\mathrm{C})\right|}{(۰٫۲۰۰\,\mathrm{m})^۲}=۳٫۶۰\times۱۰^{-۶}\,\mathrm{N}$$

۴۹ هر نوترون شامل یک کوارک "بالا" با بار $+۲e/۳$ و دو کوارک "پایین" هر یک با بار $-e/۳$ است. اگر فرض کنیم فاصله‌ی بین کوارک‌های پایین در داخل نوترون برابر با $۲٫۶\times۱۰^{-۱۵}\,\mathrm{m}$ باشد، بزرگی نیروی الکتروستاتیکی میان آنها چقدر است؟

حل قانون کولن چنین به‌دست می‌دهد:

$$F=\frac{|q||q|}{۴\pi\varepsilon_۰ r^۲}=\frac{k(e/۳)^۲}{r^۲}=\frac{(۸٫۹۹\times۱۰^۹\,\mathrm{N\cdot m^۲/C^۲})(۱٫۶۰\times۱۰^{-۱۹}\,\mathrm{C})^۲}{۹(۲٫۶\times۱۰^{-۱۵}\,\mathrm{m})^۲}=۳٫۸\,\mathrm{N}$$

۵۰ شکل ۲۱-۴۲ یک میله‌ی نارسانای بدون جرمِ بلند به طول L را نشان می‌دهد که در مرکزش لولا شده و با قطعه‌ای به وزن W در فاصله‌ی x از انتهای چپ میله به توازن رسیده است. در دو انتهای چپ و راست میله کره‌های رسانای کوچکی متصل شده‌اند که به‌ترتیب دارای بار q و $۲q$ هستند. کره‌هایی با بار مثبت Q در فاصله‌ی h مستقیماً زیر این دو کره محکم شده‌اند. (الف) وقتی میله افقی و در توازن است، فاصله‌ی x چقدر است؟ (ب) h باید چه مقداری داشته باشد تا وقتی میله افقی و در توازن است هیچ نیروی قائمی به محلّ لولا وارد نشود؟



شکل ۲۱-۴۲ مسئله‌ی ۵۰

حل (الف) اگر نیروی دافعه‌ی وارد از Q بر q را با $F_۱$ و نیروی دافعه‌ی وارد از Q بر $۲q$ را با $F_۲$ نمایش دهیم، آنگاه از شرط تعادل چرخشی حول تکیه‌گاه خواهیم داشت:

$$-F_۱\frac{L}{۲}-W\left(x-\frac{L}{۲}\right)+F_۲\frac{L}{۲}=۰$$

یا

$$-k\frac{qQ}{h^۲}\frac{L}{۲}-W\left(x-\frac{L}{۲}\right)+k\frac{۲Qq}{h^۲}\frac{L}{۲}=۰$$

حلّ آن برای x (با $k=۱/۴\pi\varepsilon_۰$) چنین به‌دست می‌دهد:

$$x=\frac{L}{۲}\left(۱+\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{qQ}{h^۲W}\right)$$

(ب) اگر F_N بزرگی نیروی رو به بالای حاصل از تکیه‌گاه باشد، شرط تعادل ایستایی چنین به‌دست می‌دهد:

$$W-\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{qQ}{h^۲}-\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{۲Qq}{h^۲}-F_N=۰$$

طبق فرض $F_N=۰$ است و از آنجا h چنین می‌شود:

$$h=\sqrt{\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{۳qQ}{W}}$$

۵۱ میله‌ی نارسانای بارداری، به طول $۲٫۰۰\,\mathrm{m}$ و سطح مقطع $۴٫۰۰\,\mathrm{cm^۲}$، طوری روی طرف مثبت یک محور x قرار دارد که یک سرش در مبدأ آن

Scanned by CamScanner

واقع است. چگالی حجمی بار ρ، بار بر واحد حجم، بر حسب کولن بر مترمکعب است. اگر ρ (الف) یکنواخت، با مقدار $-۴٫۰۰\mu C/m^۳$، و (ب) نایکنواخت با مقدار $\rho = bx^۲$ باشد که در آن $b=-۲٫۰۰\mu C/m^۵$ است، چه مقدار الکترون اضافی روی میله قرار دارد؟

حل بار dq داخل یک بخش کوچک (عنصر دیفرانسیلی) از میله (به ضخامت dx) برابر $\rho A dx$ است که در آن ρ چگالی حجمی بار (بار در واحد حجم) و $A=۴٫۰۰\times۱۰^{-۴}\,m^۲$ است. تعداد الکترون‌های (اضافی) در میله (به طول $L=۲٫۰۰m$) برابر $N=q/(-e)$ است که در آن e بار الکترون ($=۱٫۶۰\times۱۰^{-۱۹}C$) است.

(الف) در حالتی که $\rho=-۴٫۰۰\times۱۰^{-۶}C/m^۳$ است، داریم:

$$N=\frac{q}{-e}=\frac{\rho A}{-e}\int_۰^L dx=\frac{|\rho|AL}{e}$$
$$=\frac{(۴٫۰۰\times۱۰^{-۶}C/m^۳)(۴٫۰۰\times۱۰^{-۴}m^۲)(۲٫۰۰m)}{۱٫۶۰\times۱۰^{-۱۹}C}$$
$$=۲٫۰۰\times۱۰^{۱۰}$$

(ب) به‌ازای $\rho=bx^۲$ (با $b=-۲٫۰۰\times۱۰^{-۶}C/m^۵$)، N چنین می‌شود:

$$N=\frac{bA}{-e}\int_۰^L x^۲dx=\frac{|b|AL^۳}{۳e}$$
$$=\frac{(۲٫۰۰\times۱۰^{-۶}C/m^۵)(۴٫۰۰\times۱۰^{-۴}m^۲)(۲٫۰۰m)^۳}{۳(۱٫۶۰\times۱۰^{-۱۹}C)}$$
$$=۱٫۳۳\times۱۰^{۱۰}$$

۵۲ ذره‌ای با بار Q در مبداء یک دستگاه مختصات xy ثابت شده است. در لحظه‌ی $t=۰$ ذره‌ای $(q=۴٫۰۰\mu C, m=۰٫۸۰۰g)$ که روی محور x در $x=۲۰٫۰cm$ قرار دارد، با سرعت $۵۰٫۰m/s$ در جهت مثبت محور y حرکت می‌کند. به‌ازای چه مقداری از Q، ذره‌ی متحرک حرکت دایره‌ای انجام می‌دهد؟ (از نیروی گرانشی وارد بر ذره چشم‌پوشی کنید.)

حل برای آنکه نیروی کولنی موجب حرکت دایره‌ای به‌شعاع $r=۰٫۲۰۰m$ بشود، لازم است داشته باشیم:

$$\frac{|Q|q}{۴\pi\varepsilon_۰ r^۲}=m\frac{v^۲}{r}$$

که به‌ازای $q=۴٫۰۰\times۱۰^{-۶}C$، $m=۰٫۰۰۰۸۰۰kg$ و $u=۵۰٫۰m/s$ به $|Q|=۱٫۱۱\times۱۰^{-۵}C$ می‌انجامد. توجه کنید که باید نیروی بین Q و q جاذبه باشد و بنابراین $Q=-۱٫۱۱\times۱۰^{-۵}C$ است.

۵۳ بزرگی نیروی الکتروستاتیکی میان دو بار نقطه‌ای $۱٫۰۰C$ که به فاصله‌ی (الف) $۱٫۰۰m$ و (ب) $۱٫۰۰km$ از هم قرار دارند، چقدر می‌شد اگر چنین بارهای نقطه‌ای وجود می‌داشت (که ندارند) و چنین پیکربندی‌ای می‌توانست ایجاد شود.

حل (الف) با استفاده از قانون کولن، چنین به‌دست می‌آوریم:

$$F=\frac{q_۱q_۲}{۴\pi\varepsilon_۰ r^۲}=\frac{kq^۲}{r^۲}=\frac{(۸٫۹۹\times۱۰^۹N\cdot m^۲/C^۲)(۱٫۰۰C)^۲}{(۱٫۰۰m)^۲}$$
$$=۸٫۹۹\times۱۰^۹N$$

(ب) اگر $r=۱۰۰۰m$ باشد، خواهیم داشت:

$$F=\frac{q_۱q_۲}{۴\pi\varepsilon_۰ r^۲}=\frac{kq^۲}{r^۲}=\frac{(۸٫۹۹\times۱۰^۹N\cdot m^۲/C^۲)(۱٫۰۰C)^۲}{(۱٫۰۰\times۱۰^۳m)^۲}$$
$$=۸٫۹۹\times۱۰^۳N$$

۵۴ بار $۶٫۰\mu C$ باید به دو بخش تقسیم شود و سپس این بخش‌ها به فاصله‌ی $۳٫۰mm$ از هم قرار داده شوند. بیشینه‌ی مقدار ممکن نیروی الکتروستاتیکی میان این دو بخش چقدر می‌شود؟

حل $q_۱$ را بار یک بخش و $q_۲$ را بار بخش دیگر در نظر بگیرید. بنابراین $q_۱+q_۲=Q=۶٫۰\mu C$ است. نیروی دافعه‌ی میان آنها با قانون کولن داده می‌شود:

$$F=\frac{q_۱q_۲}{۴\pi\varepsilon_۰ r^۲}=\frac{q_۱(Q-q_۱)}{۴\pi\varepsilon_۰ r^۲}$$

برای بیشینه کردن این عبارت باید از آن از نسبت به $q_۱$ مشتق بگیریم و آن را برابر با صفر قرار دهیم

$$\frac{dF}{dq_۱}=\frac{Q-۲q_۱}{۴\pi\varepsilon_۰ r^۲}=۰\ \Rightarrow\ q_۱=Q/۲$$

که البته می‌شد آن را براساس تقارن هم حدس زد. بنابراین، همچنین $q_۲=Q/۲$ می‌شود و آنگاه به‌ازای $r=۰٫۰۰۳۰m$ و $Q=۶٫۰\times۱۰^{-۶}C$ خواهیم داشت:

$$F=\frac{(Q/۲)(Q/۲)}{۴\pi\varepsilon_۰ r^۲}=۹٫۰\times۱۰^۳N$$

۵۵ از بار Q روی یک کره کوچک، کسر α به کره دیگری در نزدیکی آن منتقل می‌شود. کره‌ها را می‌توان به‌صورت ذره در نظر گرفت. (الف) به‌ازای چه مقداری از α، بزرگی نیروی الکتروستاتیکی F بین این دو کره بیشینه می‌شود؟ آن مقدار (ب) کوچکتر و (پ) بزرگتر α که F را برابر با نصف مقدار بیشینه‌ی آن می‌کند، چقدر است؟

حل (الف) بدیهی است که بار کره‌ها به‌ترتیب $q=\alpha Q$ و $Q-q=(۱-\alpha)Q$ می‌شود (که α عددی بین صفر و ۱ است). آنگاه از قانون کولن خواهیم داشت:

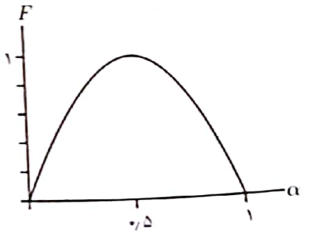
$$F=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{(\alpha Q)((۱-\alpha)Q)}{d^۲}=\frac{Q^۲\alpha(۱-\alpha)}{۴\pi\varepsilon_۰ d^۲}$$

از آنجا $dF/d\alpha$ را محاسبه کرده و برابر صفر قرار می‌دهیم تا F_{max} به‌دست آید

$$\frac{dF}{d\alpha}=۰\ \Rightarrow\ \alpha=\frac{۱}{۲}$$

و در نتیجه $F_{max}=Q^۲/۱۶\pi\varepsilon_۰ d^۲$ می‌شود. در اینجا خوب است نمودار F بر حسب α را نیز رسم کنیم، که در تحلیل قسمت‌های بعد مسئله به‌کار می‌آید.

Scanned by CamScanner



(ب) و (پ) همان‌طور که از نمودار بالا برمی‌آید، به‌ازای یک F معین به دو مقدار کمینه و بیشینه برای α می‌رسیم که این با رسم یک خطّ مستقیم روی نمودار حاصل می‌شود. از لحاظ محاسبه‌ی جبری، به‌ازای $F=F_{max}/2$ خواهیم داشت:

$$\alpha(1-\alpha)=\frac{1}{8} \Rightarrow \alpha^2-\alpha+\frac{1}{8}=0$$

که این معادله‌ی درجه دوم، دو ریشه‌ی $\alpha=0.146$ و $\alpha=0.853$ دارد که به‌ترتیب مقدار کمتر و بیشتر α هستند که به $F=F_{max}/2$ می‌انجامند.

۵۶ اگر گربه‌ای در هوایی خشک خود را مرتباً به لباس کتان شما مالش دهد، انتقال بار میان موهای گربه و لباس کتان می‌تواند بار اضافی $-2.00\,\mu C$ را روی شما بر جای بگذارد. (الف) چه تعداد الکترون بین شما و گربه منتقل شده است؟

بار روی شما به‌تدریج از طریق کف زمین تخلیه می‌شود، ولی اگر به جای اینکه منتظر تخلیه‌ی بار بمانید، بی‌درنگ به سوی یک شیر آب بروید، ممکن است وقتی انگشتان خود را نزدیک شیر آب می‌برید ناگهان با یک جرقه‌ی دردناک مواجه شوید. (ب) در حین این جرقه، آیا الکترون‌ها از طرف شما به سمت شیر آب می‌روند یا برعکس؟ (پ) درست پیش از آنکه جرقه زده شود، آیا شما بار مثبت در شیر آب القا می‌کنید یا بار منفی؟ (ت) اگر، به جای شما، گربه پنجه‌هایش را به شیر آب برساند، الکترون‌ها در جرقه‌ی حاصل در کدام مسیر حرکت می‌کنند؟ (ث) اگر در یک هوای خشک، گربه‌ای را با دست لخت نوازش دهید، باید مراقب باشید که انگشتان خود را نزدیک بینی گربه نبرید، چرا که در آن صورت او را با جرقه‌ای آزار می‌دهید. با توجه به اینکه موهای گربه عایق است، توضیح دهید که این جرقه چطور ممکن است ظاهر شود؟

حل

(الف) معادله‌ی ۲۱-۱۱ چنین به‌دست می‌دهد

$$n=\frac{|q|}{e}=\frac{2.00\times10^{-6}\,C}{1.60\times10^{-19}\,C}=1.25\times10^{13}\ \text{الکترون}$$

(ب) چون شما الکترون اضافی دارید (و الکترون‌ها سبک‌تر و متحرک‌تر از پروتون‌ها هستند)، الکترون‌ها از شما به شیر آب (به جای پروتون‌ها از شیر آب به‌سوی شما) منتقل می‌شوند و بدین ترتیب بدن شما از لحاظ باری خنثی می‌شود.

(پ) بارهای مخالف همدیگر را جذب می‌کنند و شیر آب (که به زمین متصل است و می‌تواند هر تعداد الکترون را بر اثر تماس با منبع عظیم بارهای متحرک زمین به‌دست آورده یا از دست دهد) باردار مثبت می‌شود، به‌خصوص در ناحیه‌ای که در نزدیک‌ترین فاصله به دست (باردار شده‌ی منفی) شما، درست پیش از ایجاد جرقه است.

(ت) گربه پیش از ایجاد جرقه، باردار مثبت شده است و با همان استدلال بخش (ب) نتیجه می‌گیریم که شارش بار (الکترون‌ها) از شیر آب به‌سوی گربه است.

(ث) بینی گربه را یک کره‌ی رسانا فرض کنید؛ در نتیجه آن طرفی از این کره که در نزدیک‌ترین فاصله به موی گربه است دارای علامت بار مخالف با آن طرفی است که در دورترین فاصله از موی گربه قرار دارد و بار این طرف نیز خود مخالف با بار دستان لخت شما پس از نوازش گربه است. بنابراین، بارهای روی دست شما و طرف دورتر این کره‌ی رسانا همدیگر را جذب می‌کنند، ووقتی که به‌حد کافی نزدیک شدند، بر اثر پرش الکترون‌ها، با یک جرقه‌ی دردناک همدیگر را خنثی می‌کنند.

تبصره.

۱. توجه کنید که جرقه به دلیل پرش الکترون‌ها در میدان الکتریکی بزرگ ایجاد می‌شوند که در فاصله‌ی ناچیزی ایجاد شده است. با پرش الکترون‌ها، هوا یونیده می‌شود و این باعث می‌گردد الکترون‌های بیشتری جهش کنند و این بهمنی ایجاد می‌کند که همان جرقه است.

۲. یک نمایش بسیار جالب از بروز جرقه‌ی الکتریکی در کلاس درس را د[ر] آدرس زیر مشاهده کنید:

www.organic-chemistry.com/videos-professor-beats-students-%5BP4XZ-hMHuc%5D.cfm

۵۷ می‌دانیم بار منفی الکترون و بار مثبت پروتون با هم برابرند ولی فرض کنید مقدار آنها به اندازه‌ی ۰٫۰۰۰۰۱۰٪ با هم متفاوت باشد. د[و] سکه‌ی مسی که به فاصله‌ی $1.0\,m$ از هم قرار گرفته‌اند، با چه نیروی[ی] همدیگر را دفع می‌کنند؟ فرض کنید که هر سکه دارای 3×10^{22} ات[م] مس باشد. (*راهنمایی:* یک اتم مس خنثی دارای ۲۹ پروتون و ۲۹ الکترو[ن] است.) از اینجا چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

حل

طبق فرض داریم

$$q_p-|q_e|=0.00000010$$

یک اتم مس ۲۹ پروتون دارد و اگر از نظر الکتریکی خنثی باشد ۲۹ الکترون نیز دارد. بزرگی بار q برابر است با NZe که در آن N تعد[اد] اتم‌های سکه است. برای پیدا کردن N، تعداد مول‌های مس سکه را د[ر] تعداد اتم‌های یک مول (عدد آووگادرو، $N_A=6.0\times10^{23}$ اتم/mol) ضرب می‌کنیم. تعداد مول‌های مس در سکه m/M است که M جر[م] مولی مس برابر $63.5\,g/mol$ است. پس داریم

$$N=N_A\frac{m}{M}=(6.02\times10^{23}\ \text{اتم}/mol)\frac{3.11\,g}{63.5\,g/mol}=2.95\times10^{23}\ \text{اتم}$$

بنابراین بزرگی بار مثبت یا منفی کلّ سکه چنین می‌شود:

$$q=NZe=(2.95\times10^{22})(29)(1.60\times10^{-19}\,C)=137000\,C$$

در نتیجه برای $q_p-|q_e|$ خواهیم داشت:

$$q_p-|q_e|=(137000)(0.00000010)=0.137\,C$$

Scanned by CamScanner

دو سکه در فاصله‌ی $r=۱٫۰\,\mathrm{m}$ قرار دارند و بنابراین با نیروی زیر همدیگر را دفع می‌کنند:

$$F=k\frac{(\Delta q)^۲}{r^۲}=(۸٫۹۹\times۱۰^۹\,\mathrm{N\cdot m^۲/C^۲})\frac{(۰٫۱۳۷\mathrm{C})^۲}{(۱٫۰\mathrm{m})^۲}$$

$$=۱٫۷\times۱۰^۸\,\mathrm{N}$$

توجه! **به مقدار بزرگ این نیرو توجه کنید.**

۵۸ در شکل ۲۱-۲۶ ذره‌ی ۱ با بار $-۸۰٫۰\mu\mathrm{C}$ و ذره‌ی ۲ با بار $+۴۰٫۰\mu\mathrm{C}$ در فاصله‌ی $L=۱۵٫۰\mathrm{cm}$ روی محور x ثابت نگه داشته شده‌اند. برحسب نمادگذاری بردارهای یکه، نیروی الکتروستاتیکی خالص وارد بر ذره‌ی ۳، با بار $q_۳=۲۰٫۰\mu\mathrm{C}$ چگونه است، در صورتی که ذره‌ی ۳ در (الف) $x=۴۰٫۰\mathrm{cm}$ و (ب) $x=۸۰٫۰\mathrm{cm}$ واقع شده باشد؟ اگر نیروی الکتروستاتیکی خالص وارد بر ذره‌ی ۳ از سوی ذره‌های ۱ و ۲ برابر صفر باشد، مختصه‌ی (پ) x و (ت) y ذره‌ی ۳ باید چقدر باشد؟

حل بار $q_۱=-۸۰\times۱۰^{-۶}\mathrm{C}$ در مبدأ، و بار $q_۲=+۴۰\times۱۰^{-۶}\mathrm{C}$ در $x=۰٫۲۰\mathrm{m}$ قرار دارد. نیروی وارد بر $q_۳=+۲۰\times۱۰^{-۶}\mathrm{C}$ حاصل از نیروهایی است که $q_۱$ و $q_۲$ بر آن وارد می‌کنند؛ این نیروها به‌ترتیب جاذبه و دافعه هستند. بنابراین $\vec{F}_{۳,\mathrm{net}}=\vec{F}_{۳۱}+\vec{F}_{۳۲}$ است که در آن

$$|\vec{F}_{۳۱}|=k\frac{q_۳|q_۱|}{r_{۳۱}^۲}\quad,\quad |\vec{F}_{۳۲}|=k\frac{q_۳q_۲}{r_{۳۲}^۲}$$

(الف) در این حالت $r_{۳۱}=۰٫۴۰\mathrm{m}$، $r_{۳۲}=۰٫۲۰\mathrm{m}$، $\vec{F}_{۳۱}$ در جهت $-x$ و $\vec{F}_{۳۲}$ در جهت $+x$ است. با قرار دادن $k=۸٫۹۹\times۱۰^۹\mathrm{N\cdot m^۲/C}$ به $\vec{F}_{۳,\mathrm{net}}=(۸۹٫۹\mathrm{N})\hat{\mathrm{i}}$ می‌رسیم.

(ب) در این حالت $r_{۳۱}=۰٫۸۰\mathrm{m}$ و $r_{۳۲}=۰٫۶۰\mathrm{m}$، $\vec{F}_{۳۱}$ در جهت $-x$ و $\vec{F}_{۳۲}$ در جهت $+x$ است. اکنون $\vec{F}_{۳,\mathrm{net}}=(-۲٫۵۰\mathrm{N})\hat{\mathrm{i}}$ می‌رسیم.

(پ) بین مکان‌هایی که در قسمت‌های (الف) و (ب) با آنها سروکار داشتیم، باید جایی باشد که در آن $\vec{F}_{۳,\mathrm{net}}=۰$ است. $r_{۳۱}=x$ و $r_{۳۲}=x-۰٫۲۰\mathrm{m}$ می‌نویسیم و $|\vec{F}_{۳۱}|$ را با $|\vec{F}_{۳۲}|$ برابر قرار می‌دهیم. از آنجا خواهیم داشت

$$\frac{|q_۱|}{x^۲}=\frac{q_۲}{(x-۰٫۲)^۲}$$

و یا

$$\frac{(x-۰٫۲)^۲}{x^۲}=\frac{q_۲}{|q_۱|}=\frac{۱}{۲}$$

از طرفین معادله‌ی بالا ریشه‌ی دوم می‌گیریم و از آنجا به‌ازای ریشه‌ی مثبت به $x=۰٫۶۸۳\mathrm{m}$ می‌رسیم.

(ت) از بالا درمی‌یابیم که $y=۰$ می‌شود.

۵۹ بار کلّ $۷۵٫۰\mathrm{kg}$ الکترون بر حسب کولن چقدر است؟

حل جرم یک الکترون $m=۹٫۱۱\times۱۰^{-۳۱}\mathrm{kg}$ است. بنابراین تعداد الکترون‌ها در $M=۷۵٫۰\mathrm{kg}$ چنین می‌شود:

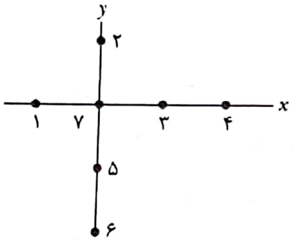
$$N=\frac{M}{m}=\frac{۷۵٫۰\mathrm{kg}}{۹٫۱۱\times۱۰^{-۳۱}\mathrm{kg}}=۸٫۲۳\times۱۰^{۳۱}\ \text{الکترون}$$

و از آنجا بار کل را به‌دست می‌آوریم

$$q=-Ne=-(۸٫۲۳\times۱۰^{۳۱})(۱٫۶۰\times۱۰^{-۱۹}\mathrm{C})$$

$$=-۱٫۳۲\times۱۰^{۳۱}\mathrm{C}$$

۶۰ GO در شکل ۲۱-۴۳، شش ذره‌ی باردار، ذره‌ی ۷ را در برگرفته‌اند که در فاصله‌های شعاعی $d=۱٫۰\mathrm{cm}$ یا $۲d$ از آن قرار دارند. بارها عبارت‌اند از $q_۱=+۲e$، $q_۲=+۴e$، $q_۳=+e$، $q_۴=+۴e$، $q_۵=+۲e$، $q_۶=+۸e$، $q_۷=+۶e$، با $e=۱٫۶\times۱۰^{-۱۹}\mathrm{C}$. بزرگی نیروی الکتروستاتیکی وارد بر ذره‌ی ۷ چقدر است؟



شکل ۲۱-۴۳ مسئله‌ی ۶۰

حل توجه کنید که چون طبق قانون کولن، نیرو به‌طور وارون متناسب با $r^۲$ است، ذره‌ای به بار Q که به فاصله‌ی d از مبدأ قرار دارد همان نیرویی را به بار $q_۰$ واقع در مبدأ وارد می‌کند که ذره‌ای به بار $۴Q$ و به فاصله‌ی $۲d$ از مبدأ بر $q_۰$ وارد می‌کند. بنابراین، $q_۶=+۸e$ واقع بر محور $-y$ را می‌توان با بار $+۲e$ در فاصله‌ی نزدیکتری به $q_۰$ (در نصف فاصله‌ی اولیه) جایگزین کرد؛ این بار $(+۲e)$ با بار $q_۵=+۲e$ مجموعاً بار $+۴e$ به فاصله‌ی d را در زیر مبدأ ایجاد می‌کنند که دقیقاً نیروی حاصل از بار $q_۲=+۴e$ در بالای مبدأ را خنثی خواهد کرد. به همین ترتیب $q_۴=+۴e$ در سمت راست محور $+x$ را می‌توان با بار $+e$ در نصف فاصله‌ی قبلی جایگزین کرد و این بار با بار $q_۳=+e$ باری به بزرگی $+۲e$ به فاصله‌ی d را در سمت راست مبدأ ایجاد می‌کند که دقیقاً با نیروی حاصل از بار $q_۱=+۲e$ در سمت چپ مبدأ خنثی می‌شود. بنابراین نیروی خالص وارد بر $q_۷$ برابر با صفر است.

۶۱ سه ذره‌ی باردار تشکیل مثلثی را داده‌اند: ذره‌ی ۱ با بار $Q_۱=۸۰٫۰\mathrm{nC}$ در مختصات xy $(۰,۳٫۰۰\mathrm{mm})$، ذره‌ی ۲ با بار $Q_۲$ در $(۰,-۳٫۰۰\mathrm{mm})$، و ذره‌ی ۳ با بار $q=۱۸٫۰\mathrm{nC}$ در $(۴٫۰\mathrm{mm},۰)$. برحسب نمادگذاری بردارهای یکه، نیروی الکتروستاتیکی وارد بر ذره‌ی ۳ از سوی دو ذره‌ی دیگر چگونه می‌شود اگر $Q_۲$ برابر با (الف) $۸۰٫۰\mathrm{nC}$ و (ب) $-۸۰٫۰\mathrm{nC}$ باشد؟

حل (الف) بار $Q_۱=+۸۰٫۰\times۱۰^{-۹}\mathrm{C}$ روی محور y در $y=۰٫۰۰۳۰۰\mathrm{m}$، و بار $Q_۲=+۸۰٫۰\times۱۰^{-۹}\mathrm{C}$ روی محور y در $y=-۰٫۰۰۳\mathrm{m}$ قرار دارد. نیروی وارد بر ذره‌ی ۳ (که دارای بار

Scanned by CamScanner

($q=+۱۸٫۰\times۱۰^{-۹}C$ است) ناشی از جمع برداری نیروهای دافعه حاصل از بارهای $Q_۱$ و $Q_۲$ است. به عبارت دیگر $\vec{F}_۳=\vec{F}_{۳۱}+\vec{F}_{۳۲}$ است که در آن

$$|\vec{F}_{۳۱}|=k\frac{q|Q_۱|}{r_{۳۱}^۲}\ ,\quad |\vec{F}_{۳۲}|=k\frac{q|Q_۲|}{r_{۳۲}^۲}$$

با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورس داریم $r_{۳۱}=r_{۳۲}=۰٫۰۵۰۰m$. حال با گذاشتن مقادیر به $F_{۳۱}=F_{۳۲}=۰٫۵۱۸N$ می‌رسیم. بنابراین بر حسب نمادگذاری بزرگی ـ جهت داریم

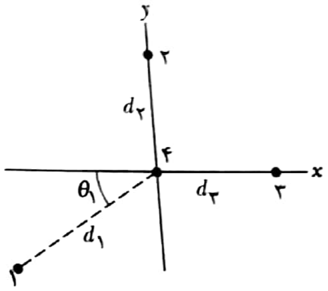
$$\vec{F}_۳=(۰٫۵۱۸\angle-۳۷٫۰^\circ)+(۰٫۵۱۸\angle۳۷٫۰^\circ)$$
$$=۲(۰٫۵۱۸N)\cos(۳۷٫۰^\circ)\hat{i}=(۰٫۸۲۹N)\hat{i}$$

که در آن از $\theta=\tan^{-۱}(\frac{۳۰۰}{۴۰۰})=۳۷٫۰^\circ$ استفاده کردیم.

(ب) با تغییر علامت $Q_۲$، جهت نیروی وارد از $Q_۲$ به q بازمی‌گردد و در نتیجه داریم:

$$\vec{F}_۳=(۰٫۵۱۸\angle-۳۷٫۰^\circ)+(۰٫۵۱۸\angle-۱۴۳^\circ)$$
$$=۲(۰٫۵۱۸N)\sin(-۳۷٫۰^\circ)\hat{j}=-۰٫۶۲۱N\hat{j}$$

۶۲ در شکل ۲۱-۴۴ (الف) بزرگی و (ب) جهت نیروی الکتروستاتیکی خالص وارد بر ذره‌ی ۴ از سوی سه ذره‌ی دیگر چیست؟ هر چهار ذره در صفحه‌ی xy ثابت شده‌اند و $q_۱=-۳٫۲۰\times۱۰^{-۱۹}C$، $q_۲=+۳٫۲۰\times۱۰^{-۱۹}C$، $q_۳=+۶٫۴۰\times۱۰^{-۱۹}C$، $q_۴=+۳٫۲۰\times۱۰^{-۱۹}C$، $\theta_۱=۳۵٫۰^\circ$، $d_۱=۳٫۰۰cm$ و $d_۲=d_۳=۲٫۰۰cm$.



شکل ۲۱-۴۴ مسئله‌ی ۶۲

حل با توجه به اینکه $a=۰٫۰۲۰۰m$ است، با استفاده از قانون کولن به صورت $F=kq_۱q_۲/a^۲$، نیروهای ناشی از بارهای $+۴٫۰۰e$، $+۲٫۰۰e$، $-۲٫۰۰e$ (که $e=۱٫۶۰\times۱۰^{-۱۹}C$ است) بر حسب نمادگذاری بزرگی ـ جهت نیروی خالص را چنین به‌دست می‌دهند:

$$\vec{F}_{net}=۴٫۶۰\times۱۰^{-۲۴}\angle۱۸۰^\circ+۲٫۳۰\times۱۰^{-۲۴}\angle-۹۰٫۰^\circ$$
$$+۱٫۰۲\times۱۰^{-۲۴}\angle-۱۴۵^\circ$$

(الف) اگر نخواهیم که یک ماشین حساب که قادر به محاسبات برداری است استفاده کنیم، خواهیم داشت:

$$\vec{F}_{net}=۴٫۶۰\times۱۰^{-۲۴}(\cos۱۸۰^\circ\hat{i}+\sin۱۸۰^\circ\hat{j})$$
$$+۲٫۳۰\times۱۰^{-۲۴}\left(\cos(-۹۰^\circ)\hat{i}+\sin(-۹۰٫۰^\circ)\hat{j}\right)$$
$$+۱٫۰۲\times۱۰^{-۲۴}\left(\cos(-۱۴۵^\circ)\hat{i}+\sin(-۱۴۵^\circ\hat{j})\right)$$

$$=(-۵٫۴۳\times۱۰^{-۲۴}N)\hat{i}+(-۲٫۸۸\times۱۰^{-۲۴}N)\hat{j}$$

و از آنجا بزرگی $\vec{F}_{net}$ چنین می‌شود:

$$\vec{F}_{net}=\sqrt{(-۵٫۴۳\times۱۰^{-۲۴}N)^۲+(-۲٫۸۸\times۱۰^{-۲۴}N)^۲}$$
$$=۶٫۱۵\times۱۰^{-۲۴}N$$

(ب) جهت نیروی خالص چنین می‌شود:

$$\theta=\tan^{-۱}\frac{F_y}{F_x}=\tan^{-۱}\frac{-۲٫۸۸\times۱۰^{-۲۴}N}{-۵٫۴۳\times۱۰^{-۲۴}N}$$

که جواب قابل قبول آن -۱۵۲° می‌شود (یا ۲۰۸° پادساعتگرد نسبت به سوی مثبت محور x).

۶۳ دو بار نقطه‌ای $۳۰nC$ و $-۴۰nC$ روی محور x به ترتیب در مبدأ و در $x=۷۲cm$ ثابت شده‌اند. ذره‌ای با بار $۴۲\mu C$ در $x=۲۸cm$ از حال سکون رها می‌شود. اگر بزرگی شتاب اولیه‌ی این ذره $۱۰۰\ km/s^۲$ باشد، جرم آن چقدر است؟

حل بزرگی نیروی خالص وارد بر $q=۴٫۲\times۱۰^{-۶}C$ برابر است با

$$F=k\frac{q_۱q_۲}{۰٫۲۸^۲}+k\frac{|q_۲|q}{۰٫۴۴^۲}$$

که در آن $q_۱=۳۰\times۱۰^{-۹}C$ و $|q_۲|=۴۰\times۱۰^{-۹}C$ است. با قراردادن مقادیر به $F=۰٫۲۲N$ می‌رسیم و آنگاه با استفاده از قانون دوم نیوتون خواهیم داشت:

$$m=\frac{F}{a}=\frac{۰٫۲۲N}{۱۰۰\times۱۰^۳m/s^۲}=۲٫۲\times۱۰^{-۶}kg$$

۶۴ دو کره‌ی باردار مثبت کوچک مجموعاً دارای باری برابر با $۵٫۰\times۱۰^{-۵}C$ هستند. اگر وقتی فاصله‌ی دو کره از هم $۲٫۰m$ باشد، هر کره با نیروی الکتروستاتیکی $۱٫۰N$ توسط دیگری دفع شود، بار روی کره‌ای که بار آن کوچکتر است، چقدر است؟

حل دو بار را با $q_۱$ و $q_۲$ نشان می‌دهیم. بنابراین

$$q_۱+q_۲=Q=۵٫۰\times۱۰^{-۵}C$$

می‌شود. از طرفی طبق صورت مسئله داریم

$$F_۱=F_۲=k\frac{q_۱q_۲}{r^۲}$$

$$۱٫۰N=(۸٫۹۹\times۱۰^۹N\cdot m^۲/C^۲)\frac{q_۱q_۲}{(۲٫۰m)^۲}$$

و از آنجا $q_۱q_۲=۴٫۴۵\times۱۰^{-۱۰}C^۲$ می‌شود. $q_۱=Q-q_۲$ را در این را(بطه) قرار می‌دهیم و به معادله‌ی درجه‌ی (دوم) $q_۲^۲-۵٫۰\times۱۰^{-۵}q_۲+۴٫۴۵\times۱۰^{-۱۰}=۰$ می‌رسیم. این معادله دو جو(اب) $۱٫۲\times۱۰^{-۵}C$ و $۳٫۸\times۱۰^{-۵}C$ دارد، که در واقع همان بار(های) کره‌هاست. همچنین می‌توانیم یکی را قبول کنیم و دیگری را از یکی از رابطه‌ی بالا به‌دست آوریم. جواب دوم، همان ریشه‌ی دیگر معادله‌ی در(جه) دوم بالا است.

۶۵ بارهای اولیه‌ی سه کره‌ی فلزی یکسان شکل ۲۱-۲۴ عبارت‌اند

Scanned by CamScanner

کره A با بار Q؛ کره B با بار $-Q/4$؛ و کره C با بار $Q/2$، که $Q=2.00\times10^{-14}\,C$ است. فاصله‌ی مرکز به مرکز کره‌های A و B که در جای خود ثابت شده‌اند، برابر با $d=1.20\,m$ است که این بسیار بزرگ‌تر از اندازه‌ی کره‌هاست. کره C نخست به کره A و سپس به کره B تماس داده شده، و سپس برداشته می‌شود. آنگاه بزرگی نیروی الکتروستاتیکی میان کره‌های A و B چقدر است؟

حل وقتی کره‌ی C با کره‌ی A تماس پیدا می‌کند، آنها بار کل خود ($Q/2$ به‌علاوه‌ی Q) را به‌طور مساوی تقسیم می‌کنند. پس، اکنون کره‌ی A دارای بار $3Q/4$ است و بزرگی نیروی جاذبه‌ی میان کره‌های A و B چنین می‌شود:

$$F=k\frac{(3Q/4)(Q/4)}{d^2}$$

$$=(8.99\times10^9\,N\cdot m^2/C^2)\frac{3(2.00\times10^{-14}\,C)^2}{16(1.20\,m)^2}$$

$$=4.68\times10^{-19}\,N$$

۶۶ الکترونی در خلائی نزدیک به سطح زمین و در $y=0$ روی محور قائم y قرار دارد. الکترون دوم باید در چه مقداری از y قرار گیرد تا نیروی الکتروستاتیکی وارد از آن به الکترون اوّل برابر با نیروی گرانشی وارد بر الکترون اوّل شود؟

حل به‌ازای $F=m_eg$، قانون کولن چنین به‌دست می‌دهد

$$m_eg=\frac{ke^2}{y^2}$$

و در نتیجه

$$y^2=\frac{ke^2}{m_eg}=\frac{(8.99\times10^9\,N\cdot m^2/C^2)(1.60\times10^{-19}C)^2}{(9.11\times10^{-31}\,kg)(9.8\,m/s^2)}$$

که به دو جواب $y=\pm5.1\,m$ می‌انجامد. $y=-5.1\,m$ را برمی‌گزینیم، زیرا برای اینکه نیروی دافعه (وارد بر الکترون اول) در خلاف جهت نیروی کشش گرانشی زمین باشد، باید الکترون دوم زیر الکترون اول واقع باشد.

۶۷ در شکل ۲۱-۲۶، ذره‌ی ۱ با بار $-5.00q$ و ذره‌ی ۲ با بار $+2.00q$، روی محور x در فاصله‌ی L از هم ثابت شده‌اند. اگر ذره‌ی ۳ با بار نامعلوم q_3 به‌گونه‌ای قرار داده شود که نیروی الکتروستاتیکی خالص وارد بر آن از سوی ذره‌های ۱ و ۲ برابر صفر شود، مختصه‌ی (الف) x و (ب) y ذره‌ی ۳ چقدر باید باشد؟

حل (الف) اگر یک ذره‌ی باردار (منفی) در فاصله‌ی x در سمت راست ذره‌ی با بار $+2.00q$ قرار گیرد، آنگاه نیروی جاذبه‌ی آن بر ذره‌ی $+2.00q$ دقیقاً با نیروی دافعه‌ی حاصل از ذره‌ی با بار $-5.00q$ خنثی می‌شود و از قانون کولن داریم:

$$\frac{5}{(L+x)^2}=\frac{2}{x^2}$$

از آنجا به $\frac{x}{L+x}=\sqrt{\frac{2}{5}}$ و یا

$$x=\frac{L}{\sqrt{\frac{2}{5}}-1}\approx1.72L$$

می‌رسیم.

(ب) مختصه‌ی y ذره‌ی سوم برابر $y=0$ است.

۶۸ دو دانشجوی مهندسی، جهان به جرم $90\,kg$ و مریم به جرم $45\,kg$ به فاصله‌ی $30\,m$ از هم قرار دارند. فرض کنید هر یک دارای عدم توازن باری به اندازه ۰٫۰۱٪ در مقدار بار مثبت و منفی، و یکی باردار مثبت و دیگری باردار منفی باشد. با جایگزین کردن هر دانشجو با کره‌ی آبی به جرم همان دانشجو، مرتبه‌ی بزرگی نیروی جاذبه‌ی الکتروستاتیکی میان آنها را پیدا کنید.

حل بار خالص دانشجوی به جرم $m=90\,kg$ برابر است با

$$q=(0.0001)\frac{mN_AZ_e}{M}=(0.0001)\times$$

$$\frac{(90\,kg)(6.02\times10^{23}\,molecules/mol)(18/molecule)(1.60\times10^{-19}C)}{0.018\,kg/mol}$$

$$=8.66\times10^5\,C$$

و بار خالص دانشجوی دوم، نصف این مقدار می‌شود. بنابراین نیروی الکتروستاتیکی میان آنها چنین تقریب زده می‌شود

$$F=k\frac{q(q/2)}{d^2}=(8.99\times10^9\,N\cdot m^2/C^2)\frac{(8.66\times10^5\,C)^2}{2(30\,m)^2}$$

$$=3.7\times10^{18}\,N$$

بنابراین، بزرگی نیروی الکتروستاتیکی از مرتبه‌ی $10^{18}\,N$ می‌شود

۶۹ در واپاشی پرتوزای معادله‌ی ۲۱-۱۳، هسته‌ی ^{238}U به ^{234}Th و یک ^4He گسیل‌شده، تبدیل می‌شود. (این‌ها هسته‌اند نه اتم، و از همین رو است که الکترون‌ها وارد نشده‌اند.) وقتی فاصله‌ی میان ^{234}Th و ^4He برابر $9.0\times10^{-15}\,m$ باشد، بزرگی (الف) نیروی الکتروستاتیکی میان آنها و (ب) شتاب ذره‌ی ^4He چقدر می‌شود؟

حل توجه کنید که در اینجا با بار هسته و نه الکترون‌ها سروکار داریم. هسته‌ی هلیم دارای ۲ پروتون و هسته‌ی توریم دارای ۹۰ پروتون است.

(الف) از قانون کولن داریم

$$F=k\frac{q^2}{r^2}=(8.99\times10^9\,N\cdot m^2/C^2)$$

$$\frac{[2(1.60\times10^{-19}\,C)][90(1.60\times10^{-19}\,C)]}{(9.0\times10^{-15}\,m)^2}=5.1\times10^2\,N$$

(ب) چون جرم نوترون تقریباً با جرم پروتون برابر است، جرم هسته‌ی هلیم را تقریباً برابر جرم چهار پروتون می‌گیریم. آنگاه از قانون دوم نیوتون خواهیم داشت

Scanned by CamScanner

$$a=\frac{F}{m}=\frac{۵/۱\times ۱۰^{۲}\,\mathrm{N}}{۴(۱/۶۷\times ۱۰^{-۲۷}\,\mathrm{kg})}=۷/۷\times ۱۰^{۲۸}\,\mathrm{m/s^{۲}}$$

۷۰ در شکل ۲۱-۲۵، چهار ذره تشکیل مربعی را داده‌اند. بارها عبارت‌اند از $q_۱=+Q$ ، $q_۲=q_۳=q$ و $q_۴=-۲/۰۰Q$. اگـر نیـروی الکتروستاتیکی خالص وارد بر ذره‌ی ۱ برابر صفر باشد، نسبت q/Q چقدر است؟

حل برای آنکه نیروی خالص وارد بر $q_۱=+Q$ صفر شود، باید مؤلفه‌ی x نیروی حاصل از $q_۲=q$ دقیقاً نیروی جاذبه‌ی حاصل از $q_۴=-۲Q$ را خنثی کند. در نتیجه داریم:

$$\frac{Qq}{۴\pi\varepsilon_۰ a^{۲}}=\frac{Q|۲Q|}{۴\pi\varepsilon_۰(\sqrt{۲}a)^{۲}}\cos ۴۵^\circ=\frac{Q^{۲}}{۴\pi\varepsilon_۰\sqrt{۲}a^{۲}}$$

کـه از آنجـا $q=Q/\sqrt{۲}$ مـی‌شـود. ایـن بـدین معنـی اسـت کـه $q/Q=۱/\sqrt{۲}=۰/۷۰۷$ می‌شود.

۷۱ در یک پوسته‌ی کروی فلزی بـه شـعاع R الکترونـی از مرکـز کـره مستقیماً به سمت حفره‌ی کوچکی روی پوسته شـلیک مـی‌شـود و از آن عبور می‌کند. پوسته دارای باری منفی با *چگالی بار سطحی* (بار بـر واحـد سطح) $۶/۹۰\times ۱۰^{-۱۳}\,\mathrm{C/m^{۲}}$ است. وقتی الکترون بـه فاصـله‌ی شـعاعی (الف) $R=۰/۵۰۰R$ و (ب) $r=۲/۰۰R$ مـی‌رسـد، بزرگـی شـتاب آن چقدر است؟

حل (الف) دومین قضیه‌ی پوسته بیان می‌دارد کـه بـر ذره‌ی بـاردار داخل پوسته‌ای که بار به طور یکنواخت روی سطح آن توزیع شده اسـت، هیچ نیرویی از طرف پوسته وارد نمی‌شـود. بنـابراین، در داخـل پوسـته‌ی کروی فلزی و از جمله در $r=۰/۵۰۰R$ (که R شعاع کره است)، نیـروی خالص وارد بر الکترون برابر صفر و در نتیجه $a=۰$ است.

(ب) نخستین قضیه‌ی پوسته بیان می‌دارد پوسته‌ای با بار یکنواخت، ذره‌ی بارداری را که در بیرون آن قرار گرفته اسـت بـه گونـه‌ای جـذب یـا دفـع می‌کند که گویی همه‌ی بار پوسته در مرکز آن قرار گرفتـه اسـت. بنـابراین بزرگی نیروی کولنی وارد بر الکترون در $r=۲/۰۰R$ برابر است با

$$F=k\frac{Q|e|}{r^{۲}}=k\frac{(۴\pi R^{۲}\sigma)|e|}{(۲/۰R)^{۲}}=k\pi\sigma|e|$$

$$=(۸/۹۹\times ۱۰^{۹}\,\mathrm{N\cdot m^{۲}/C^{۲}})\pi(۶/۹۰\times ۱۰^{-۱۳}\,\mathrm{C/m^{۲}})(۱/۶۰\times ۱۰^{-۱۹}\,\mathrm{C})$$

$$=۳/۱۲\times ۱۰^{-۲۱}\,\mathrm{N}$$

و از آنجا شتاب مربوط به این نیرو چنین می‌شود:

$$a=\frac{F}{m}=\frac{۳/۱۲\times ۱۰^{-۲۱}\,\mathrm{N}}{۹/۱۱\times ۱۰^{-۳۱}\,\mathrm{kg}}=۳/۴۳\times ۱۰^{۹}\,\mathrm{m/s^{۲}}$$

۷۲ الکترونی با تندی اولیه‌ی $v_i=۳/۲\times ۱۰^{۵}\,\mathrm{m/s}$ مستقیماً به سمت پروتونی که در فاصله‌ای بسیار دور ساکن است، شلیک می‌شود. چون جرم پروتون نسبت به جرم الکترون بزرگ است، فـرض کنیـد پروتـون سـاکن باقی می‌ماند. با محاسبه‌ی کار انجـام شـده روی الکتـرون توسـط نیـروی الکتروستاتیکی، فاصله‌ی بین دو ذره را به هنگامی که الکترون دارای تندی لحظه‌ای $۲v_i$ است، تعیین کنید.

حل می‌توانیم از پایستگی انرژی بـرای دسـتگاه الکتـرون - پروتـون استفاده می‌کنیم. در ابتـدا فقـط انـرژی جنبشـی الکتـرون را داریـم. وقتـی الکترون به پروتون نزدیک می‌شود، انرژی پتانسیل بین الکترون و پروتون نیز وارد می‌شود. چون هنوز با مفهوم پتانسیل الکتریکی و انـرژی پتانسـیل الکتریکی آشنا نشده‌ایم، خـوب اسـت از قضیـه‌ی کـار - انـرژی جنبشـی استفاده کنیم:

$$\Delta K=W$$

که در آن ΔK تغییر انرژی جنبشی الکترون و W کـار نیـروی براینـدی است که روی الکترون صـورت مـی‌گیـرد. الکتـرون بـه پروتـون نزدیـک می‌شود و بر اثر جاذبه‌ی کولنی کاری بر آن صورت می‌گیرد که بر سرعت آن می‌افزاید. اگر r_f فاصله الکترون - پروتون به هنگامی باشد که سرعت نهایی الکترون $۲v_i$ است، آنگاه خواهیم داشت:

$$\frac{۱}{۲}m_e v_f^{۲}-\frac{۱}{۲}m_e v_i^{۲}=\frac{ke^{۲}}{r_f}$$

و از آنجا

$$r_f=\frac{۲ke^{۲}}{m_e(v_f^{۲}-v_i^{۲})}=\frac{۲ke^{۲}}{m_e(۴v_i^{۲}-v_i^{۲})}=\frac{۲ke^{۲}}{۳m_e v_i^{۲}}$$

$$=\frac{۲(۸/۹۹\times ۱۰^{۹}\,\mathrm{N\cdot m^{۲}/C^{۲}})(۱/۶۰\times ۱۰^{-۱۰}\,\mathrm{C})^{۲}}{۳(۹/۱۱\times ۱۰^{-۳۱}\,\mathrm{kg})(۳/۲\times ۱۰^{۵}\,\mathrm{m/s})}$$

$$\approx ۱/۶۴\times ۱۰^{-۹}=۱/۶\,\mathrm{nm}$$

۷۳ در مدل قدیمی اتم هیدروژن (*مدل بور*)، الکترون با حرکت دایره‌ای یکنواخت به دور پروتون می‌چرخد. شـعاع ایـن دایـره بـه مقـادیر معینـی محدود (کوانتیده) شده است که با رابطه‌ی زیر داده می‌شود

$$r=n^{۲}a_۰,\quad \text{به‌ازای}\quad n=۱,۲,۳,...$$

و در آن $a_۰=۵۲/۹۲\,\mathrm{pm}$ است. تندی الکترون چقدر است، اگـر (الـف) در کوچکترین مدار مجاز و (ب) در دومین مـدار کوچـک بچرخـد؟ (پ) اگر الکترون به مدارهایی بزرگتر حرکت کند، آیا تندی آن افزایش می‌یابد یا کاهش، و یا تغییری نمی‌کند؟

حل (الف) نیروی کولنی بین الکترون و پروتون، نیروی مرکزگرای لازم برای چرخش الکترون به دور پروتون را تأمین می‌کند:

$$F=m_e a$$

$$\frac{k|e|^{۲}}{r^{۲}}=m_e\frac{v^{۲}}{r}$$

کوچـکتـرین شـعاع مـداری بـه‌ازای $n=۱$ و برابـر $r_۱=a_۰=۵۲/۹۲\times ۱۰^{-۱۲}\,\mathrm{m}$ است. تندی چرخش الکترون مربوط به ایـن حالت را از رابطه‌ی بالا به‌دست می‌آوریم

$$v=\sqrt{\frac{k|e|^{۲}}{m_e r_۱}}=\sqrt{\frac{k|e|^{۲}}{m_e a_۰}}$$

Scanned by CamScanner

$$= \sqrt{\frac{(۸٫۹۹\times۱۰^{۹}\,\mathrm{N\cdot m^{۲}/C^{۲}})(۱٫۶۰\times۱۰^{-۱۹}\,\mathrm{C})}{(۹٫۱۱\times۱۰^{-۳۱}\,\mathrm{kg})(۵۲٫۹\times۱۰^{-۱۲}\,\mathrm{m})}}$$

$$= ۲٫۱۹\times۱۰^{۶}\ \mathrm{m/s}$$

(ب) شعاع دومین مدار کوچک به‌ازای $n=۲$ به‌دست می‌آید و داریم $r_۲=(۲)^۲a_۰=۴a_۰$. بنابراین تندی چرخش الکترون در این مدار چنین می‌شود:

$$v_۲=\sqrt{\frac{k|e|^۲}{m_e r_۲}}=\sqrt{\frac{k|e|^۲}{m_e(۴a_۰)}}=\frac{۱}{۲}v_۱$$

$$=\frac{۱}{۲}(۲٫۱۹\times۱۰^{۶}\ \mathrm{m/s})=۱٫۰۹\times۱۰^{۶}\ \mathrm{m/s}$$

(پ) چون تندی متناسب با $(۱/r)^{\frac{۱}{۲}}$ است، تندی الکترون با حرکت آن به مدارهای بالاتر کاهش پیدا می‌کند

۷۴ جریان یکنواخت $۰٫۸۳\,\mathrm{A}$ از رشته(فیلامان) یک لامپ $۱۰۰\,\mathrm{W}$ عبور می‌کند. زمان لازم برای آنکه ۱ مول الکترون از لامپ بگذرد، چقدر است؟

حل جریان الکتریکی i برابر با آهنگ dq/dt یی است که بار از یک نقطه فقط عبور می‌کند. به‌ازای $i=۰٫۸۳\,\mathrm{A}$، زمان لازم برای عبور یک مول الکترون از لامپ چنین می‌شود:

$$\Delta t=\frac{\Delta q}{i}=\frac{N_A e}{i}=\frac{(۶٫۰۲\times۱۰^{۲۳})(۱٫۶۰\times۱۰^{-۱۹}\,\mathrm{C})}{۰٫۸۳\,\mathrm{A}}$$

$$=۱٫۲\times۱۰^{۵}\,\mathrm{s}\approx ۱٫۳\ \text{روز}$$

در محاسبه‌ی بالا از این واقعیت که در مقدار الکترون یک مول الکترون برابر حاصل‌ضرب عدد آووگادرو در بار الکترون است، استفاده کردیم.

۷۵ بارهای الکترون و پوزیترون به‌ترتیب $-e$ و $+e$، و جرم هر کدام $۹٫۱۱\times۱۰^{-۳۱}\,\mathrm{kg}$ است. نسبت نیروی الکتریکی به نیروی گرانشی بین یک الکترون و یک پوزیترون چقدر است؟

حل نیروی الکتریکی بین یک الکترون و یک پوزیترون در فاصله‌ی r از هم قرار گرفته‌اند برابر با $F_e=ke^۲/r^۲$ می‌شود. از طرف دیگر نیروی گرانش بین آنها (با توجه به اینکه اندازه بار هر دو برابر e است) برابر با $F_g=Gm_e^۲/r^۲$ است. بنابراین نسبت این دو نیرو برابر است با

$$\frac{F_e}{F_g}=\frac{ke^۲/r^۲}{Gm_e^۲/r^۲}=\frac{ke^۲}{Gm_e^۲}$$

$$=\frac{(۸٫۹۹\times۱۰^{۹}\,\mathrm{N\cdot m^۲/C^۲})(۱٫۶۰\times۱۰^{-۱۹}\,\mathrm{C})^۲}{(۶٫۶۷\times۱۰^{-۱۱}\,\mathrm{N\cdot m^۲})(۹٫۱۱\times۱۰^{-۳۱}\,\mathrm{kg})}$$

$$=۴٫۱۶\times۱۰^{۴۲}$$

توجه به مقدار بسیار بزرگ این نسبت به دقت توجه کنید. برای همین است که در مسئله‌های الکتروستاتیک همواره از نیروی گرانشی چشم‌پوشی می‌کنیم.

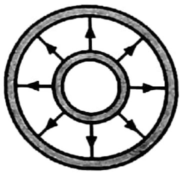
Scanned by CamScanner

میدان‌های الکتریکی

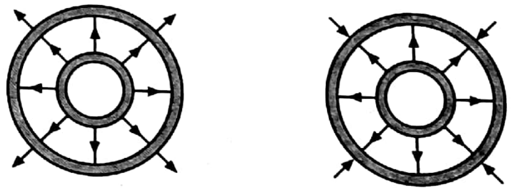
بخش ۲۲-۱ میدان الکتریکی

۱● طرحی از خطوط میدان الکتریکی را به‌طور کیفی هم در میان دو پوسته‌ی کروی هم‌مرکز رسانا و هم در بیرون آنها به هنگامی رسم کنید که بار مثبت یکنواخت q_1 روی پوسته‌ی داخلی و بار منفی یکنواخت $-q_2$ روی پوسته‌ی خارجی قرار داشته باشد. حالت‌های $q_1 > q_2$، $q_1 = q_2$ و $q_1 < q_2$ را در نظر بگیرید.

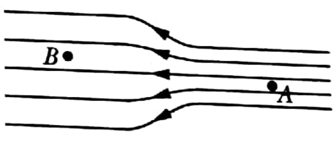
حل توجه کنید که نماد q_2ی به‌کار رفته در صورت مسئله، قدرمطلق بار منفی است که در پوسته‌ی بیرونی قرار دارد. شکل خطوط میدان به‌ازای $q_1 = q_2$ چنین می‌شود:



همچنین شکل‌های سمت چپ و سمت راست پایین، خطوط میدان را به‌ترتیب به‌ازای $q_1 > q_2$ و $q_1 < q_2$ نشان می‌دهند:



۲● در شکل ۲۲-۳۴ فاصله‌ی بین خطوط میدان الکتریکی در سمت چپ، دو برابر فاصله‌ی بین آنها در سمت راست است. (الف) اگر بزرگی میدان در نقطه‌ی A برابر $40 N/C$ باشد، بزرگی نیروی وارد بر یک پروتون در نقطه‌ی A چقدر می‌شود؟ (ب) بزرگی این میدان در نقطه‌ی B چیست؟



شکل ۲۲-۳۴ مسئله‌ی ۲

حل (الف) توجه کنید که سوی خطوط میدان در هر دو نقطه رو به سمت چپ (در خلاف جهت $\hat{i}$) است. آنگاه با استفاده از $\vec{F} = q_0\vec{E}$ درخواهیم یافت.

$$\vec{F} = (+1.6\times10^{-19}C)\left(-40\frac{N}{C}\hat{i}\right) = -6.4\times10^{-18}N\hat{i}$$

یعنی بزرگی نیرو $6.4\times10^{-18}N$ و جهت آن رو به سمت چپ است.

(ب) می‌دانیم که بزرگی میدان متناسب با تعداد خطوط نیروی میدان است. از روی شکل واضح است که تراکم خطوط میدان در A دو برابر نقطه‌ی B و بنابراین $E_A = 2E_B$ است. پس، $E_B = 20 N/C$ می‌شود.

بخش ۲۲-۲ میدان الکتریکی حاصل از یک بار نقطه‌ای

۳● هسته‌ی اتم پلوتونیوم ۲۳۹ دارای ۹۴ پروتون است. فرض کنید این هسته، کره‌ای به شعاع $6.64 fm$ است و بار پروتون‌ها به‌طور یکنواختی در سرتاسر کره پخش شده است. در سطح هسته، (الف) بزرگی و (ب) جهت (به‌طور شعاعی رو به داخل یا رو به خارج) میدان حاصل از این پروتون‌ها چیست؟

حل چون بار به‌طور یکنواختی در سرتاسر هسته‌ی کروی توزیع شده است، میدان الکتریکی در سطح آن دقیقاً همان مقداری را دارد که اگر آن بار در مرکز کره قرار می‌گرفت، می‌داشت. یعنی بزرگی میدان الکتریکی در سطح کره از $E = q/4\pi\varepsilon_0 r^2$ به‌دست می‌آید که در آن q بزرگی بار کل و R شعاع کره است.

(الف) بزرگی بار کل Ze است و در نتیجه داریم

$$E = \frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$
$$= \frac{(8.99\times10^{9}N\cdot m^2/C^2)(94)(1.60\times10^{-19}C)}{(6.64\times10^{-15}m)^2}$$
$$= 3.07\times10^{21}N/C$$

(ب) میدان عمود بر سطح است و چون بار مثبت است، جهت آن رو به سمت خارج سطح می‌شود.

۴● دو ذره روی محور x ثابت شده‌اند: ذره‌ی ۱ با بار $-2.00\times10^{-7}C$ در $x = 6.00cm$ و ذره‌ی ۲ با بار $+2.00\times10^{-7}C$ در $x = 21.0cm$. میدان الکتریکی خالص برحسب نمادگذاری بردارهای یکه در وسط فاصله‌ی این دو ذره چگونه است؟

Scanned by CamScanner

حل به‌ازای $x_1 = ۶٫۰۰\text{cm}$ و $x_۲ = ۲۱٫۰\text{cm}$، نقطه‌ی وسط دو بار در $x = (x_1 + x_۲)/۲ = ۱۳٫۵\text{cm}$ قرار دارد. مقادیر بارها

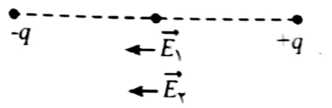
$$q_1 = -q_۲ = -۲٫۰۰ \times ۱۰^{-۷}\,\text{C}$$

است و از آنجا میدان‌های الکتریکی ناشی از هر بار چنین می‌شوند:

$$\vec{E}_1 = -\frac{|q_1|}{۴\pi\varepsilon_0 (x - x_1)^۲}\hat{\text{i}} = -(۳٫۲۰ \times ۱۰^۵\,\text{N/C})\hat{\text{i}}$$

و نیز

$$\vec{E}_۲ = -(۳٫۲۰ \times ۱۰^۵\,\text{N/C})\hat{\text{i}}$$



پس، میدان الکتریکی خالص (برایند) عبارت است از

$$\vec{E}_{\text{net}} = \vec{E}_1 + \vec{E}_۲ = -(۶٫۴۰ \times ۱۰^۵\,\text{N/C})\hat{\text{i}}$$

۵۰ بزرگی یک بار نقطه‌ای که میدانی الکتریکی به بزرگی $۲٫۰\,\text{N/C}$ را در فاصله‌ی ۵۰cm از آن ایجاد می‌کند، چقدر است؟

حل بزرگی بار q را از $E = q/۴\pi\varepsilon_0 r^۲$ به‌دست می‌آوریم:

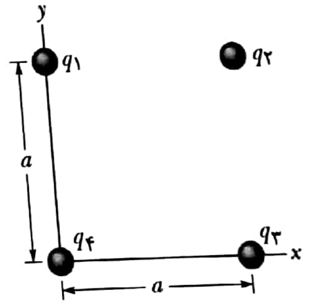
$$q = ۴\pi\varepsilon_0 E r^۲ = \frac{(۲٫۰\,\text{N/C})(۰٫۵۰\,\text{m})^۲}{۸٫۹۹ \times ۱۰^۹\,\text{N}\cdot\text{m}^۲/\text{C}^۲} = ۵٫۶ \times ۱۰^{-۱۱}\,\text{C} = ۵۶\,\text{pC}$$

۶۰ بزرگی یک بار نقطه‌ای که میدان الکتریکی $۱٫۰۰\,\text{N/C}$ را در نقاطی به فاصله‌ی $۱٫۰۰\,\text{m}$ از آن ایجاد می‌کند، چقدر است؟

حل بزرگی بار q را از $E = q/۴\pi\varepsilon_0 r^۲$ به‌دست می‌آوریم:

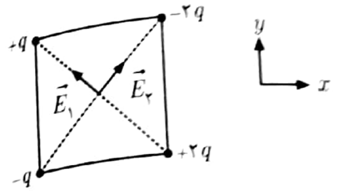
$$q = ۴\pi\varepsilon_0 E r^۲ = \frac{(۱٫۰۰\,\text{N/C})(۱٫۰۰\,\text{m})^۲}{۸٫۹۹ \times ۱۰^۹\,\text{N}\cdot\text{m}^۲/\text{C}^۲} = ۱٫۱۱ \times ۱۰^{-۱۰}\,\text{C}$$

۷۰۰ ILW WWW در شکل ۲۲-۳۵، چهار ذره با بارهای $q_1 = +۱۰٫۰\,\text{nC}$، $q_۲ = -۲۰٫۰\,\text{nC}$، $q_۳ = +۲۰٫۰\,\text{nC}$ و $q_۴ = -۱۰٫۰\,\text{nC}$ تشکیل مربعی به ضلع $a = ۵٫۰۰\,\text{cm}$ را داده‌اند. برحسب نمادگذاری بردارهای یکه، میدان الکتریکی خالص حاصل از این ذرات در مرکز مربع چگونه است؟



شکل ۲۲-۳۵ مسئله‌ی ۷

حل می‌توانیم مؤلفه‌های میدان الکتریکی را در مرکز مربع با برهم‌نهی میدان‌های الکتریکی هر یک از بارها به‌دست آوریم. ولی ساده‌تر آن است که از تقارن شکل استفاده کنیم.



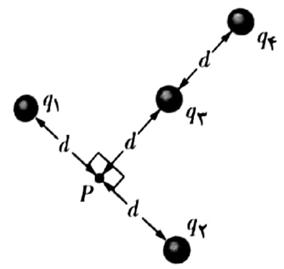
چون $E_1 = E_۲$ است، خواهیم داشت

$$E_x = E_1 \cos ۴۵° - E_1 \cos ۴۵° = ۰$$
$$E_y = E_1 \sin ۴۵° + E_1 \sin ۴۵° = \sqrt{۲} E_1$$

در نتیجه $\vec{E}_{\text{net}}$ چنین می‌شود:

$$\vec{E}_{\text{net}} = (\sqrt{۲}E_1)\hat{\text{j}} = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_0}\frac{۲\sqrt{۲}q}{a^۲}\hat{\text{j}}$$
$$= (۸٫۹۹ \times ۱۰^۹\,\text{N}\cdot\text{m}^۲/\text{C}^۲)\frac{۲\sqrt{۲} \times ۱۰^{-۸}\,\text{C}}{(۵٫۰۰ \times ۱۰^{-۲}\,\text{m})^۲}\hat{\text{j}}$$
$$= (۱٫۰۲ \times ۱۰^۵\,\text{N/C})\hat{\text{j}}$$

۸۰۰ GO در شکل ۲۲-۳۶، چهار ذره با بارهای $q_1 = q_۲ = +۵e$، $q_۳ = +۳e$ و $q_۴ = -۱۲e$ در مکان‌های خود ثابت شده‌اند. فاصله‌ی d برابر با $۵٫۰\,\mu\text{m}$ است. بزرگی میدان الکتریکی خالص حاصل از این ذرات در نقطه‌ی P چقدر است؟

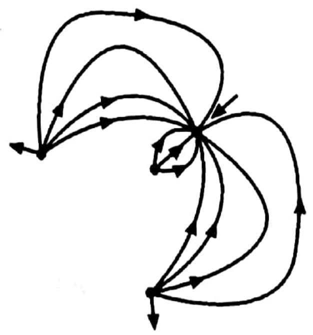


شکل ۲۲-۳۶ مسئله‌ی ۸

حل با استفاده از اصل برهم‌نهی، میدان در نقطه‌ی P برابر با مجموع چهار میدان مجزای حاصل از چهار بار است. ولی میدان حاصل از دو بار $q_1 = q_۲ = +۵q$ همدیگر را در نقطه‌ی P خنثی می‌کنند و می‌ماند میدان حاصل از بارهای $q_۳ = +۳q$ و $q_۴ = -۱۲q$:

$$E_{\text{net}} = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_0}\left(\frac{|q_۴|}{(۲d)^۲} - \frac{q_۳}{d^۲}\right) = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_0}\left(\frac{۱۲q}{۴d^۲} - \frac{۳q}{d^۲}\right) = ۰$$

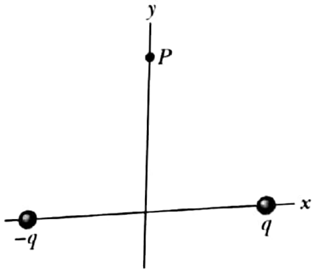
یک شکل تقریبی از خطوط میدان در پایین رسم شده است.



۹۰۰ GO شکل ۲۲-۳۷ دو ذره‌ی باردار را روی محور x نشان می‌دهد: $-q = -۳٫۲۰ \times ۱۰^{-۱۹}\,\text{C}$ در $x = -۳٫۰۰\,\text{m}$ و

Scanned by CamScanner

$q = ۳٫۲۰\times۱۰^{-۱۹}C$ در $x=+۳٫۰۰m$. (الف) بزرگی و (ب) جهت (نسبت به سوی مثبت محور x) میدان الکتریکی خالص ایجاد شده در نقطه‌ی P واقع بر $y=۴٫۰۰m$ چیست؟



شکل ۲۲-۳۷ مسئله‌ی ۹

حل (الف) طبق قانون کولن، مؤلفه‌های قائم میدان‌های مجزای حاصل از دو بار، همدیگر را خنثی می‌کنند. با توجه به اینکه $d=۳٫۰۰m$ است، و اینکه مؤلفه‌های افقی میدان‌ها (که هر دو در جهت $-x$ هستند) با هم جمع می‌شوند، بزرگی مؤلفه‌ی x میدان خالص چنین می‌شود

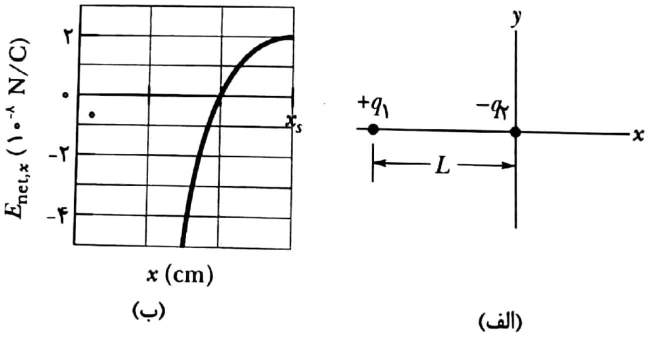
$$E_{net,x}=\frac{۲qd}{۴\pi\varepsilon_۰(d^۲+y^۲)^{۳/۲}}$$

$$=(۸٫۹۹\times۱۰^۹N\cdot m^۲/C^۲)\frac{۲(۳٫۲۰\times۱۰^{-۱۹}C)(۳٫۰۰m)}{\left[(۳٫۰۰m)^۲+(۴٫۰۰m)^۲\right]^{۳/۲}}$$

$$=۱٫۳۸\times۱۰^{-۱۰}N/C$$

(ب) جهت میدان الکتریکی خالص در سوی $-x$ یا $۱۸۰°$ پادساعتگرد نسبت به محور $+x$ است.

۱۰●●● GO شکل ۲۲-۳۸ الف، دو ذره‌ی باردار را نشان می‌دهد که در مکان‌های خود روی محور x، به فاصله‌ی L از یکدیگر، ثابت شده‌اند. نسبت $q_۱/q_۲$ بزرگی بار آنها برابر با $۴٫۰۰$ است. شکل ۲۲-۳۸ ب، $E_{net,x}$ مؤلفه‌ی x میدان الکتریکی خالص آنها را روی محور x فقط برای سمت راست ذره‌ی ۲ نشان می‌دهد. محور x با $x_s=۳۰٫۰cm$ مقیاس‌بندی شده است. (الف) به‌ازای چه مقادیری از $x>۰$، $E_{net,x}$ بیشینه است؟ (ب) اگر ذره‌ی ۲ دارای بار $-q_۲=-۳e$ باشد، مقدار این بیشینه چقدر است؟



شکل ۲۲-۳۸ مسئله‌ی ۱۰

حل برای آنکه میدان الکتریکی خالص در $x>۰$ برابر صفر شود، باید میدان‌های مجزای (حاصل از بارهای $q_۱$ و $q_۲$) در جهت‌های مخالفی باشند. با توجه به مکان‌های داده شده در شکل، نتیجه می‌گیریم که بار آنها مخالف هم است. به‌علاوه، چون جهت میدان خالص به‌ازای x مثبت کوچک (جایی که خیلی به $q_۲$ نزدیک است) به طور قوی‌تری رو به سمت چپ است نتیجه می‌گیریم که $q_۲$ باردار منفی است. بنابراین، $q_۱$ دارای بار مثبت است. هر کدام از این بارها را برحسب مضربی از عدد مثبت α می‌نویسیم. چون مسئله قدرمطلق نسبت بارها را داده است، از استدلال بالا نتیجه می‌گیریم که $q_۱=۴\alpha$ و $q_۲=-\alpha$ است. آنگاه میدان الکتریکی خالص برای نقاط روی محور $+x$ چنین می‌شود:

$$E_{net}=E_۱+E_۲=\frac{۴\alpha}{۴\pi\varepsilon_۰(L+x)^۲}-\frac{\alpha}{۴\pi\varepsilon_۰x^۲}$$

از روی شکل درمی‌یابیم که در $x=۲۰cm$، $E_{net}=۰$ است. با قرار دادن این دو مقدار در معادله‌ی بالا به $L=۲۰cm$ می‌رسیم.

(الف) اگر از E_{net} نسبت به x مشتق بگیریم و آن را برابر با صفر قرار دهیم، مکانی که E_{net} بیشینه است به‌دست می‌آید:

$$\frac{dE_{net}}{dx}=\frac{-۸}{(L+x)^۳}+\frac{۲}{x^۳}=۰$$

و از آنجا

$$\left(\frac{۲}{L+x}\right)^۳=\frac{۲}{x^۳}$$

و یا

$$\frac{۲}{L+x}=\frac{(۲)^{\frac{۱}{۳}}}{x}$$

و در نتیجه

$$x=\frac{۲^{\frac{۱}{۳}}}{۲-۲^{\frac{۱}{۳}}}L=۱٫۷L=۱٫۷(۲٫۰۰cm)=۳۴٫۰cm$$

توجه کنید که این نتیجه ربطی به مقدار α ندارد.

(ب) $\alpha=۳e$ را باید به‌ازای $x=۰٫۳۴m$ در رابطه‌ی E_{net} بگذاریم که در آن $e=۱٫۶۰\times۱۰^{-۱۹}C$ است. در نتیجه داریم

$$E_{net}=(۸٫۹۹\times۱۰^۹N\cdot m^۲/C^۲)\times\left(\frac{۱۲(۱٫۶۰\times۱۰^{-۱۹}C)}{(۰٫۲۰۰m+۰٫۳۴۰m)^۲}-\frac{۳(۱٫۶۰\times۱۰^{-۱۹}C)}{(۰٫۰۲۰۰m)^۲}\right)$$

$$=۲٫۱۹\times۱۰^{-۸}N/C$$

۱۱●● دو ذره روی محور x ثابت شده‌اند: ذره‌ی ۱ با بار $q_۱=۲٫۱\times۱۰^{-۸}C$ در $x=۲۰cm$ و ذره‌ی ۲ با بار $q_۲=-۴٫۰۰q_۱$ در $x=۷۰cm$. در چه مختصه‌ای روی محور x، میدان الکتریکی خالص حاصل از این دو ذره برابر با صفر می‌شود؟

حل در نقاط میان بارها، میدان‌های الکتریکی مجزا در یک جهت‌اند و همدیگر را خنثی نمی‌کنند. چون بزرگی بار $q_۲=-۴٫۰۰q_۱$ که در $x_۲=۷۰cm$ قرار گرفته است بیشتر از $q_۱=۲٫۱\times۱۰^{-۸}C$ است که در $x_۱=۲۰cm$ قرار گرفته است، نقطه‌ای که در آنجا میدان الکتریکی صفر

Scanned by CamScanner

می‌شود به q_1 نزدیک‌تر از q_2 است و این البته باید در سمت چپ q_1 باشد. چرا که همان‌طور که در بالا گفتیم، امکان تعادل در میان دو بار وجود ندارد.

x را مختصه‌ی نقطه‌ی P که در آنجا میدان‌های الکتریکی همدیگر را خنثی می‌کنند، اختیار کنید. آنگاه میدان الکتریکی کل در نقطه‌ی P چنین می‌شود

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{|q_2|}{(x-x_2)^2}-\frac{|q_1|}{(x-x_1)^2}\right)$$

با توجه به اینکه در این نقطه $E=0$ می‌شود، از آنجا خواهیم داشت

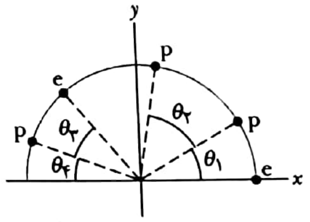
$$\frac{|q_2|}{(x-x_2)^2}=\frac{|q_1|}{(x-x_1)^2}\quad\Rightarrow\quad\frac{|q_2|}{|q_1|}=\frac{(x-x_2)^2}{(x-x_1)^2}$$

با گرفتن ریشه‌ی مربعی از دو طرف معادله و با توجه به اینکه $|q_2|/|q_1|=4.00$ است، به‌دست خواهیم آورد

$$\frac{x-70}{x-20}=\pm 2.00$$

که به‌ازای $+2.00$ به $x=-30\text{cm}$ و به‌ازای -2.00 به $x=37\text{cm}$ می‌انجامد که بدیهی است پاسخ قابل قبول $x=30\text{cm}$ می‌شود.

۱۲ ●● شکل ۲۲-۳۹ چیدمان نامنظمی از الکترون‌ها (e) و پروتون‌ها (p) را روی کمانی دایره‌ای به شعاع $r=2.00\text{cm}$ نشان می‌دهد که در زاویه‌های $\theta_1=30.0°$، $\theta_2=50.0°$، $\theta_3=30.0°$، و $\theta_4=20.0°$ واقع شده‌اند. (الف) بزرگی و (ب) جهت (نسبت به سوی مثبت محور x) میدان الکتریکی خالص حاصل از این ذرات در مرکز کمان چیست؟



شکل ۲۲-۳۹ مسئله‌ی ۱۲

حل

میدان هر بار دارای بزرگی زیر است

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{(0.0200\text{m})^2}=(8.99\times10^{9}\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\frac{1.60\times10^{-19}\text{C}}{(0.0200\text{m})^2}=3.60\times10^{-6}\text{N/C}$$

با شروع از پروتون سمت چپ و حرکت ساعتگرد، $\vec{E}_{\text{net}}$ بر حسب نمادگذاری بزرگی ـ جهت چنین می‌شود:

$$\vec{E}_{\text{net}}=(E\angle-20.0°)+(E\angle130°)+(E\angle-100°)+(E\angle-150°)+(E\angle0°)$$

اگر نخواهیم از ماشین حساب‌هایی استفاده کنیم که قادر به محاسبات برداری هستند باید برای محاسبه‌ی بزرگی و جهت $\vec{E}_{\text{net}}$، رابطه‌ی بالا را برحسب مؤلفه‌های x و y تجزیه کنیم.

(الف) مؤلفه‌های x و y میدان $\vec{E}_{\text{net}}$ به‌ترتیب چنین می‌شوند:

$$\begin{aligned}E_{\text{net},x}&=E\cos(-20.0°)+E\cos(130°)+E\cos(-100°)\\&\quad+E\cos(-150°)+E\cos(0°)=3.60\times10^{-6}\\&\quad\times[\cos(-20.0°)+\cos(130°)+\cos(-100°)\\&\quad+\cos(-150°)+\cos(0°)]\text{N/C}\\&=9.25\times10^{-7}\text{N/C}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E_{\text{net},y}&=E\sin(-20.0°)+E\sin(130°)+E\sin(-100°)\\&\quad+E\sin(-150°)+E\sin(0°)=3.6\times10^{-6}\\&\quad\times[\sin(-20.0°)+\sin(130°)+\sin(-100°)\\&\quad+\sin(-150°)+\sin(0°)]\text{N/C}\\&=-3.82\times10^{-6}\text{N/C}\end{aligned}$$

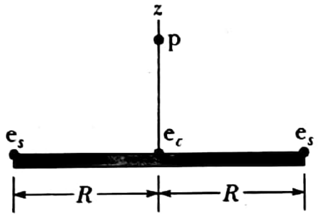
بنابراین بزرگی $\vec{E}_{\text{net}}$ چنین می‌شود

$$\begin{aligned}E_{\text{net}}&=\sqrt{E^2_{\text{net},x}+E^2_{\text{net},y}}\\&=\sqrt{(9.25\times10^{-7}\text{N/C})^2+(-3.82\times10^{-6}\text{N/C})^2}\\&=3.93\times10^{-6}\text{N/C}\end{aligned}$$

(ب) و جهت $\vec{E}_{\text{net}}$ نسبت به سوی مثبت محور x، چنین می‌شود

$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{E_{\text{net},y}}{E_{\text{net},x}}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{-3.82\times10^{-6}\text{N/C}}{9.25\times10^{-7}\text{N/C}}\right)=-76.4°$$

۱۳ ●● شکل ۲۲-۴۰ یک پروتون (p) را روی محور مرکزی قرص‌ـ با چگالی بار یکنواختِ حاصل از الکترون‌های اضافی نشان می‌دهد. سـ تا از این الکترون‌ها نشان داده شده است: الکترون e_c در مرکز قرص ا الکترون‌های e_s در دو سوی مقابل قرص، به فاصله‌ی شعاعی R از مرکـ آن. پروتون در ابتدا به فاصله‌ی $z=R=2.00\text{cm}$ از قرص قرار دار در این مکان، بزرگی (الف) میدان الکتریکی $\vec{E}_c$ حاصل از الکترون e_c (ب) میدان الکتریکی خالص $E_{s,\text{net}}$ حاصل از الکترون e_s چقدر است سپس پروتون به فاصله‌ی $z=R/10.0$ آورده می‌شود. آنگاه بزرگی (پ $\vec{E}_c$ و (ت) $E_{s,\text{net}}$ در مکان پروتون چقدر می‌شود؟ (ث) از قسمـ (الف) و (پ) درمی‌یابیم که وقتی پروتون به قرص نزدیک‌تر می‌شو بزرگی $\vec{E}_c$ افزایش می‌یابد. چرا با توجه به قسمت‌های (ب) و (ت بزرگی $E_{s,\text{net}}$ کاهش پیدا می‌کند؟



شکل ۲۲-۴۰ مسئله‌ی ۱۳

حل (الف) الکترون e_c در فاصله‌ی $r=z=0.200\text{m}$ از پروتـ قرار گرفته است و بنابراین داریم:

$$E_c=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=(8.99\times10^{9}\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\frac{1.60\times10^{-19}\text{C}}{(0.200\text{m})^2}$$
$$=3.60\times10^{-6}\text{N/C}$$

Scanned by CamScanner

(ب) مؤلفه‌های افقی میدان‌های مجزا (ناشی از دو بار e_s) خنثی می‌شوند و مؤلفه‌های قائم با هم جمع شده و میدان خالص زیر را به‌دست می‌دهند:

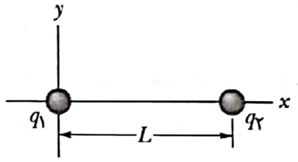
$$E_{\text{net}}=\frac{۲ez}{۴\pi\varepsilon_۰(R^۲+z^۲)^{۳/۲}}=۲{,}۵۵\times ۱۰^{-۶}\,\text{N/C}$$

(پ) محاسبه‌ای مشابه با آنچه که در قسمت (الف) انجام دادیم، اکنون به میدان قوی‌تر $E_c=۳{,}۶۰\times۱۰^{-۴}\,\text{N/C}$ ناشی از بار مرکزی می‌انجامد.

(ت) میدان ناشی از بارهای کناری را می‌توانیم از محاسبه‌ای مشابه قسمت ب به‌دست آوریم که در اینجا به میدان ضعیف‌تر $E_{s,\text{net}}=۷{,}۰۹\times۱۰^{-۷}\,\text{N/C}$ می‌انجامد.

(ث) E_c متناسب با وارون $z^۲$ است و در نتیجه وقتی z کوچک‌تر می‌شود، میدان حاصل از الکترون مرکزی قوی‌تر می‌شود. در حالی که میدان حاصل از الکترون‌های کناری متناسب با $z/\sqrt{r}$ است. بنابراین وقتی z کوچک‌تر و کوچک‌تر می‌شود، این میدان نیز ضعیف‌تر و ضعیف‌تر می‌شود.

۱۴●● در شکل ۲۲-۴۱، ذره‌ی ۱ با بار $q_۱=-۵{,}۰۰q$ و ذره‌ی ۲ با بار $q_۲=+۲{,}۰۰q$ روی محور x ثابت شده‌اند. (الف) برحسب مضربی از فاصله‌ی L، در چه مختصه‌ای روی این محور، میدان الکتریکی خالص حاصل از این دو ذره برابر صفر می‌شود؟ (ب) طرحی از خطوط میدان الکتریکی خالص را در بین ذره‌ها و در اطراف آنها رسم کنید.



شکل ۲۲-۴۱ مسئله‌ی ۱۴

حل (الف) چون علامت دو بار مخالف هم است، مکان تعادل بار آزمون فرضی باید پشت باری باشد که قدر مطلقش از دیگری کوچک‌تر است، یعنی پشت بار $۲{,}۰۰q$. فاصله‌ی بار $-۵{,}۰۰q$ از محلی که میدان برابر صفر است را x می‌گیریم و با توجه به اینکه فاصله‌ی دو بار L است خواهیم داشت:

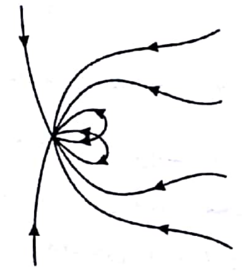
$$|\vec{E}_۱|=|\vec{E}_۲| \Rightarrow \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{|-۵q|}{x^۲}=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{۲q}{(x-L)^۲}$$

که به رابطه‌ی زیر می‌انجامد

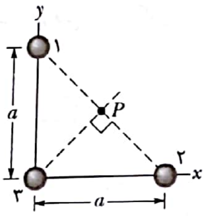
$$\frac{x-L}{x}=\sqrt{\frac{۲q}{۵q}}=\sqrt{\frac{۲}{۵}}$$

و از آنجا به $x=\dfrac{L}{۱-\sqrt{۲/۵}}\approx ۲{,}۷۲L$ می‌رسیم.

(ب) طرحی از خطوط میدان در پایین رسم شده است:



۱۵●● در شکل ۲۲-۴۲ سه ذره با بارهای $q_۱=q_۲=+e$ و بار $q_۳=+۲e$ در مکان‌های خود ثابت شده‌اند. فاصله‌ی a برابر با $۶{,}۰۰\,\mu\text{m}$ است. (الف) بزرگی و (ب) جهت میدان الکتریکی خالص حاصل از این ذرات در نقطه‌ی P چیست؟



شکل ۲۲-۴۲ مسئله‌ی ۱۵

حل (الف) براساس تقارن شکل درمی‌یابیم که میدان‌های حاصل از بارهای $q_۱=q_۲=+e$ همدیگر را در نقطه‌ی P خنثی می‌کنند و می‌ماند میدان حاصل از $q_۳=+۲e$ که باید آن را محاسبه کنیم. فاصله‌ی بار $q_۳=+۲e$ تا نقطه‌ی P با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورس برابر است با

$$r=\left(a^۲-\frac{a^۲}{۲}\right)^{\frac{۱}{۲}}=\left(\frac{a^۲}{۲}\right)^{\frac{۱}{۲}}$$

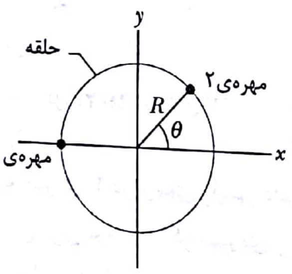
بنابراین، بزرگی میدان الکتریکی خالص چنین می‌شود:

$$|\vec{E}_{\text{net}}|=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{۲e}{r^۲}=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{۲e}{(a^۲/۲)}=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{۴e}{a^۲}$$

$$=(۸{,}۹۹\times۱۰^۹\,\text{N}\cdot\text{m}^۲/\text{C}^۲)\frac{۴(۱{,}۶۰\times۱۰^{-۱۹}\,\text{C})}{(۶{,}۰۰\times۱۰^{-۶}\,\text{m})^۲}=۱۶۰\,\text{N/C}$$

(ب) بدیهی است که سوی $\vec{E}_{\text{net}}$ در جهت ۴۵° پاد ساعتگرد نسبت به محور x است.

۱۶●●● شکل ۲۲-۴۳ حلقه‌ای پلاستیکی به شعاع $R=۵۰{,}۰\,\text{cm}$ را نشان می‌دهد. دو مهره‌ی باردار کوچک روی حلقه قرار دارند: مهره‌ی ۱ با بار $+۲{,}۰۰\mu\text{C}$ در جای خود در سمت چپ ثابت شده است؛ مهره‌ی ۲ با بار $+۶{,}۰۰\mu\text{C}$ می‌تواند روی حلقه جابه‌جا شود. این دو مهره، میدان الکتریکی خالصی به بزرگی E را در مرکز حلقه ایجاد می‌کنند. مهره‌ی ۲ در چه زاویه‌ای θی (الف) مثبت و (ب) منفی‌ای باید قرار داده شود تا بزرگی میدان الکتریکی خالص در مرکز حلقه برابر با $E=۲{,}۰۰\times۱۰^۵\,\text{N/C}$ شود؟



شکل ۲۲-۴۳ مسئله‌ی ۱۶

حل مؤلفه‌های میدن الکتریکی خالص در امتداد محورهای x و y عبارتند از:

Scanned by CamScanner

$$\vec{E}_{\text{net},x}=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R^2}-\frac{q_2\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \quad \text{و} \quad \vec{E}_{\text{net},y}=-\frac{q_2\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

بزرگی میدان الکتریکی خالص $E_{\text{net}}=\sqrt{E^2_{\text{net},x}+E^2_{\text{net},y}}$ است که برابر با $E=2.00\times10^5\ \text{N/C}$ می‌شود. با قرار دادن مؤلفه‌های میدان در آن و پس از به توان دو رساندن طرفین آن و کمی دستکاری به رابطه‌ی زیر می‌رسیم

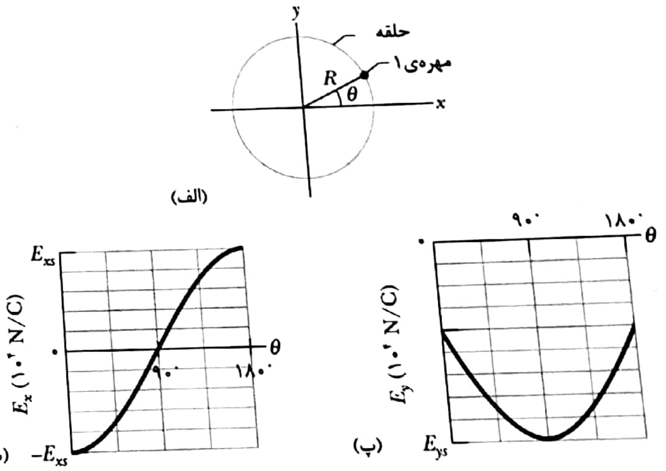
$$E^2=\frac{q_1^2+q_2^2-2q_1q_2\cos\theta}{16\pi^2\varepsilon_0^2R^4}$$

با قرار دادن $R=0.500\text{m}$، $q_1=2.00\times10^{-6}\ \text{C}$ و $q_2=6.00\times10^{-6}\ \text{C}$ و مقدار E در این رابطه، $\cos\theta$ به‌دست می‌آید. آنگاه با گرفتن کسینوس وارون، θ به‌دست خواهد آمد. دو جواب برای θ به‌دست خواهیم آورد.

(الف) زاویه‌ی با مقدار مثبت $\theta=67.8^\circ$.

(ب) زاویه‌ی با مقدار منفی $\theta=-67.8^\circ$.

۱۷●●● دو مهره‌ی باردار روی حلقه‌ی پلاستیکی شکل ۲۲-۴۴ الف قرار دارند. مهره‌ی ۲، که نشان داده نشده است، در جایی روی حلقه، به شعاع $R=60.0\text{cm}$، ثابت شده است مهره‌ی ۱ در ابتدا روی محور x در زاویه‌ی $\theta=0^\circ$ قرار دارد. این مهره سپس با عبور از ربع‌های اول و دوم دستگاه مختصات xy به سمت مقابل، در زاویه‌ی $\theta=180^\circ$، می‌رود. شکل ۲۲-۴۴ ب مؤلفه‌ی x میدان الکتریکی خالص حاصل از این دو مهره را در مبدأ، برحسب تابعی از θ، و شکل ۲۲-۴۴ پ مؤلفه‌ی y همان میدان را نشان می‌دهد. محورهای قائم با $E_{xs}=5.0\times10^4\ \text{N/C}$ و $E_{ys}=-9.0\times10^4\ \text{N/C}$ مقیاس‌بندی شده‌اند. (الف) مهره‌ی ۲ در چه زاویه‌ی θیی قرار گرفته است؟ بار (ب) مهره‌ی ۱ و (پ) مهره‌ی ۲ چقدر است؟



شکل ۲۲-۴۴ مسئله‌ی ۱۷

حل فرض می‌کنیم مهره‌ی ۲ در نیمه‌ی پایینی دایره ثابت شده است. بخشی از این فرض به این برمی‌گردد که اگر مهره‌ی ۲ در نیمه‌ی بالایی باشد، آنگاه مهره‌ی ۱ باید از روی آن بگذرد که غیرمنطقی است و بخش دیگر به این برمی‌گردد که به این ترتیب جواب دوم مسئله (که به زاویه و بار مخالف برای مهره‌ی ۲ می‌انجامد) حذف می‌شود. همچنین توجه کنید که مؤلفه‌ی y میدان الکتریکی به‌ازای تمام مکان‌های مهره‌ی ۱، مقداری منفی می‌شود (رو به پایین است) که این به همراه فرض ما نتیجه می‌دهد که بار مهره‌ی ۲ باید منفی باشد.

(الف) وقتی مهره‌ی ۱ روی محور $+y$ است، میدان الکتریکی خالص هیچ مؤلفه‌ی x ندارد که این حکایت از آن دارد که مهره‌ی ۲ روی محور $-y$ است و بنابراین زاویه‌ی آن برابر -90° است.

(ب) چون مؤلفه‌ی رو به پایین میدان خالص، وقتی مهره‌ی ۱ روی محور $+y$ است، بیشترین مقدار را دارد، بنابراین بار مهره‌ی ۱ باید مثبت باشد تا میدان آن در همان جهت میدان مهره‌ی ۲ قرار گیرد. با مقایسه‌ی مقادیر E_y در 0° و 90° درمی‌یابیم که نسبت قدرمطلق‌های بار روی مهره‌های ۱ و ۲ باید ۵ به ۴ باشد. با استفاده از منحنی E_x، بار مهره‌ی ۱ را می‌یابیم

$$q_1=4\pi\varepsilon_0 r^2E=4\pi(8.854\times10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(0.60\text{m})^2$$
$$\times(5.0\times10^4\ \text{N/C})=2.0\times10^{-6}\ \text{C}=2.0\mu\text{C}$$

که مثبت بودن بار q_1 را تأیید می‌کند.

(پ) به همین ترتیب با استفاده از مقدار E_y در 0°، بار مهره‌ی ۲ را می‌یابیم

$$q_2=4\pi\varepsilon_0 r^2E=4\pi(8.85\times10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(0.60\text{m})^2$$
$$\times(-4.0\times10^4\ \text{N/C})=-1.6\times10^{-6}\ \text{C}=-1.6\mu\text{C}$$

بخش ۲۲-۳ میدان الکتریکی حاصل از یک دوقطبی الکتریکی

۱۸●● میدان الکتریکی یک دوقطبی الکتریکی روی محور آن با معادله‌های ۲۲-۸ و ۲۲-۹ تقریب زده می‌شود. اگر با استفاده از قضیه‌ی دوجمله‌ای معادله‌ی ۲۲-۷ را بسط دهیم، جمله‌ی بعدی در عبارت میدان الکتریکی دوقطبی روی محور آن چه می‌شود؟ یعنی، $E_{\text{بعدی}}$ در عبارت زیر چیست؟

$$E=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{qd}{z^3}+E_{\text{بعدی}}$$

حل میدان الکتریکی حاصل از دوقطبی الکتریکی با معادله‌ی ۲۲-۶ داده می‌شود:

$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 z^2}\left[\left(1-\frac{d}{2z}\right)^{-2}-\left(1+\frac{d}{2z}\right)^{-2}\right]$$

ولی این بار با استفاده از قضیه‌ی دو جمله‌ای (پیوست ث کتاب مبانی فیزیک را ببینید) تا جمله‌های بیشتری از معادله‌ی ۲۲-۷ را نگه می‌داریم:

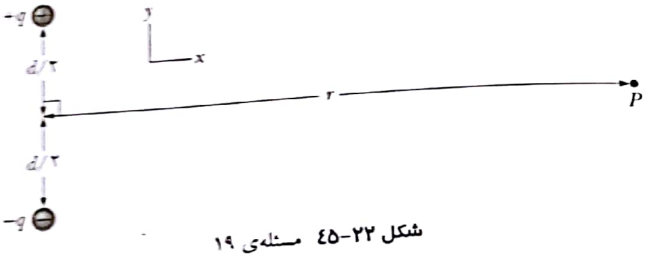
$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 z^2}\times\left[\left(1+\frac{d}{z}+\frac{3}{4}\frac{d^2}{z^2}+\frac{1}{2}\frac{d^3}{z^3}+\cdots\right)-\left(1-\frac{d}{z}+\frac{3}{4}\frac{d^2}{z^2}-\frac{1}{2}\frac{d^3}{z^3}+\cdots\right)\right]$$

$$=\frac{qd}{2\pi\varepsilon_0 z^3}+\frac{qd^3}{4\pi\varepsilon_0 z^5}+\cdots$$

بنابراین جمله‌ی مورد نظر در این مسئله $E_{\text{بعدی}}=qd^3/4\pi\varepsilon_0 z^5$ می‌شود.

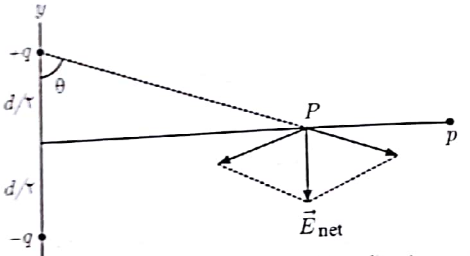
۱۹●●● شکل ۲۲-۴۵ یک دوقطبی الکتریکی را نشان می‌دهد. (الف) بزرگی و (ب) جهت (نسبت به سوی مثبت محور x) میدان الکتریکی دوقطبی در نقطه‌ی P واقع در فاصله‌ی $r\gg d$ چیست؟

Scanned by CamScanner



شکل ۲۲-۴۵ مسئله‌ی ۱۹

حل شکل زیر را در نظر بگیرید.



(الف) بزرگی میدان الکتریکی خالص در نقطه‌ی P برابر است با

$$|\vec E_{net}| = 2E_1\cos\theta = 2\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(d/2)^2+r^2}\right]\frac{d/2}{\sqrt{(d/2)^2+r^2}}$$

به‌ازای $r\gg d$، $\left[(d/2)^2+r^2\right]^{3/2}\approx r^3$ است و رابطه‌ی بالا به رابطه‌ی زیر تبدیل می‌شود

$$|E_{net}|\approx\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qd}{r^3}$$

(ب) از روی شکل واضح است که جهت میدان الکتریکی در نقطه‌ی P در راستای $-\hat{j}$ — و یا -90° نسبت به سوی $+x$ است.

••• ۲۰ معادله‌های ۲۲-۸ و ۲۲-۹ تقریب‌هایی از بزرگی میدان الکتریکی یک دوقطبی در نقاطی روی محور دوقطبی هستند. نقطه‌ی P را روی این محور به فاصله‌ی $z=5.00d$ از مرکز دوقطبی در نظر بگیرید (d فاصله‌ی میان ذره‌های دوقطبی است). $E_{\text{تقریبی}}$ را بزرگی میدان در نقطه‌ی P فرض کنید که با معادله‌های ۲۲-۸ و ۲۲-۹ تقریب زده شده است. $E_{\text{واقعی}}$ را بزرگی واقعی میدان در نظر بگیرید نسبت $E_{\text{تقریبی}}/E_{\text{واقعی}}$ چیست؟

حل طبق صورت مسئله، مقدار واقعی میدان $E_{\text{واقعی}}$ همان معادله‌ی ۲۲-۵ (با $z=5d$) است و بنابراین داریم

$$E_{(+)}-E_{(-)}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(4.5d)^2}-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(5.5d)^2}$$
$$=\frac{40q}{9801\pi\varepsilon_0 d^2}$$

و مقدار تقریبی میدان $E_{\text{تقریبی}}$ برابر است با

$$\frac{qd}{2\pi\varepsilon_0(5d)^3}=\frac{q}{250\pi\varepsilon_0 d^2}$$

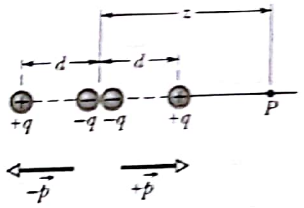
و از آنجا خواهیم داشت

$$\frac{E_{\text{تقریبی}}}{E_{\text{واقعی}}}=0.9801\approx0.980$$

••• ۲۱ چهارقطبی الکتریکی. شکل ۲۲-۴۶ یک چهارقطبی الکتریکی را نشان می‌دهد. این چهارقطبی شامل دو دوقطبی با گشتاورهای دوقطبی است که بزرگی آنها برابر و جهت آنها مخالف یکدیگر است. نشان دهید که مقدار E روی محور چهارقطبی در نقطه‌ی P به فاصله‌ی z از مرکز آن (با فرض $z\gg d$) با رابطه‌ی زیر داده می‌شود

$$E=\frac{3Q}{4\pi\varepsilon_0 z^4}$$

که در آن $Q(=2qd^2)$ گشتاور چهارقطبی توزیع بار خوانده می‌شود.



شکل ۲۲-۴۶ مسئله‌ی ۲۱

حل **روش اول.** اگر میدان حاصل از بار $+q$ جلویی را $\vec E_1$، میدان حاصل از بار $+q$ عقبی را $\vec E_2$ و میدان حاصل از بار $-2q$ را $\vec E_3$ بنامیم، از اصل برهم‌نهی خواهیم داشت:

$$\vec E_p=(E_1+E_2-E_3)\hat{k}$$

و از آنجا

$$E_p=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{(z-d)^2}+\frac{1}{(z+d)^2}-\frac{2}{z^2}\right]$$
$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{z^2(z+d)^2+z^2(z-d)^2-2(z-d)^2(z+d)^2}{(z-d)^2(z+d)^2z^2}\right]$$
$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{6z^2d^2-2d^4}{(z^2-d^2)^2z^2}\right]=\frac{6qz^2d^2}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1-d^2/3z^2}{z^2(z^2-d^2)^2}\right]$$

که به‌ازای $z\gg d$، $d^2/z^2\ll1$ و $z^2-d^2\approx z^2$ می‌شود و با توجه به اینکه $Q=2qd^2$ است، چنین به‌دست خواهیم آورد

$$E_p=\frac{3(2qd^2)z^2}{4\pi\varepsilon_0 z^2}=\frac{3Q}{4\pi\varepsilon_0 z^4}$$

روش دوم. می‌توانیم یک چهارقطبی را ترکیبی از دو دوقطبی، هر یک با بزرگی گشتاور دوقطبی $p=qd$ در نظر بگیریم. جهت این دو دوقطبی در خلاف یکدیگر است و بنابراین در نقطه‌ی P، میدان‌های الکتریکی حاصل از آنها در خلاف جهت یکدیگر است. نقطه‌ی P به فاصله‌ی z در طرف راست مرکز چهارقطبی است. بنابراین میدان الکتریکی حاصل از دوقطبی سمت راست $qd/2\pi\varepsilon_0(z-d/2)^3$ و میدان الکتریکی حاصل از دوقطبی سمت چپ $-qd/2\pi\varepsilon_0(z+d/2)^3$ می‌شود. با استفاده از بسط دو جمله‌ای داریم

$$(z-d/2)^{-3}\approx z^{-3}-3z^{-4}(-d/2) \quad \text{و} \quad (z+d/2)^{-3}$$
$$\approx z^{-3}-3z^{-4}(d/2)$$

Scanned by CamScanner

و از آنجا E_P چنین می‌شود:

$$E_p=\frac{qd}{۲\pi\varepsilon_۰}\left[\frac{۱}{z^۳}+\frac{۳d}{۲z^۴}-\frac{۱}{z^۳}+\frac{۳d}{۲z^۴}\right]=\frac{۶qd^۲}{۴\pi\varepsilon_۰ z^۴}$$

$$=\frac{۳Q}{۴\pi\varepsilon_۰ z^۴}$$

بخش ۲۲-۴ میدان الکتریکی حاصل از یک خط بار

۲۲• چگالی، چگالی، چگالی. (الف) بار $-۳۰۰e$ به‌طور یکنواخت روی کمانی دایره‌ای به شعاع ۴٫۰۰cm توزیع شده است که زاویه‌ای ۴۰° را در بر گرفته است. چگالی خطی بار روی این کمان چقدر است؟ (ب) بار $-۳۰۰e$ به‌طور یکنواخت روی یک طرف قرصی دایره‌ای به شعاع ۲٫۰۰cm توزیع شده است. چگالی سطحی بار روی این وجه قرص چقدر است؟ (پ) بار $-۳۰۰e$ به‌طور یکنواخت روی کره‌ای به شعاع ۲٫۰۰cm توزیع شده است. چگالی سطحی بار روی سطح این کره چقدر است؟ (ت) بار $-۳۰۰e$ به‌طور یکنواخت در سرتاسر حجم کره‌ای به شعاع ۲٫۰۰cm پخش شده است. چگالی حجمی بار داخل این کره چقدر است؟

حل (الف) چگالی خطی بار $\lambda=q/L$ است که در اینجا L طول کمان $(=r\theta)$ است که در آن θ بر حسب رادیان است. بنابراین داریم

$$L=(۰٫۰۴۰۰\text{m})(۰٫۶۹۸\text{rad})=۰٫۰۲۷۹\text{m}$$

(ب) همان بار روی سطح $A=\pi r^۲=\pi(۰٫۰۲۰۰\text{m})^۲$ توزیع شده است و بنابراین چگالی سطحی بار چنین می‌شود:

$$\sigma=\frac{q}{A_{\text{قرص}}}=\frac{-۳۰۰(۱٫۶۰\times۱۰^{-۱۹}\text{C})}{\pi(۰٫۰۲۰۰\text{m})^۲}=-۳٫۸۲\times۱۰^{-۱۴}\text{C/m}^۲$$

(پ) حال مساحت سطح چهار برابر بزرگ‌تر از سطوح قبلی است، زیرا $A_{\text{کره}}=۴\pi r^۲$ است. بنابراین پاسخ، $\frac{۱}{۴}$ پاسخ قسمت ب می‌شود

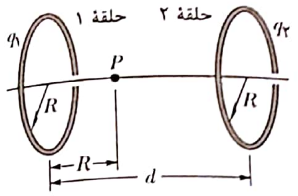
$$\sigma=\frac{q}{A_{\text{کره}}}=\frac{۱}{۴}(-۳٫۸۲\times۱۰^{-۱۴}\text{C/m}^۲)=-۹٫۵۶\times۱۰^{-۱۵}\text{C/m}^۲$$

(ت) حال همان بار در سرتاسر حجم کره که برابر با $۴\pi r^۳/۳$ است توزیع شده است و بنابراین چگالی حجمی بار چنین می‌شود

$$\rho=\frac{q}{V}=\frac{-۳۰۰(۱٫۶۰\times۱۰^{-۱۹}\text{C})}{۴\pi(۰٫۰۲۰۰\text{m})^۳/۳}$$

$$=۱٫۴۳\times۱۰^{-۱۲}\text{C/m}^۳$$

۲۳• شکل ۲۲-۴۷ دو حلقه‌ی نارسانای موازی را نشان می‌دهد که محورهای مرکزی آنها روی خط مشترکی قرار دارد. حلقه‌ی ۱ دارای بار یکنواخت $q_۱$ و شعاع R و حلقه‌ی ۲ دارای بار یکنواخت $q_۲$ و همان شعاع R است. حلقه‌ها به فاصله‌ای $d=۳٫۰۰R$ از هم قرار گرفته‌اند. میدان الکتریکی خالص در نقطه‌ی P واقع بر خط مشترک، به فاصله‌ی R از حلقه‌ی ۱، برابر با صفر است. نسبت $q_۱/q_۲$ چقدر است؟



شکل ۲۲-۴۷ مسئله‌ی ۲۳

حل میدانی که حلقه‌ی ۱ در نقطه‌ی P ایجاد می‌کند برابر است با

$$E_۱=\frac{q_۱R}{۴\pi\varepsilon_۰(R^۲+R^۲)^{۳/۲}}$$

و میدان حاصل از حلقه‌ی ۲ در نقطه‌ی P برابر است با

$$E_۲=\frac{q_۲(۲R)}{۴\pi\varepsilon_۰\left[(۲R)^۲+R^۲\right]^{۳/۲}}$$

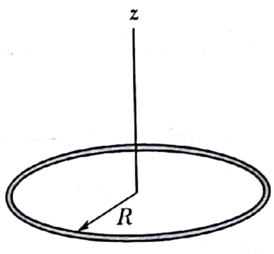
برای آنکه میدان الکتریکی خالص در نقطه‌ی P برابر صفر باشد باید داشته باشیم

$$E_۱=E_۲\quad\Rightarrow\quad\frac{q_۱}{(۲)^{۳/۲}}=\frac{۲q_۲}{(۵)^{۳/۲}}$$

و از آنجا خواهیم داشت:

$$\frac{q_۱}{q_۲}=۲\left(\frac{۲}{۵}\right)^{۳/۲}\approx۰٫۵۰۶$$

۲۴•• یک میله‌ی نارسانای نازک با توزیع بار مثبت یکنواخت Q به شکل دایره‌ای به شعاع R درآمده است (شکل ۲۲-۴۸). محور قائم عبوری از مرکز حلقه محور z است که مبداء آن در مرکز حلقه واقع است. بزرگی میدان الکتریکی حاصل از میله در (الف) $z=۰$ و (ب) $z=\infty$ چقدر است؟ (پ) برحسب R، در چه مقدار مثبتی از z، این بزرگی بیشینه است؟ (ت) اگر $R=۲٫۰۰\text{cm}$ و $Q=۵٫۰۰\mu\text{C}$ باشد، بزرگی این مقدار بیشینه چقدر است؟



شکل ۲۲-۴۸ مسئله‌ی ۲۴

حل (الف) از تقارن شکل مسئله (و نیز معادله‌ی ۲۲-۱۶، یعنی $E=qz/۴\pi\varepsilon_۰(z^۲+R^۲)^{۳/۲}$) واضح است که میدان در مرکز صفر می‌شود.

(ب) میدان الکتریکی برای نقاطی که به‌طور نامتناهی دور هستند را می‌توان مستقیماً از معادله‌ی ۲۲-۱۶ (این معادله در $z\to\infty$ به صورت $۱/z^۲$ رفتار می‌کند) یا از همان معادله‌ی آغازین که به آن انجامید (معادله‌ی ۲۲-۱۱، که به‌صورت $۱/r^۲$ رفتار می‌کند) دریافت، که $E=۰$ را به‌دست می‌دهد.

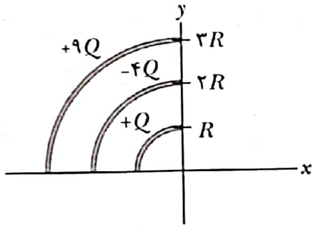
Scanned by CamScanner

(پ) از معادله‌ی ۲۲-۱۶ نسبت به z مشتق می‌گیریم و آن را برای به‌دست آوردن مکانی که E بیشینه است، برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$\frac{dE}{dz}=\frac{q(R^2-2z^2)}{4\pi\varepsilon_0(R^2+z^2)^{3/2}}=0 \Rightarrow z=+\frac{R}{\sqrt{2}}=0.707R$$

(ت) با قرار دادن این مقدار z به همراه سایر مقادیر صورت مسئله در معادله‌ی ۲۲-۱۶، به $E_{max}=3.46\times10^{7}\,N/C$ می‌رسیم.

۲۵•• شکل ۲۲-۴۹ سه کمان دایره‌ای را نشان می‌دهد که در مبداء یک دستگاه مختصات هم‌مرکزند. روی هر کمان، بارهایی که برحسب $Q=2.00\mu C$ نشان داده شده‌اند، به‌طور یکنواخت توزیع شده است. شعاع‌ها برحسب $R=10.0cm$ داده شده‌اند. (الف) بزرگی و (ب) جهت (نسبت به سوی مثبت x) میدان الکتریکی حاصل از کمان‌ها در مبدأ چیست؟



شکل ۲۲-۴۹ مسئله‌ی ۲۵

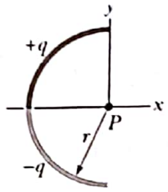
حل (الف) طول کوچک‌ترین کمان $L_1=\pi r_1/2=\pi R/2$ است؛ طول کمان میانی برابر با $L_2=\pi r_2/2=\pi(2R)/2=\pi R$ است؛ و طول بزرگ‌ترین کمان $L_3=\pi(3R)/2$ است. بار در واحد طول هر کمان $\lambda=q/L$ است که q در شکل مشخص شده است. میدان الکتریکی یک کمان را در مسئله‌ی ۲۹ به‌دست می‌آوریم (به حل آن مسئله رجوع کنید) و از آنجا میدان الکتریکی خالص حاصل از سه کمان به‌ازای $\theta=90°$ چنین می‌شود:

$$E_{net}=\frac{\lambda_1[\sin(45°)]}{2\pi\varepsilon_0 r_1}+\frac{\lambda_2[\sin(45°)]}{2\pi\varepsilon_0 r_2}+\frac{\lambda_3[\sin 45°]}{2\pi\varepsilon_0 r_3}$$
$$=\frac{Q}{\sqrt{2}\pi^2\varepsilon_0 R^2}$$

که به ازای $Q=2.00\times10^{-6}C$ و $R=0.100m$ به $E_{net}=1.62\times10^{6}\,N/C$ می‌انجامد.

(ب) جهت میدان الکتریکی حاصل، با توجه به تقارن شکل، $-45°$ پادساعتگرد نسبت به سوی مثبت محور x می‌شود.

۲۶•• ILW GO در شکل ۲۲-۵۰ یک میله‌ی شیشه‌ای نازک به شکل نیم‌دایره‌ای با شعاع $r=5.00cm$ درآمده است. بار به‌طور یکنواخت روی میله توزیع شده است، با $+q=4.50pC$ روی نیمه‌ی بالایی و $-q=-4.50pC$ روی نیمه‌ی پایینی. (الف) بزرگی و (ب) جهت (نسبت به سوی مثبت محور x) میدان الکتریکی $\vec{E}$ در نقطه‌ی P واقع بر مرکز این نیم‌دایره چیست؟



شکل ۲۲-۵۰ مسئله‌ی ۲۶

حل (الف) از تقارن شکل واضح است که مؤلفه‌های x میدان همدیگر را خنثی می‌کنند و میدان در جهت $-\hat{j}$ می‌شود و داریم:

$$E_p=\int_{3\pi/2}^{\pi/2}dE\cos\theta=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\int_{3\pi/2}^{\pi/2}R\cos\theta\, d\theta$$
$$=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}[\sin\pi/2-\sin 3\pi/2]=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}=\frac{q/(\pi R/2)}{2\pi\varepsilon_0 R}$$
$$=\frac{4q}{4\pi\varepsilon_0\pi R^2}=\frac{(8.99\times10^{9}N.m^2/C^2)4(4.50\times10^{-12}C)}{\pi(5.00\times10^{-2}m)^2}$$
$$=20.6\,N/C$$

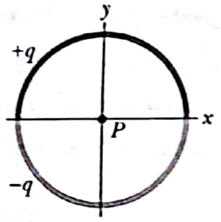
روش دیگر. می‌توانیم θ را مشابه مسئله‌ی نمونه ۲۲-۳ کتاب، زاویه‌ی مرکزی مقابل کمان بگیریم. منتها توجه کنید که در اینجا دو کمان (یکی باردار مثبت و دیگری باردار منفی) داریم و بنابراین میدان الکتریکی خالص در نقطه‌ی P چنین می‌شود:

$$\vec{E}_{net}=2(-\hat{j})\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(\sin\theta\Big|_{-\theta/2}^{+\theta/2}\right)(\cos\theta/2)$$

که در آن $\lambda=q/r\theta$ و در اینجا $\theta=\pi/2$ است.

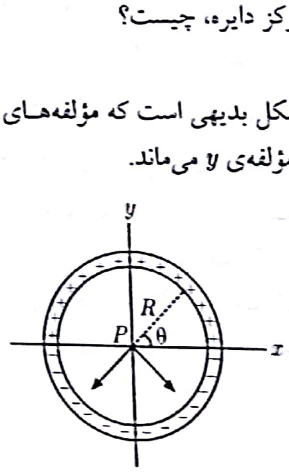
(ب) همان‌طور که در بالا اشاره شد، جهت میدان الکتریکی در راستای $-\hat{j}$ و $-90°$ پادساعتگرد نسبت به محور $+x$ است.

۲۷•• GO در شکل ۲۲-۵۱، دو میله‌ی پلاستیکی خمیده، یکی با بار $+q$ و دیگری با بار $-q$ تشکیل دایره‌ای به شعاع $R=8.50cm$ را در صفحه‌ی xy داده‌اند. محور x از هر دو نقطه‌ی اتصال میله‌ها می‌گذرد، و بار روی هر دو میله به‌طور یکنواختی توزیع شده است. اگر $q=15.0pC$ باشد، (الف) بزرگی و (ب) جهت (نسبت به سوی مثبت محور x) میدان الکتریکی ایجاد شده در نقطه‌ی P واقع در مرکز دایره، چیست؟



شکل ۲۲-۵۱ مسئله‌ی ۲۷

حل از تقارن شکل بدیهی است که مؤلفه‌های x میدان همدیگر را خنثی می‌کنند و تنها مؤلفه‌ی y می‌ماند.



Scanned by CamScanner

میدان الکتریکی حاصل از هر نیمه برابر است با

$$E_1=\int dE\sin\theta=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq\sin\theta}{R^2}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{ds}{R^2}\sin\theta$$

$$=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\int_0^{\pi}R\sin\theta\,d\theta=-\frac{q/\pi R}{4\pi\varepsilon_0 R}[\cos\pi-\cos 0]$$

$$=\frac{q}{2\pi^2R^2\varepsilon_0}$$

این، میدان الکتریکی حاصل از یکی از نیمه‌هاست. طبق اصل برهم‌نهی، میدان الکتریکی برایند در نقطه‌ی P چنین می‌شود

$$E_p=2E_1=\frac{q}{\pi^2R^2\varepsilon_0}$$

که جهت آن در راستای $-\hat{\mathbf{j}}$ می‌شود.

(الف) به‌ازای $R=8{,}50\times10^{-2}\,\mathrm{m}$ و $q=1{,}50\times10^{-8}\,\mathrm{C}$، بزرگی میدان الکتریکی برایند در نقطه‌ی P چنین می‌شود:

$$\left|\vec{E}_p\right|=23{,}8\,\mathrm{N/C}$$

روش دیگر. می‌توانیم به جای آنکه θ را مطابق شکل بالا بگیریم، مشابه مسئله‌ی نمونه۲۲-۳ کتاب آن را زاویه‌ی مرکزی مقابل کمان بگیریم. در آن صورت مشابه همان مسئله به میدان الکتریکی زیر می‌رسیم:

$$\vec{E}_{\text{خالص}}=2(-\hat{\mathbf{j}})\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\sin\theta\Big|_{-90}^{+90}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}(-\hat{\mathbf{j}})$$

ضریب ۲ در رابطه‌ی بالا سهم نیمه‌ی دیگر را نشان می‌دهد.

(ب) همان‌طور که اشاره شد، میدان الکتریکی برایند در جهت $-\hat{\mathbf{j}}$ یا $-90°$ پادساعتگرد نسبت به سوی مثبت محور x است.

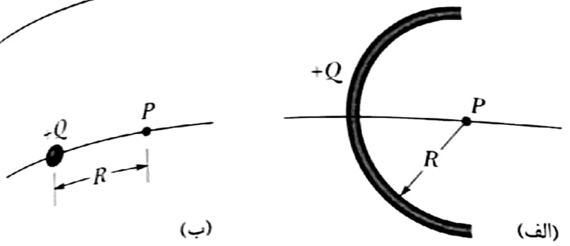
۲۸●● بار روی حلقه‌ای به شعاع $R=2{,}40\,\mathrm{cm}$ به‌طور یکنواخت توزیع شده است، و بزرگی E ی میدان الکتریکی حاصل از آن روی محور مرکزی (عمود بر صفحه‌ی حلقه) اندازه گرفته می‌شود. در چه فاصله‌ای از مرکز حلقه، E بیشینه است؟

حل برای یافتن بیشینه، از معادله‌ی ۲۲-۱۶ نسبت به z مشتق می‌گیریم و نتیجه‌ی آن را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{qz}{4\pi\varepsilon_0(z^2+R^2)^{3/2}}\right)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R^2-2z^2}{(z^2+R^2)^{5/2}}=0$$

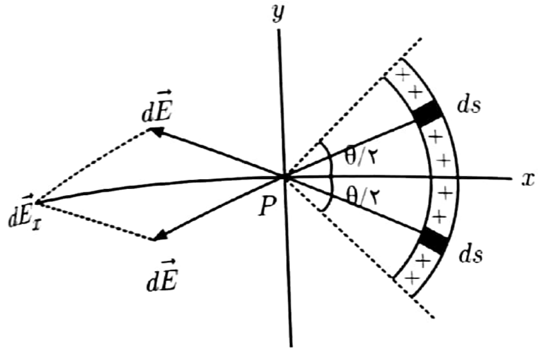
که به $z=R/\sqrt{2}$ می‌انجامد. از آنجا به‌ازای $R=2{,}40\,\mathrm{cm}$، به $z=1{,}70\,\mathrm{cm}$ می‌رسیم.

۲۹●● GO شکل ۲۲-۵۲ الف میله‌ی نارسانایی با توزیع بار یکنواخت $+Q$ را نشان می‌دهد. میله به شکل نیم‌دایره‌ای به شعاع R درآمده است و میدان الکتریکی به بزرگی $E_{\text{کمان}}$ را در مرکز خمیدگی P ایجاد می‌کند. اگر این کمان به شکل نقطه‌ای در فاصله‌ی R از P متمرکز شود (شکل ۲۲-۴۷ ب)، بزرگی میدان الکتریکی حاصل در نقطه‌ی P با چه مضربی افزایش می‌یابد؟



شکل ۲۲-۵۲ مسئله‌ی ۲۹

حل در ابتدا به رابطه‌ای برای میدان الکتریکی حاصل از کمان نیاز داریم. از نماد λ برای چگالی خطی بار $\lambda=Q/L$ استفاده می‌کنیم که در آن $L=r\theta$ و θ بر حسب رادیان است.



بدیهی است که مؤلفه‌های y میدان الکتریکی همدیگر را در نقطه‌ی P خنثی می‌کنند و تنها مؤلفه‌ی x میدان می‌ماند:

$$E_{\text{کمان}}=\int dE_x=\int_{-\theta/2}^{\theta/2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r^2}\cos\theta\, r\,d\theta$$

$$=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}\int_{-\theta/2}^{\theta/2}\cos\theta\,d\theta=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}[\sin\theta]_{-\theta/2}^{\theta/2}$$

$$=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}[\sin(\theta/2)-\sin(-\theta/2)]=\frac{\lambda\sin(\theta/2)}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

با توجه به اینکه $r=R$ است، خواهیم داشت

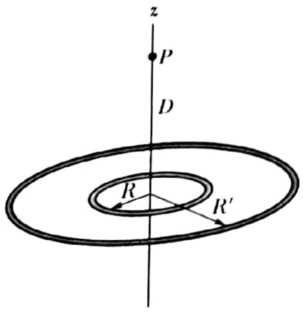
$$E_{\text{کمان}}=\frac{Q/L\sin(\theta/2)}{2\pi\varepsilon_0 R}=\frac{Q\sin(\theta/2)}{2\pi\varepsilon_0\theta R^2}$$

مسئله به‌ازای $\theta=\pi$، کمان E/ذره E را می‌خواهد که ذره E با معادله‌ی ۲۲-۳ داده می‌شود. از آنجا خواهیم داشت

$$\frac{E_{\text{ذره}}}{E_{\text{کمان}}}=\frac{Q/4\pi\varepsilon_0 R^2}{Q\sin(\pi/2)/2\pi^2\varepsilon_0 R^2}=\frac{\pi}{2}\approx1{,}57$$

۳۰●● GO شکل ۲۲-۵۳ دو حلقه‌ی هم‌مرکز به شعاع‌های R و $R'=3{,}00R$ را نشان می‌دهد که روی یک صفحه قرار دارند. نقطه‌ی P واقع بر محور مرکزی z، به فاصله‌ی $D=2{,}00R$ از مرکز حلقه‌ها قرار دارد. حلقه‌ی کوچک‌تر دارای بار $+Q$ است که به‌طور یکنواختی توزیع شده است. اگر میدان الکتریکی خالص در نقطه‌ی P برابر صفر باشد، برحسب Q چه باری به‌طور یکنواخت روی حلقه‌ی بزرگتر توزیع شده است؟

Scanned by CamScanner



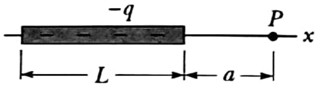
شکل ۲۲-۵۳ مسئله‌ی ۳۰

حل از معادله‌ی ۲۲-۱۶ (میدان حاصل از یک حلقه‌ی باردار) استفاده می‌کنیم. توجه کنید که در اینجا q بار روی حلقه‌ی بزرگ‌تر است:

$$\frac{Qz}{۴\pi\varepsilon_۰(z^۲+R^۲)^{۳/۲}}+\frac{qz}{۴\pi\varepsilon_۰(z^۲+(۳R)^۲)^{۳/۲}}=۰$$

و از آنجا به‌ازای $z=۲R$، $q=-Q\left(\frac{۱۳\sqrt{۱۳}}{۵\sqrt{۵}}\right)$ می‌شود که به $q\approx-۴٫۱۹Q$ می‌انجامد.

۳۱●● WWW ILW در شکل ۲۲-۵۴، یک میله‌ی نارسانا به طول $L=۸٫۱۵\,cm$ دارای بار $-q=-۴٫۲۳\,fC$ است که به‌طور یکنواخت روی طول آن توزیع شده است. (الف) چگالی خطی بار میله چقدر است؟ (ب) بزرگی و (پ) جهت (نسبت به سوی مثبت محور x) میدان الکتریکی حاصل در نقطه‌ی P، به فاصله‌ی $a=۱۲٫۰\,cm$ از میله چیست؟ بزرگی میدان الکتریکی حاصل از (ت) میله و (ث) ذره‌ای با بار $-q=-۴٫۲۳\,fC$ که جایگزین میله می‌شود در فاصله‌ی $a=۵۰\,m$ چقدر است؟ (در این فاصله، میله شبیه یک ذره "به‌نظر می‌رسد".)

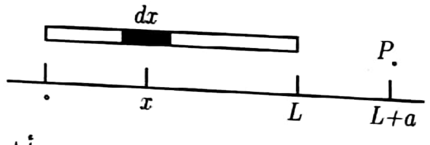


شکل ۲۲-۵۴ مسئله‌ی ۳۱

حل (الف) چگالی خطی بار برابر با بار در واحد طول میله است. چون بار به طور یکنواختی روی میله توزیع شده است، داریم

$$\lambda=\frac{-q}{L}=\frac{-۴٫۲۳\times۱۰^{-۱۵}\,C}{۰٫۰۸۱۵\,cm}=-۵٫۱۹\times۱۰^{-۱۴}\,C/m$$

(ب) محور x را در راستای میله به گونه‌ای اختیار کنید که سمت چپ میله، مطابق شکل، در مبدأ آن قرار داشته باشد.



dx یک عنصر دیفرانسیلی از میله در فاصله‌ی x از مبدأ است. بار در این جزء دیفرانسیلی برابر با $dq=\lambda dx$ می‌شود. بار dq را می‌توان مثل یک بار نقطه‌ای در نظر گرفت و میدان الکتریکی حاصل از آن را محاسبه کرد. از روی شکل بدیهی است که میدان الکتریکی در نقطه‌ی P فقط مؤلفه‌ی x دارد و از رابطه‌ی زیر تعیین می‌شود

$$dE_x=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{\lambda dx}{(L+a-x)^۲}$$

میدان الکتریکی کل که توسط کل میله در نقطه‌ی P حاصل می‌شود با انتگرال‌گیری از رابطه‌ی بالا به‌دست می‌آید:

$$E_x=\frac{\lambda}{۴\pi\varepsilon_۰}\int_۰^L\frac{dx}{(L+a-x)^۲}=\frac{\lambda}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{۱}{L+a-x}\Big|_۰^L$$

$$=\frac{\lambda}{۴\pi\varepsilon_۰}\left(\frac{۱}{a}-\frac{۱}{L+a}\right)=\frac{\lambda}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{L}{L+a}$$

$$=-\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{q}{a(L+a)}$$

که در آن $\lambda=-q/L$ قرار داده شد. به‌ازای $q=۴٫۲۳\times۱۰^{-۱۵}C$، $L=۰٫۰۸۱۵m$ و $a=۰٫۱۲۰m$ به $E_x=-۱٫۵۷\times۱۰^{-۳}\,N/C$ می‌رسیم.

(پ) علامت منفی نشان می‌دهد که جهت میدان الکتریکی در سوی $-x$، یا $-۱۸۰°$ پادساعتگرد نسبت به محور $+x$ است.

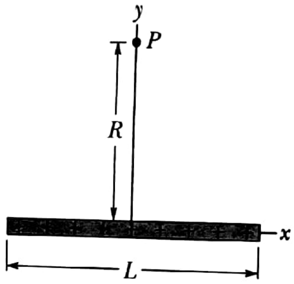
(ت) اگر a خیلی بزرگ‌تر از L باشد، آنگاه در مخرج کسر می‌توان به‌جای $L+a$ مقدار a را قرار داد و از آنجا خواهیم داشت

$$E_x=-\frac{q}{۴\pi\varepsilon_۰a^۲}$$

چون $a=۵۰m\gg L=۰٫۰۸۱۵m$ است، تقریباً رابطه‌ی بالا به کار می‌آید و از آنجا $E_x=-۱٫۵۲\times۱۰^{-۸}N/C$ و یا $|E_x|=۱٫۵۲\times۱۰^{-۸}N/C$ می‌شود.

(ث) برای ذره‌ای به بار $-q=-۴٫۲۳\times۱۰^{-۱۵}C$، میدان الکتریکی در فاصله‌ی $a=۵۰m$ دارای بزرگی $|E_x|=۱٫۵۲\times۱۰^{-۸}N/C$ می‌شود.

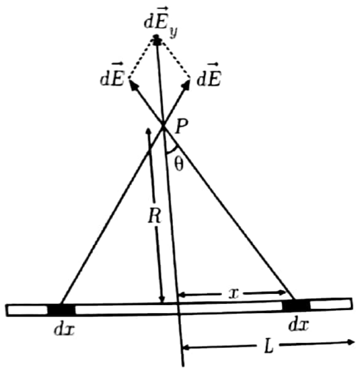
۳۲●●● GO در شکل ۲۲-۵۵، بار مثبت $q=۷٫۸۱pC$ به‌طور یکنواخت روی میله‌ی نارسانای نازکی به طول $L=۱۴٫۵cm$ پخش شده است. (الف) بزرگی و (ب) جهت (نسبت به سوی محور x) میدان الکتریکی حاصل در نقطه‌ی P، به فاصله‌ی $R=۶٫۰۰cm$ از میله، در امتداد عمود منصف آن چیست؟



شکل ۲۲-۵۵ مسئله‌ی ۳۲

حل دو عنصر دیفرانسیلی متقارن از میله‌ی نازک را در نظر می‌گیریم که در هر کدام بار $dq=\lambda dx$ قرار دارد و $\lambda=q/L$ است. از روی تقارن شکل بدیهی است که مؤلفه‌های x میدان الکتریکی همدیگر را خنثی می‌کنند و میدان الکتریکی در جهت y است.

Scanned by CamScanner



(الف)

$$E=\int dE_y=\int_{-L/2}^{+L/2} dE\cos\theta$$

$$=\frac{2}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{+L/2}\left(\frac{\lambda dx}{R^2+x^2}\right)\left(\frac{R}{\sqrt{R^2+x^2}}\right)$$

$$=\frac{2\lambda R}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{+L/2}\frac{dx}{(R^2+x^2)^{3/2}}$$

حال تغییر متغیر زیر را می‌دهیم

$$z=R\tan\theta \Rightarrow dx=R\sec^2\theta\, d\theta$$

$$x^2+R^2=R^2(1+\tan^2\theta)=R^2\sec^2\theta$$

با قرار دادن روابط بالا در E خواهیم داشت

$$E=\frac{2\lambda y}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{R\sec^2\theta}{R^3\sec^3\theta}d\theta=\frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\cos\theta\, d\theta$$

$$=\frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}(\sin\theta_2-\sin\theta_1)$$

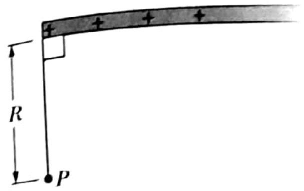
توجه شود که θ_1 زاویه‌ی مربوط به $x=0$ و $\theta_1=0$ زاویه‌ی مربوط به $x=L/2$ است. بنابراین به‌ازای $x=0$، $\theta_1=0$ و به‌ازای $x=L/2$، $\sin\theta_2=\frac{L/2}{\sqrt{L^2/4+R^2}}$ می‌شود. در نتیجه E چنین می‌شود

$$E=\frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\frac{L/2}{\sqrt{L^2/4+R^2}}=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 R}\frac{1}{\sqrt{L^2+4R^2}}$$

که به‌ازای $q=7{,}81\times10^{-12}\,C$، $L=0{,}145\,m$ و $R=0{,}0600\,m$ به $E=12{,}4\,N/C$ می‌انجامد.

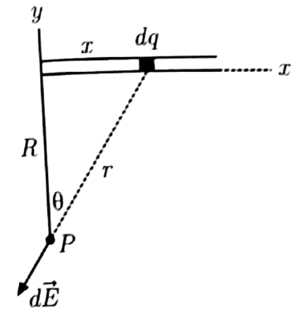
(ب) همان‌طور که گفتیم جهت میدان الکتریکی در راستای $+y$ یا $+90°$ پادساعتگرد نسبت به سوی $+x$ است.

۳۳●●● GO در شکل ۲۲-۵۶، یک میله‌ی نارسانای "نیمه متناهی" (یعنی میله‌ای که فقط از یک طرف نامتناهی است) دارای چگالی خطی بار λ است. نشان دهید میدان الکتریکی $\vec{E}_p$ در نقطه‌ی P با میله زاویه‌ی $45°$ می‌سازد و این نتیجه مستقل از فاصله‌ی R است. (*راهنمایی:* مؤلفه‌های $\vec{E}_p$ی موازی با میله و عمود بر آن را به‌طور جداگانه پیدا کنید.)



شکل ۲۲-۵۶ مسئله‌ی ۳۳

حل یک عنصر دیفرانسیلی از میله به طول dx و به فاصله‌ی x از انتهای چپ میله را مطابق شکل در نظر می‌گیریم و سهم میدان الکتریکی حاصل از آن را بررسی می‌کنیم.



این عنصر دارای بار $dq=\lambda dx$ و به فاصله‌ی r از P است. بزرگی میدانی که در نقطه‌ی P ایجاد می‌شود با رابطه‌ی زیر داده می‌شود:

$$dE=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dx}{r^2}$$

که مؤلفه‌های x و y آن به‌ترتیب $dE_x=dE\sin\theta$ (رو به سمت چپ) و $dE_y=dE\sin\theta$ (رو به پایین) است. مؤلفه‌ی موازی میدان چنین می‌شود

$$E_x=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\infty}\frac{\lambda dx}{R^2+x^2}\sin\theta$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\left(\frac{\lambda dx}{R^2+x^2}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\right)$$

$$=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\infty}\frac{x dx}{(R^2+x^2)^{3/2}}$$

با تغییر متغیر $R^2+x^2=u$ به $2x dx=du$ می‌رسیم و آنگاه با گذاشتن این مقادیر خواهیم داشت:

$$E_x=\frac{\lambda}{8\pi\varepsilon_0}\int_{u_1}^{u_2}u^{-3/2}du=\frac{-\lambda}{4\pi\varepsilon_0}u^{-1/2}\Big|_{R^2}^{\infty}=\frac{\lambda}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}R}$$

و برای مؤلفه‌های قائم داریم

$$E_y=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\infty}\frac{\lambda dx}{R^2+x^2}\cos\theta$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\infty}\left(\frac{\lambda dx}{R^2+x^2}\right)\left(\frac{R}{\sqrt{R^2+x^2}}\right)$$

$$=\frac{\lambda R}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\infty}\frac{dx}{(R^2+x^2)^{3/2}}$$

Scanned by CamScanner

این بار تغییر متغیر $x = R\tan\theta$ را می‌دهیم که از آنجا به $R^۲ + x^۲ = R^۲\sec^۲\theta$ و $dx = R\sec^۲\theta\, d\theta$ می‌رسیم. با قرار دادن این مقادیر خواهیم داشت

$$E_y = \frac{\lambda R}{۴\pi\varepsilon_۰}\int_۰^{\pi/۲} \frac{R\sec^۲\theta}{R^۳\sec^۳\theta} d\theta = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰ R}\int_۰^{\pi/۲} \cos\theta\, d\theta$$

$$= \frac{\lambda}{۴\pi\varepsilon_۰ R}\sin\theta \Big|_۰^{\pi/۲} = \frac{\lambda}{۴\pi\varepsilon_۰ R}$$

با توجه به اینکه مؤلفه‌های افقی و قائم میدان بی‌توجه به مقدار R همواره با هم برابرند نتیجه می‌گیریم که $\vec{E}$ به‌ازای تمام مقادیر R، زاویه‌ی $۴۵°$ با میله می‌سازد.

بخش ۲۲-۵ میدان الکتریکی حاصل از یک قرص باردار

۳۴ ● قرصی به شعاع $۲/۵\text{cm}$ دارای چگالی سطحی باری برابر با $۵/۳\,\mu\text{C/m}^۲$ روی وجه بالایی خود است. بزرگی میدان الکتریکی حاصل در نقطه‌ای روی محور مرکزی به فاصله‌ی $z = ۱۲\text{cm}$ از قرص چقدر است؟

حل از معادله‌ی ۲۲-۲۶ داریم

$$E = \frac{\sigma}{۲\varepsilon_۰}\left(۱ - \frac{z}{\sqrt{z^۲ + R^۲}}\right)$$

$$= \frac{۵/۳\times۱۰^{-۶}\,\text{C/m}^۲}{۲(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲}\,\text{C}^۲/\text{N}\cdot\text{m}^۲)}\left[۱ - \frac{۱۲\text{cm}}{\sqrt{(۱۲\text{cm})^۲ + (۲/۵\text{cm})^۲}}\right]$$

$$= ۶/۳\times۱۰^۳\,\text{N/C}$$

۳۵ ● WWW در چه فاصله‌ای روی محور قائم مرکزی یک قرص پلاستیکیِ باردار یکنواخت به شعاع $۰/۶۰۰\text{m}$، بزرگی میدان الکتریکی برابر با نصف بزرگی میدان درمرکز سطح قرص می‌شود؟

حل بزرگی میدان الکتریکی در نقطه‌ای روی محور مرکزی قرصی که به‌طور یکنواخت باردار شده است از معادله‌ی ۲۲-۲۶ به‌دست می‌آید:

$$E = \frac{\sigma}{۲\varepsilon_۰}\left[۱ - \frac{z}{\sqrt{z^۲ + R^۲}}\right]$$

که در آن R شعاع قرص و σ چگالی بار سطحی روی قرص است. بزرگی میدان در مرکز قرص $(z = ۰)$ برابر با $E_c = \sigma/۲\varepsilon_۰$ می‌شود. به‌دنبال آن مقداری از z می‌گردیم که به‌ازای آن $E = \frac{۱}{۲}E_c$ شود:

$$\frac{\sigma}{۲\varepsilon_۰}\left[۱ - \frac{z}{\sqrt{z^۲ + R^۲}}\right] = \frac{۱}{۲}\frac{\sigma}{۲\varepsilon_۰}$$

و یا

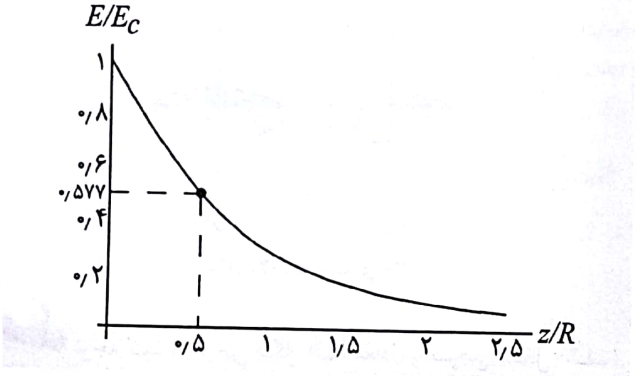
$$۱ - \frac{z}{\sqrt{z^۲ + R^۲}} = \frac{۱}{۲} \;\Rightarrow\; \frac{z}{\sqrt{z^۲ + R^۲}} = \frac{۱}{۲}$$

آنگاه با به توان دو رساندن طرفین این معادله به $z^۲ = z^۲/۴ + R^۲/۴$ و یا $z = R/\sqrt{۳}$ می‌رسیم، که به‌ازای $R = ۰/۶۰۰\text{m}$، به $z = ۰/۳۴۶\text{m}$ می‌انجامد.

تبصره. جالب است که نسبت E/E_c را برحسب z/R رسم کنیم. به این منظور E/E_c را باید به‌صورت زیر بنویسیم

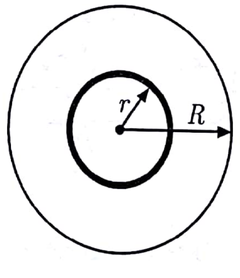
$$\frac{E}{E_c} = ۱ - \frac{z}{R}\Bigg/\sqrt{\left(\frac{z}{R}\right)^۲ + ۱}$$

از روی نمودار درمی‌یابیم که واقعاً در $\frac{z}{R} = \frac{۰/۳۴۶\text{m}}{۰/۶۰۰\text{m}} = ۰/۵۷۷$، این نسبت برابر $\frac{۱}{۲}$ می‌شود.



۳۶ ●● یک قرص پلاستیکی به شعاع $R = ۲/۰۰\text{cm}$ دارای بار $Q = +(۲/۰۰\times۱۰^۶)e$ روی یک وجه خود است که به‌طور یکنواخت توزیع شده است. حلقه‌ای دایره‌ای به پهنای $۳۰\,\mu\text{m}$ هم‌مرکز با قرص روی آن وجه قرار گرفته است، طوری که مرکز پهنای آن در شعاع $r = ۰/۵۰\text{cm}$ قرار دارد. برحسب کولن، چه باری در داخل پهنای حلقه قرار گرفته است؟

حل حلقه‌ی دایره‌ای را می‌توانیم بخشی از قرص در نظر بگیریم. استفاده از $dA = ۲\pi r\, dr$ (که می‌توان آن را از مشتق $A = \pi r^۲$ دریافت) و $dq = \sigma dA$ (از تعریف چگالی سطحی بار σ) خواهیم داشت



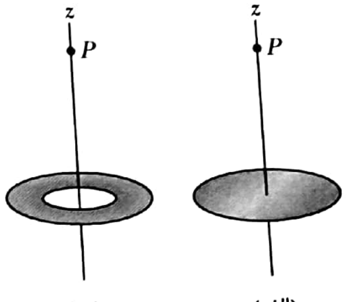
$$dq = \left(\frac{Q}{\pi R^۲}\right)۲\pi r\, dr$$

که در آن از این واقعیت که قرص به‌طور یکنواختی باردار شده است استفاده کرده‌ایم، به‌گونه‌ای که می‌توان چگالی سطحی بار را برابر با بار ک

Scanned by CamScanner

(Q) بخش بر مساحت کل ($\pi R^{۲}$) در نظر گرفت. آنگاه با قرار دادن $r=۰٫۰۰۵۰\text{m}$ و مقدار تقریبی $dr=۳۰\times۱۰^{-۶}\text{ m}$ به $dq=۲٫۴\times۱۰^{-۱۶}\text{C}$ می‌رسیم.

۳۷●● فرض کنید شما وسیله‌ای را طراحی کرده‌اید که در آن یک قرص باردار یکنواخت به شعاع R میدانی الکتریکی را ایجاد کند. مهمترین چیز برای شما، بزرگی میدان الکتریکی روی محور عمودی مرکزی قرص در نقطه‌ی P به فاصله‌ی $۲٫۰۰R$ از قرص است (شکل ۲۲–۵۷ الف). برآورد هزینه‌ها شما را وامی‌دارد که قرص را با حلقه‌ای با همان شعاع خارجی R ولی با شعاع داخلی $R/۲٫۰۰$ جایگزین کنید (شکل ۲۲–۵۷ ب). فرض کنید این حلقه همان چگالی سطحی بار قرص اولیه را دارد. اگر این حلقه را برگزینید، بزرگی میدان الکتریکی در نقطه‌ی P با چه درصدی کاهش پیدا می‌کند؟



شکل ۲۲–۵۷ مسئله‌ی ۳۷

حل توجه کنید که قرص شکل (ب) معادل با قرص شکل (الف) **به‌علاوه‌ی** یک قرص هم‌مرکز کوچک‌تر (به شعاع $R/۲$) با چگالی بار σ **با علامت مخالف** است. بنابراین از معادله‌ی ۲۲–۲۶ داریم

$$E_{(b)}=E_{(a)}-\frac{\sigma}{۲\varepsilon_0}\left(۱-\frac{۲R}{\sqrt{(۲R)^۲+(R/۲)^۲}}\right)$$

که در آن

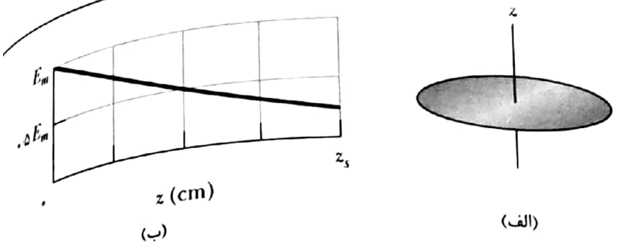
$$E_{(a)}=\frac{\sigma}{۲\varepsilon_0}\left(۱-\frac{۲R}{\sqrt{(۲R)^۲+R^۲}}\right)$$

از آنجا اختلاف نسبی را به‌دست می‌آوریم. پس از کمی ساده‌سازی خواهیم داشت:

$$\frac{E_{(a)}-E_{(b)}}{E_{(b)}}=\frac{۱-\dfrac{۲}{\sqrt{۴+\frac{۱}{۴}}}}{۱-\dfrac{۲}{\sqrt{۴+۱}}}=۰٫۲۸۳$$

که ٪۲۸٫۳ می‌شود.

۳۸●● شکل ۲۲–۵۸ الف قرصی با بار یکنواخت را نشان می‌دهد. محور مرکزی z عمود بر سطح قرص است و مبداء آن روی قرص قرار دارد. شکل ۲۲–۵۸ ب بزرگی میدان الکتریکی را روی این محور برحسب بیشینه‌ی بزرگی E_m آن بر سطح قرص نشان می‌دهد. محور z با $z_s=۸٫۰\text{cm}$ مقیاس‌بندی شده است. شعاع قرص چقدر است؟



شکل ۲۲–۵۸ مسئله‌ی ۳۸

حل معادله‌ی ۲۲–۲۶ را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$\frac{E}{E_{\max}}=۱-\frac{z}{\sqrt{(z^۲+R^۲)}}$$

توجه کنید طبق نمودار نشان داده شده در شکل، این نسبت به‌ازای $z=۴٫۰\text{cm}$ برابر با $\frac{۱}{۲}$ است. با حل آن برای R به $R=z\sqrt{۳}=۶٫۹\text{cm}$ می‌رسیم.

بخش ۲۲–۶ بار نقطه‌ای در میدان الکتریکی

۳۹● در آزمایش میلیکان، وقتی میدان الکتریکی پایین‌سوی $۱٫۹۲\times۱۰^{۵}\text{ N/C}$ بر قطره‌ی روغنی به شعاع $۱٫۶۴\mu\text{m}$ و چگالی $۰٫۸۵۱\text{g/cm}^۳$ اثر کند، این قطره در اتاقک C (شکل ۲۲–۱۶) معلق می‌ماند. بار روی قطره را برحسب e پیدا کنید.

حل وقتی قطره در تعادل است، نیروی گرانشی با نیروی میدان الکتریکی موازنه می‌شود و داریم $mg=-qE$، که در آن m جرم قطره، q بار روی قطره و E بزرگی میدان الکتریکی است. جرم قطره را می‌توان از رابطه‌ی $m=\rho V=\rho\frac{۴\pi}{۳}r^۳$ به‌دست آورد که در آن r شعاع قطره و ρ چگالی جرمی آن است. بنابراین خواهیم داشت

$$q=-\frac{mg}{E}=-\frac{۴\pi r^۳\rho g}{۳E}$$

$$=-\frac{۴\pi(۱٫۶۴\times۱۰^{-۶}\text{ m})^۳(۸۵۱\text{kg/m}^۳)(۹٫۸\text{m/s}^۲)}{۳(۱٫۹۲\times۱۰^{۵}\text{ N/C})}$$

$$=-۸٫۰۰\times۱۰^{-۱۹}\text{C}=-۵(۱٫۶۰\times۱۰^{-۱۹}\text{C})=-۵e$$

۴۰●● GO الکترونی با تندی $۵٫۰۰\times۱۰^{۸}\text{ cm/s}$ وارد میدانی الکتریکی به بزرگی $۱٫۰۰\times۱۰^{۳}\text{ N/C}$ می‌شود و با حرکت بر راستای یک خطِ میدان در جهتی پیش می‌رود که حرکتش کند گردد. (الف) این الکترون پیش از آنکه به توقف لحظه‌ای برسد چه مسافتی را می‌پیماید، و (ب) زمان طی این مسافت چقدر است؟ (پ) اگر طول ناحیه‌ای که شامل میدان الکتریکی است $۸٫۰۰\text{mm}$ باشد (که بسیار کوچک‌تر از آن است که الکترون در داخل آن متوقف شود)، چه کسری از انرژی جنبشی اولیه‌ی الکترون در این ناحیه از دست خواهد رفت؟

حل (الف) جهت اولیه‌ی حرکت در سوی $+x$ است (که همان جهت $\vec{E}$ نیز هست). از $v_f^۲-v_i^۲=۲a\Delta x$ به‌ازای $v_f=۰$، و $\vec{a}=\vec{F}/m=-e\vec{E}/m_e$ استفاده می‌کنیم و از آنجا Δx را به‌دست

Scanned by CamScanner

می‌آوریم:

$$\Delta x = \frac{-v_i^۲}{۲a} = \frac{-m_e v_i^۲}{-۲eE}$$

$$= \frac{-(۹٫۱۱\times۱۰^{-۳۱}\,kg)(۵٫۰۰\times۱۰^{۶}\,m/s)^۲}{-۲(۱٫۶۰\times۱۰^{-۱۹}\,C)(۱٫۰۰\times۱۰^{۳}\,N/C)} = ۷٫۱۲\times۱۰^{-۲}\,m$$

(ب) از معادله‌ی ۲-۱۷ (جلد اول کتاب) داریم

$$t = \frac{\Delta x}{v_{avg}} = \frac{۲\Delta x}{v_i} = \frac{۲(۷٫۱۲\times۱۰^{-۲}\,m)}{۵٫۰۰\times۱۰^{۶}\,m/s} = ۲٫۸۵\times۱۰^{-۸}\,s$$

(پ) طبق قضیه‌ی کار - انرژی جنبشی $\Delta K = W$ است و از آنجا خواهیم داشت

$$\frac{۱}{۲}m_e(v^۲ - v_i^۲) = -eE\Delta x$$

و یا

$$v^۲ = \frac{-۲eE\Delta x}{m_e} + v_i^۲$$

$$= \frac{-۲(۱٫۶۰\times۱۰^{-۱۹}\,C)(۱٫۰۰\times۱۰^{۳}\,N/C)(۸٫۰۰\times۱۰^{-۳}\,m)}{۹٫۱۱\times۱۰^{-۳۱}\,kg}$$

$$+(۵٫۰۰\times۱۰^{۶}\,m/s)^۲ = ۲٫۲۱\times۱۰^{۱۳}\,(m/s)^۲$$

و در نتیجه $\Delta K = K_i$ چنین می‌شود:

$$\frac{\Delta K}{K_i} = \frac{K - K_i}{K_i} = \left(\frac{K}{K_i} - ۱\right) = \left(\frac{m_e v^۲/۲}{m_e v_i^۲/۲} - ۱\right)$$

$$= \left(\frac{v^۲}{v_i^۲} - ۱\right) = \left(\frac{۲٫۲۱\times۱۰^{۱۳}}{(۵٫۰۰\times۱۰^{۶})^۲} - ۱\right) = -۰٫۱۱۲$$

بنابراین کسر انرژی جنبشی از دست رفته به درصد برابر با ٪۱۱٫۲ می‌شود.

۴۱● دسته‌ای ابر باردار در نزدیکی سطح کره زمین میدانی الکتریکی ایجاد می‌کند. وقتی ذره‌ی بارداری به بار $-۲٫۰\times۱۰^{-۹}\,C$ در این میدان قرار گیرد، بر آن نیروی الکتروستاتیکی پایین‌سویی با بزرگی $۳٫۰\times۱۰^{-۶}\,N$ وارد می‌شود. (الف) بزرگی این میدان الکتریکی چقدر است؟ (ب) بزرگی و (پ) جهت نیروی الکتروستاتیکی $\vec{F}_{el}$ وارد بر پروتون که در این میدان قرار گرفته است، چیست؟ (ت) بزرگی نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ی وارد بر این پروتون چقدر است؟ (ث) نسبت F_{el}/F_g در این حالت چیست؟

حل (الف) بزرگی نیروی وارد بر ذره‌ای باردار از رابطه‌ی $F = qE$ به دست می‌آید که q بزرگی بار ذره و E بزرگی میدان الکتریکی در مکان ذره است. بنابراین داریم:

$$E = \frac{F}{q} = \frac{۳٫۰\times۱۰^{-۶}\,N}{۲٫۰\times۱۰^{-۹}\,C} = ۱٫۵\times۱۰^{۳}\,N/C$$

جهت نیرو، رو به پایین و بار منفی است. بنابراین جهت میدان الکتریکی رو به بالا می‌شود.

(ب) بزرگی نیروی الکتروستاتیکی وارد بر پروتون برابر است با

$$F_{el} = eE = (۱٫۶۰\times۱۰^{-۱۹}\,C)(۱٫۵\times۱۰^{۳}\,N/C)$$
$$= ۲٫۴\times۱۰^{-۱۶}\,N$$

(پ) پروتون دارای بار مثبت است و بنابراین نیروی وارد بر آن در همان جهت میدان، یعنی رو به بالا است.

(ت) بزرگی نیروی گرانشی وارد بر پروتون برابر است با

$$F_g = mg = (۱٫۶۷\times۱۰^{-۲۷}\,kg)(۹٫۸\,m/s^۲) = ۱٫۶\times۱۰^{-۲۶}\,N$$

جهت این نیرو، رو به پایین است.

(ث) نسبت نیروها چنین می‌شود:

$$\frac{F_{el}}{F_g} = \frac{۲٫۴\times۱۰^{-۱۶}\,N}{۱٫۶۴\times۱۰^{-۲۶}\,N} = ۱٫۵\times۱۰^{۱۰}$$

۴۲● هوای مرطوب در میدان الکتریکی $۳٫۰\times۱۰^{۶}\,N/C$ دستخوش فروریزش الکتریکی می‌شود (مولکول‌های آن یونیده می‌گردند.) در این میدان، بزرگی نیروی الکتروستاتیکی وارد بر (الف) یک الکترون و (ب) یک یون که یک الکترون از دست داده است چقدر است؟

حل (الف) بزرگی نیروی الکتروستاتیکی وارد بر الکترون چنین می‌شود:

$$F_e = eE = (۱٫۶۰\times۱۰^{-۱۹}\,C)(۳٫۰\times۱۰^{۶}\,N/C)$$
$$= ۴٫۸\times۱۰^{-۱۳}\,N$$

(ب) بزرگی نیروی الکتروستاتیکی وارد بر این یون برابر همان مقدار قسمت الف می‌شود با این تفاوت که در خلاف جهت آن شتاب می‌گیرد.

۴۳● الکترونی از حالت سکون در میدان الکتریکی یکنواختی به بزرگی $۲٫۰۰\times۱۰^{۴}\,N/C$ رها می‌شود. شتاب این الکترون را محاسبه کنید. (تأثیر گرانش را نادیده بگیرید.)

حل بزرگی میدانی که روی الکترون اثر می‌کند برابر است با $F = eE$، که در آن E بزرگی میدان الکتریکی در مکان الکترون است. شتاب الکترون با قانون دوم نیوتون داده می‌شود

$$a = \frac{F}{m} = \frac{eE}{m} = \frac{(۱٫۶۰\times۱۰^{-۱۹}\,C)(۲٫۰۰\times۱۰^{۴}\,N/C)}{۹٫۱۱\times۱۰^{-۳۱}\,kg}$$
$$= ۳٫۵۱\times۱۰^{۱۵}\,m/s^۲$$

۴۴● ذره‌ی آلفا (هسته‌ی اتم هلیم) دارای جرم $۶٫۶۴\times۱۰^{-۲۷}\,kg$ و بار $+۲e$ است. (الف) بزرگی و (ب) جهت میدان الکتریکی‌ای که با نیروی گرانشی وارد بر ذره به توازن می‌رسد، چیست؟

حل (الف) تعادل در راستای قائم نیروها به رابطه‌ی زیر می‌انجامد:

$$q|\vec{E}| = mg \Rightarrow |\vec{E}| = \frac{mg}{۲e}$$

Scanned by CamScanner

با استفاده از مقدار جرم داده شده در صورت مسئله و $e=۱٫۶۰\times۱۰^{-۱۹}\,C$ به $|\vec{E}|=۲٫۰۳\times۱۰^{-۷}\,N/C$ می‌رسیم.

(ب) چون نیروی گرانشی رو به پایین است، بنابراین $q\vec{E}$ باید رو به بالا باشد. چون در اینجا $q>۰$ است، نتیجه می‌گیریم که خود $\vec{E}$ نیز باید رو به بالا باشد.

۴۵• ILW الکترونی روی محور یک دوقطبی الکتریکی به فاصله‌ی ۲۵nm از مرکز دوقطبی قرار دارد. بزرگی نیروی الکتروستاتیکی وارد بر دوقطبی چقدر است، اگر گشتاور دوقطبی برابر با $۳٫۶\times۱۰^{-۲۹}\,C\cdot m$ باشد. فرض کنید ۲۵nm بسیار بزرگتر از فاصله‌ی جدایی بارهای دوقطبی است.

حل چون $z\gg d$ است می‌توانیم از معادله‌ی ۲۲-۹ برای میدان الکتریکی دوقطبی الکتریکی در نقاط دور از محور دوقطبی استفاده کنیم و آنگاه با تلفیق آن با معادله‌ی ۲۲-۲۸ (به‌صورت قدرمطلق) خواهیم داشت

$$F=|q|E=|q|\left(\frac{p}{۲\pi\varepsilon_۰ z^۳}\right)=\frac{۲kep}{z^۳}$$

$$=\frac{۲(۸٫۹۹\times۱۰^۹\,N\cdot m^۲/C^۲)(۱٫۶۰\times۱۰^{-۱۹}\,C)(۳٫۶\times۱۰^{-۲۹}\,C\cdot m)}{(۲۵\times۱۰^{-۹}\,m)^۳}$$

که به $F=۶٫۶\times۱۰^{-۱۵}\,N$ می‌انجامد. اگر دوقطبی به‌گونه‌ای جهت‌گیری کرده باشد که $\vec{p}$ در جهت $+z$ باشد، آنگاه جهت $\vec{F}$ در سوی $-z$ می‌شود.

۴۶• الکترونی بر اثر یک میدان الکتریکی با $۱٫۸۰\times۱۰^۹\,m/s^۲$ رو به شرق شتاب می‌گیرد. (الف) بزرگی و (ب) جهت میدان الکتریکی را تعیین کنید.

حل معادله‌ی ۲۲-۲۸ چنین به‌دست می‌دهد

$$\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q}=\frac{m\vec{a}}{(-e)}=-\left(\frac{m}{e}\right)\vec{a}$$

که در آن از قانون دوم نیوتن استفاده کردیم.

(الف) و (ب) جهت $\hat{i}$ را رو به سمت شرق می‌گیریم و از آنجا خواهیم داشت

$$\vec{E}=-\left(\frac{۹٫۱۱\times۱۰^{-۳۱}\,kg}{۱٫۶۰\times۱۰^{-۱۹}\,C}\right)(۱٫۸۰\times۱۰^۹\,m/s^۲\,\hat{i})$$

$$=-۰٫۰۱۰۲\,N/C\,\hat{i}$$

که بدین معنی است که بزرگی میدان الکتریکی برابر $۰٫۰۱۰۲\,N/C$ و جهت آن در سوی $-x$ یا به سمت غرب است.

۴۷• باریکه‌های پروتون‌های پرسرعت را می‌توان در "تفنگ‌هایی" ایجاد کرد که با استفاده از میدان‌های الکتریکی، پروتون‌ها را شتاب می‌دهند. (الف) اگر میدان الکتریکی تفنگ برابر با $۲٫۰۰\times۱۰^۴\,N/C$ باشد، شتاب پروتون چقدر خواهد شد؟ (ب) اگر این میدان در طی مسافت ۱٫۰۰cm به پروتون شتاب دهد، پروتون به چه تندی‌ای خواهد رسید؟

حل (الف) بزرگی نیروی وارد بر پروتون $F=eE$ که E بزرگی میدان الکتریکی است. طبق قانون دوم نیوتن $a=F/m=eE/m_p$ می‌شود که m_p جرم پروتون است. بنابراین داریم

$$a=\frac{eE}{m_p}=\frac{(۱٫۶۰\times۱۰^{-۱۹}\,C)(۲٫۰۰\times۱۰^۴\,N/C)}{۱٫۶۷\times۱۰^{-۲۷}\,kg}$$

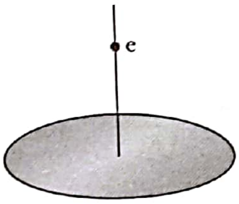
$$=۱٫۹۲\times۱۰^{۱۲}\,m/s^۲$$

(ب) با فرض اینکه پروتون از حالت سکون شروع به حرکت کرده باشد، با استفاده از معادله‌ی سینماتیکی $v^۲=v_۰^۲+۲ax$ خواهیم داشت

$$v=\sqrt{۲ax}=\sqrt{۲(۱٫۹۲\times۱۰^{۱۲}\,m/s^۲)(۰٫۰۱۰۰\,m)}$$

$$=۱٫۹۶\times۱۰^۵\,m/s$$

۴۸•• در شکل ۲۲-۵۹، الکترون (e) از حالت سکون روی محور مرکزی قرص باردار یکنواختی به شعاع R رها می‌شود. چگالی سطحی بار روی قرص $+۴٫۰۰\mu C/m^۲$ است. اگر الکترون از فاصله‌ی (الف) R، (ب) $R/۱۰۰$، و (پ) $R/۱۰۰۰$ از مرکز قرص رها شود، بزرگی شتاب اولیه‌ی آن چقدر است؟ (ت) چرا با نزدیکتر شدن نقطه‌ی رهاشدگی به قرص، بزرگی شتاب الکترون فقط اندکی افزایش پیدا می‌کند؟



شکل ۲۲-۵۹ مسئله‌ی ۴۸

حل به ما $\sigma=۴٫۰۰\times۱۰^{-۶}\,C/m^۲$ و مقادیر مختلف z داده شده است (که طبق معادله‌ی ۲۲-۲۶، یعنی $E=\frac{\sigma}{۲\varepsilon_۰}(۱-z/\sqrt{z^۲+R^۲})$ میدان E را روی محور مرکزی قرص مشخص می‌کند). با استفاده از این همراه با $F=eE$ و قانون دوم نیوتن $F=ma$، شتاب a را تعیین می‌کنیم:

$$a=\frac{e\sigma}{۲m_e\varepsilon_۰}\left(۱-\frac{z}{\sqrt{z^۲+R^۲}}\right)$$

(الف) بزرگی شتاب در فاصله‌ی $z=R$ برابر است با

$$a=\frac{e\sigma(۲-\sqrt{۲})}{۴m_e\varepsilon_۰}=۱٫۱۶\times۱۰^{۱۶}\,m/s^۲$$

(ب) در فاصله $z=R/۱۰۰$، بزرگی شتاب برابر است با

$$a=\frac{e\sigma(۱۰۰۰۱-\sqrt{۱۰۰۰۱})}{۲۰۰۰۲m_e\varepsilon_۰}=۳٫۹۴\times۱۰^{۱۶}\,m/s^۲$$

(پ) در فاصله‌ی $z=R/۱۰۰۰$، بزرگی شتاب برابر است با

$$a=\frac{e\sigma(۱۰۰۰۰۰۱-\sqrt{۱۰۰۰۰۰۱})}{۲۰۰۰۰۰۲m_e\varepsilon_۰}=۳٫۹۷\times۱۰^{۱۶}\,m/s^۲$$

Scanned by CamScanner

(ت) وقتی الکترون به نقطه‌ی مرکزی قرص نزدیک می‌شود، میدان ناشی از قرص یکنواخت‌تر می‌شود. یک روش برای مشاهده‌ی این موضوع، بررسی نیروهای وارد بر الکترون توسط بارهای نزدیک به لبه‌ی قرص است؛ نیروی خالص وارد بر الکترون که توسط این بارها ایجاد می‌شود با نزدیک‌تر شدن الکترون به مرکز قرص کاهش می‌یابد که این ناشی از این حقیقت است که با نزدیک‌تر شدن الکترون به مرکز قرص، سهم‌های ناشی از این بارها بیشتر همدیگر را خنثی می‌کنند.

۴۹۰۰ قطعه‌ای به جرم $۱۰٫۰\text{g}$ و بار $+۸٫۰۰\times۱۰^{-۵}\text{C}$ در میدان الکتریکی $\vec{E}=(۳۰۰۰\hat{\mathbf{i}}-۶۰۰\hat{\mathbf{j}})\,\text{N/C}$ قرار گرفته است. (الف) بزرگی و (ب) جهت (نسبت به سوی مثبت محور x) نیروی الکتروستاتیکی وارد بر قطعه چیست؟ اگر قطعه در زمان $t=۰$ از حالت سکون در مبدأ رها شود، مختصات (پ) x و (ت) y آن در $t=۳٫۰۰\text{s}$ چقدر می‌شود؟

حل (الف) با استفاده از معادله‌ی ۲۲-۲۸ داریم

$$\vec{F}=(۸٫۰۰\times۱۰^{-۵}\text{C})(۳٫۰۰\times۱۰^{۳}\text{ N/C})\hat{\mathbf{i}}+(۸٫۰۰\times۱۰^{-۵}\text{C})(-۶۰۰)\hat{\mathbf{j}}$$
$$=(۰٫۲۴۰\text{N})\hat{\mathbf{i}}-(۰٫۰۴۸۰\text{N})\hat{\mathbf{j}}$$

بنابراین بزرگی نیرو چنین می‌شود

$$F=\sqrt{(۰٫۲۴۰\text{N})^{۲}+(۰٫۰۴۸۰\text{N})^{۲}}=۰٫۲۵۴\text{N}$$

(ب) زاویه‌ی میان نیروی $\vec{F}$ با سوی مثبت محور x برابر است با

$$\theta=\tan^{-۱}\left(\frac{F_y}{F_x}\right)=\tan^{-۱}\left(\frac{-۰٫۰۴۸۰\text{N}}{۰٫۲۴۰\text{N}}\right)=-۱۱٫۳^{\circ}$$

که به‌طور پادساعتگرد نسبت به محور $+x$ اندازه‌گیری شده است.

(پ) به‌ازای $m=۰٫۰۱۰۰\text{kg}$، مختصات (x,y) در $t=۳٫۰۰\text{s}$ با استفاده از معادله‌های سینماتیکی حرکت و قانون دوم نیوتون به‌دست می‌آید:

$$x=\frac{۱}{۲}a_xt^{۲}=\frac{F_xt^{۲}}{۲m}=\frac{(۰٫۲۴۰\text{N})(۳٫۰۰\text{s})^{۲}}{۲(۰٫۰۱۰۰\text{kg})}=۱۰۸\text{m}$$

(ت) به همان ترتیب، مختصه‌ی y چنین می‌شود

$$y=\frac{۱}{۲}a_yt=\frac{F_yt^{۲}}{۲m}=\frac{(-۰٫۰۴۸۰\text{N})(۳٫۰۰\text{s})^{۲}}{۲(۰٫۰۱۰۰\text{kg})}=-۲۱٫۶\text{m}$$

۵۰۰۰ در لحظه‌ی معینی مؤلفه‌های سرعت الکترونی که بین دو صفحه‌ی باردار در حرکت است عبارت‌اند از $v_x=۱٫۵\times۱۰^{۵}\text{ m/s}$ و $v_y=۳٫۰\times۱۰^{۳}\text{ m/s}$. فرض کنید میدان الکتریکی میان این صفحات با $\vec{E}=(۱۲۰\text{N/C})\hat{\mathbf{j}}$ داده شود. برحسب نمادگذاری بردارهای یکه، (الف) شتاب الکترون در این میدان و (ب) سرعت الکترون وقتی مختصه‌ی x آن به اندازه‌ی $۲٫۰\text{cm}$ تغییر کرده است، چیست؟

حل (الف) با استفاده از قانون دوم نیوتون داریم

$$\vec{a}=\frac{q\vec{E}}{m}=-\left(\frac{e}{m_e}\right)\vec{E}$$
$$=-\left(\frac{۱٫۶۰\times۱۰^{-۱۹}\text{C}}{۹٫۱۱\times۱۰^{-۳۱}\text{kg}}\right)\left(۱۲۰\frac{\text{N}}{\text{C}}\right)\hat{\mathbf{j}}$$
$$=-(۲٫۱۰\times۱۰^{۱۳}\text{ m/s}^{۲})\hat{\mathbf{j}}$$

(ب) چون در راستای x نیرویی وارد نمی‌شود $v_x=v_{۰x}$، است. همچنین از اینجا می‌توان زمان حرکت الکترون را به‌دست آورد. با استفاده از $\Delta x=\frac{۱}{۲}a_xt^{۲}+v_{۰x}t$ به‌ازای $a_x=۰$ خواهیم داشت:

$$t=\frac{\Delta x}{v_{۰x}}=\frac{۰٫۰۲۰\text{m}}{۱٫۵\times۱۰^{۵}\text{m/s}}=۱٫۳۳\times۱۰^{-۷}\text{s}$$

و در نتیجه مؤلفه‌ی قائم سرعت الکترون چنین می‌شود:

$$v_y=v_{۰y}+a_yt$$
$$=۳٫۰\times۱۰^{۳}\text{ m/s}+(-۲٫۱۰\times۱۰^{۱۳}\text{ m/s}^{۲})(۱٫۳۳\times۱۰^{-۷}\text{s})$$
$$=-۲٫۸\times۱۰^{۶}\text{ m/s}$$

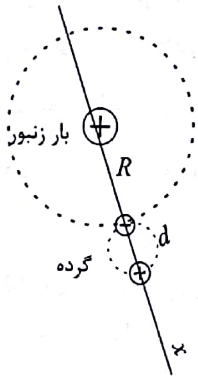
حال با داشتن v_x و v_y می‌توانیم سرعت الکترون را به‌دست آوریم:

$$\vec{v}=v_x\hat{\mathbf{i}}+v_y\hat{\mathbf{j}}=(۱٫۵\times۱۰^{۵}\text{ m/s})\hat{\mathbf{i}}+(-۲٫۸\times۱۰^{۶}\text{ m/s})\hat{\mathbf{j}}$$

۵۱۰۰ فرض کنید زنبور عسل کره‌ای است به قطر $۱٫۰۰۰\text{cm}$ با بار $+۴۵٫۰\text{pC}$ که به‌طور یکنواختی روی سطح آن پخش شده است. همچنین فرض کنید که یک گرده‌ی کروی به قطر $۴۰٫۰\mu\text{m}$ به دلیل آنکه بار زنبور عسل، باری به اندازه‌ی $-۱٫۰۰\text{pC}$ را در طرف نزدیک‌تر این کره و باری به اندازه‌ی $+۱٫۰۰\text{pC}$ را در طرف دورتر آن القا می‌کند، به‌طور الکتریکی روی سطح این کره نگه داشته شده است. (الف) بزرگی نیروی الکتروستاتیکی خالص وارد بر گرده از سوی زنبور عسل چقدر است؟ سپس فرض کنید که این زنبور عسل، گرده را به فاصله‌ی $۱٫۰۰۰\text{mm}$ از نوک کلاله‌ی گل بیاورد و نیز فرض کنید که نوک کلاله ذره‌ای با بار $-۴۵٫۰\text{pC}$ است. (ب) بزرگی نیروی الکتروستاتیکی خالص وارد بر گرده از سوی کلاله چقدر است؟ (پ) آیا گرده روی زنبور عسل باقی می‌ماند یا اینکه به سوی کلاله حرکت می‌کند؟

حل فرض می‌کنیم بار $Q=۴۵٫۰\text{pC}$ زنبور عسل در مرکز آن که به‌صورت کره در نظر گرفته شده است، متمرکز شده باشد. بزرگی بارهای القا شده در دو طرف گرده $|q|=۱٫۰۰\text{pC}$ است.

(الف) در عمل آرایشی مشتمل بر سه بار نقطه‌ای زیر را داریم، که در آن محور x را منطبق بر خط واصل بارها گرفته‌ایم.



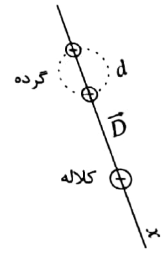
بنابراین نیروی الکتریکی خالص وارد بر گرده برابر است با

$$\vec{F}=\vec{F}_۱+\vec{F}_۲=-k\frac{Qq}{R^{۲}}\hat{\mathbf{i}}+k\frac{Qq}{(R+d)^{۲}}\hat{\mathbf{i}}$$
$$=kQq\left(-\frac{۱}{R^{۲}}+\frac{۱}{(R+d)^{۲}}\right)\hat{\mathbf{i}}$$

Scanned by CamScanner

$$=(۸٫۹۹\times ۱۰^{۹})(۴۵٫۰\times ۱۰^{-۱۲})(۱٫۰۰\times ۱۰^{-۱۲})\times$$
$$\left(-\frac{۱}{(۵٫۰۰\times ۱۰^{-۳})^{۲}}+\frac{۱}{(۵٫۰۰\times ۱۰^{-۳}+۴۰٫۰\times ۱۰^{-۶})^{۲}}\right)\hat{\mathbf{i}}$$
$$=(-۲٫۵۶\times ۱۰^{-۱۰}\,\mathrm{N})\,\hat{\mathbf{i}}$$

(ب) به همان ترتیب قسمت الف، مسئله را به‌صورت سه بار نقطه‌ای فرض می‌کنیم که شامل بارهای القا شده در دو طرف گرده و بار نقطه‌ای روی کلاله است.



بنابراین نیروی خالص وارد بر گرده برابر است با

$$\vec{F}'=\vec{F}_{۱}'+\vec{F}_{۲}'=-k\frac{Qq}{D^{۲}}\,\hat{\mathbf{i}}+k\frac{Qq}{(D+d)^{۲}}\,\hat{\mathbf{i}}$$
$$=kQq\left(-\frac{۱}{D^{۲}}+\frac{۱}{(D+d)^{۲}}\right)\hat{\mathbf{i}}$$
$$=(۸٫۹۹\times ۱۰^{۹})(۴۵٫۰\times ۱۰^{-۱۲})(۱٫۰۰\times ۱۰^{-۱۲})\times$$
$$\left(-\frac{۱}{(۱٫۰۰\times ۱۰^{-۳})^{۲}}+\frac{۱}{(۱٫۰۰\times ۱۰^{-۳}+۴۰\times ۱۰^{-۶})^{۲}}\right)\hat{\mathbf{i}}$$
$$=(-۳٫۰۵\times ۱۰^{-۸}\,\mathrm{N})\hat{\mathbf{i}}$$

(پ) چون $|\vec{F}'|<|\vec{F}|$ است، بار به سمت کلاله کشیده خواهد شد.

۵۲●● الکترونی با سرعت اولیه‌ی $۴۰\,\mathrm{km/s}$ هم‌جهت با میدانی به بزرگی $E=۵۰\,\mathrm{N/C}$ وارد ناحیه‌ی این میدان می‌شود. (الف) تندی الکترون $۱٫۵\,\mathrm{ns}$ پس از ورود به این ناحیه چقدر می‌شود؟ (ب) در حین این $۱٫۵\,\mathrm{ns}$، الکترون چه مسافتی را پیموده است؟

حل (الف) چون الکترون باردار منفی است، شتاب آن در خلاف جهت $\vec{E}$ می‌شود و بنابراین به‌ازای $t=۱٫۵\times ۱۰^{-۹}\,\mathrm{s}$ خواهیم داشت:

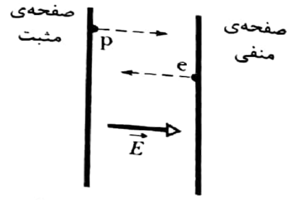
$$v=v_{۰}-|a|t=v_{۰}-\frac{eE}{m}t=۲٫۷\times ۱۰^{۴}\,\mathrm{m/s}$$

که در آن از $e=۱٫۶۰\times ۱۰^{-۱۹}\,\mathrm{C}$ و $m_e=۹٫۱۱\times ۱۰^{-۳۱}\,\mathrm{kg}$ استفاده کردیم.

(ب) چون الکترون جهت حرکت خود را تغییر نمی‌دهد، جابه‌جایی برابر با مسافت طی شده توسط الکترون می‌شود. میدان یکنواخت است که این بدین معنی است که شتاب ثابت است. بنابراین داریم

$$d=\frac{v+v_{۰}}{۲}t=\left(\frac{۴٫۰\times ۱۰^{۴}\,\mathrm{m/s}+۲٫۷\times ۱۰^{۴}\,\mathrm{m/s}}{۲}\right)(۱٫۵\times ۱۰^{-۹}\,\mathrm{s})$$
$$=۵٫۰\times ۱۰^{-۵}\,\mathrm{m}$$

۵۳●● GO میان دو صفحه‌ی مسی موازی بزرگ که به فاصله‌ی $۵٫۰\,\mathrm{cm}$ از هم قرار گرفته‌اند، میدان الکتریکی یکنواختی مانند شکل ۲۲-۶۰ برقرار شده است. الکترونی از صفحه‌ی منفی، همزمان با پروتونی که از صفحه‌ی مثبت رها شده است، رها می‌گردد. با چشم‌پوشی از نیرویی که این دو ذره بر هم وارد می‌کنند، فاصله‌ی آنها را از صفحه‌ی مثبت به هنگام عبور از کنار یکدیگر پیدا کنید (آیا برایتان جالب نیست که نیازی به دانستن میدان الکتریکی برای حل این مسئله ندارید؟)



شکل ۲۲-۶۰ مسئله‌ی ۵۳

حل با اختیار صفحه‌ی مثبت به‌عنوان مبدأ مختصات و سوی مثبت به سمت راست، مختصه‌ی x الکترون و پروتون را در زمان برخورد t قطع می‌دهیم و از آنجا زمان برخورد را به‌دست می‌آوریم. با توجه به اینکه فاصله‌ی بین صفحه‌ها L است خواهیم داشت:

$$x_p=x_e \quad\Rightarrow\quad \frac{۱}{۲}a_p t^{۲}=-\frac{۱}{۲}a_e t^{۲}+L$$

و آنگاه با استفاده از قانون دوم نیوتون به رابطه‌ی زیر می‌رسیم:

$$\frac{۱}{۲}\frac{eE}{m_p}=-\frac{۱}{۲}\frac{eE}{m_e}t^{۲}+L$$

و از آنجا $t^{۲}$ چنین می‌شود:

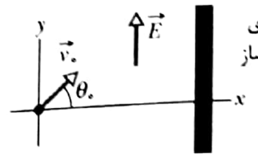
$$t^{۲}=\frac{۲L}{eE}\left(\frac{m_p m_e}{m_p+m_e}\right)$$

با قرار دادن $t^{۲}$ در هر یک از مختصه‌های x الکترون یا پروتون، فاصله‌ی آنها در زمان برخورد از صفحه‌ی مثبت به‌دست می‌آید. راحت‌تر آن است که از x_p استفاده کنیم:

$$x_p=\frac{۱}{۲}a_p t^{۲}=\frac{۱}{۲}\left(\frac{eE}{m_p}\right)\left(\frac{۲L}{eE}\right)\left(\frac{m_p m_e}{m_p+m_e}\right)$$
$$=\left(\frac{m_e}{m_p+m_e}\right)L$$
$$=\left(\frac{۹٫۱۱\times ۱۰^{-۳۱}\,\mathrm{kg}}{۱٫۶۷\times ۱۰^{-۲۷}\,\mathrm{kg}+۹٫۱۱\times ۱۰^{-۳۱}\,\mathrm{kg}}\right)(۰٫۰۵۰\,\mathrm{m})$$
$$=۲٫۷\times ۱۰^{-۵}\,\mathrm{m}=۲۷\,\mu\mathrm{m}$$

۵۴●● GO در شکل ۲۲-۶۱، الکترونی با تندی اولیه $v_{۰}=۲٫۰۰\times ۱۰^{۶}\,\mathrm{m/s}$، تحت زاویه‌ی $\theta_{۰}=۴۰٫۰^{\circ}$ نسبت به محور x شلیک شده است و در میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}=(۵٫۰۰\,\mathrm{N/C})\hat{\mathbf{j}}$ حرکت می‌کند. صفحه‌ای برای آشکارسازی الکترون‌ها، موازی محور y در فاصله‌ی $x=۳٫۰۰\,\mathrm{m}$، قرار داده شده است. برحسب نمادگذاری بردارهای یکه، سرعت الکترون وقتی به این صفحه برخورد می‌کند چگونه است؟

Scanned by CamScanner



شکل ۲۲-۶۱ مسئله‌ی ۵۴

حل با توجه به اینکه جهت میدان $\vec E$ در سوی $+y$ (رو به بالا) است، الکترون که دارای بار منفی است رو به پایین شتاب می‌گیرد. این مسئله دقیقاً مشابه یک حرکت پرتابی است با این تفاوت که در اینجا g با

$$a=eE/m_e=۸٫۷۸\times۱۰^{۱۱}\,\text{m/s}^۲$$

جایگزین شده است، که در آن از $e=۱٫۶۰\times۱۰^{-۱۹}\text{C}$، $E=۵٫۰۰\text{N/C}$ و $me=۹٫۱۱\times۱۰^{-۳۱}\text{kg}$ استفاده کردیم. بنابراین با استفاده از معادله‌ی ۴-۲۱ (جلد اول کتاب) خواهیم داشت:

$$t=\frac{x}{v_۰\cos\theta_۰}=\frac{۳٫۰۰\,\text{m}}{(۲٫۰۰\times۱۰^{۶}\,\text{m/s})\cos۴۰٫۰^\circ}=\frac{۳٫۰۰\,\text{m}}{۱٫۵۳\times۱۰^{۶}\,\text{m/s}}$$
$$=۱٫۹۶\times۱۰^{-۶}\,\text{s}$$

و آنگاه با استفاده از معادله‌ی ۴-۲۳، مؤلفه‌ی قائم سرعت به‌دست می‌آید:

$$v_y=v_۰\sin۴۰^\circ-at$$
$$=(۲٫۰۰\times۱۰^{۶}\,\text{m/s})\sin۴۰٫۰^\circ-(۸٫۷۸\times۱۰^{۱۱}\,\text{m/s}^۲)(۱٫۹۶\times۱۰^{-۶}\,\text{s})$$
$$=-۴٫۳۴\times۱۰^{۵}\,\text{m/s}$$

چون مؤلفه‌ی x سرعت تغییر نمی‌کند، سرعت نهایی چنین می‌شود:

$$\vec v=(۱٫۵۳\times۱۰^{۶}\,\text{m/s})\hat{\mathrm{i}}-(۴٫۳۴\times۱۰^{۵}\,\text{m/s})\hat{\mathrm{j}}$$

۵۵••• ILW در فضای میان این دو صفحه‌ی باردار با علامت مخالف، میدان الکتریکی یکنواختی وجود دارد. الکترونی از حالت سکون از روی سطح صفحه‌ی باردار منفی رها می‌شود و پس از $۱٫۵\times۱۰^{-۸}\,\text{s}$ با صفحه‌ی مقابل که به فاصله‌ی $۲٫۰\,\text{cm}$ از آن قرار دارد، برخورد می‌کند. (الف) تندی الکترون به هنگام برخورد با صفحه‌ی دوم چقدر است؟ (ب) بزرگی میدان الکتریکی $\vec E$ چیست؟

حل (الف) از معادله‌ی سینماتیکی $\Delta x=\left(\frac{v+v_۰}{۲}\right)t$ استفاده می‌کنیم. با توجه به اینکه $v_۰=۰$ است، v چنین می‌شود:

$$v=\frac{۲\Delta x}{t}=\frac{۲(۲٫۰\times۱۰^{-۲}\,\text{m})}{۱٫۵\times۱۰^{-۸}\,\text{s}}=۲٫۷\times۱۰^{۶}\,\text{m/s}$$

(ب) از $\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t$ (با $v_۰=۰$) و $E=F/e=m_ea/e$ استفاده می‌کنیم و از آنجا E را به‌دست می‌آوریم:

$$E=\frac{m_ea}{e}=\frac{۲m_e\Delta x}{et^۲}$$
$$=\frac{۲(۹٫۱۱\times۱۰^{-۳۱}\,\text{kg})(۲٫۰\times۱۰^{-۲}\,\text{m})}{(۱٫۶۰\times۱۰^{-۱۹}\,\text{C})(۱٫۵\times۱۰^{-۸}\,\text{s})^۲}$$
$$=۱٫۰\times۱۰^{۳}\,\text{N/C}$$

بخش ۲۲-۷ دوقطبی در میدان الکتریکی

۵۶• یک دوقطبی الکتریکی متشکل از بارهای $+۲e$ و $-۲e$ است که به فاصله‌ی $۰٫۷۸\,\text{nm}$ از هم قرار گرفته‌اند. این دوقطبی در میدان الکتریکی‌ای به بزرگی $۳٫۴\times۱۰^{۶}\,\text{N/C}$ قرارگرفته است. بزرگی گشتاور نیروی وارد بر دوقطبی را در هنگامی محاسبه کنید که گشتاور دوقطبی (الف) موازی با، (ب) عمود بر، و (پ) پادموازی با میدان الکتریکی باشد.

حل (الف) معادله‌ی ۲۲-۳۳ به‌ازای $\theta=۰^\circ$ به $\tau=PE\sin۰^\circ=۰$ می‌انجامد.

(ب) به‌ازای $\theta=۹۰^\circ$، همان معادله چنین به‌دست می‌دهد

$$\tau=pE=qdE$$
$$=۲(۱٫۶\times۱۰^{-۱۹}\,\text{C})(۰٫۷۸\times۱۰^{-۹}\,\text{m})(۳٫۴\times۱۰^{۶}\,\text{N/C})$$
$$=۸٫۵\times۱۰^{-۲۲}\,\text{N}\cdot\text{m}$$

(پ) همان معادله به‌ازای $\theta=۱۸۰^\circ$ به $\tau=pE\sin۱۸۰^\circ=۰$ می‌انجامد.

۵۷• یک دوقطبی الکتریکی که متشکل از بارهایی به بزرگی $۱٫۵۰\,\text{nC}$ و به فاصله‌ی جدایی $۶٫۲۰\,\mu\text{m}$ است در میدان الکتریکی‌ای به بزرگی $۱۱۰۰\,\text{N/C}$ قرار گرفته است. (الف) بزرگی گشتاور دوقطبی الکتریکی و (ب) اختلاف بین انرژی‌های پتانسیل مربوط به سمتگیری‌های موازی و پادموازی دوقطبی با میدان الکتریکی $\vec E$ چقدر است؟

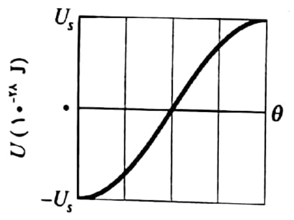
حل (الف) بزرگی گشتاور دوقطبی برابر است با

$$p=qd=(۱٫۵\times۱۰^{-۹}\,\text{C})(۶٫۲۰\times۱۰^{-۶}\,\text{m})$$
$$=۹٫۳۰\times۱۰^{-۱۵}\,\text{C}\cdot\text{m}$$

(ب) طبق حل قسمت پ مسئله‌ی نمونه‌ی ۲۲-۵ کتاب خواهیم داشت:

$$\Delta U=U(۱۸۰^\circ)-U(۰^\circ)$$
$$=-pE(\cos۱۸۰^\circ-\cos۰^\circ)$$
$$=۲pE=۲(۹٫۳۰\times۱۰^{-۱۵}\,\text{C}\cdot\text{m})(۱۱۰۰\,\text{N/C})$$
$$=۲٫۰۵\times۱۰^{-۱۱}\,\text{J}$$

۵۸•• یک دوقطبی الکتریکی خاص در میدان الکتریکی یکنواخت $\vec E$ به بزرگی $۲۰\,\text{N/C}$ قرار گرفته است. شکل ۲۲-۶۲ انرژی پتانسیل Uی دوقطبی را برحسب زاویه‌ی θی بین $\vec E$ و گشتاور دوقطبی $\vec p$ نشان می‌دهد. محور قائم با $U_s=۱۰۰\times۱۰^{-۲۸}\,\text{J}$ مقیاس‌بندی شده است. بزرگی $\vec p$ چقدر است؟



شکل ۲۲-۶۲ مسئله‌ی ۵۸

حل از روی شکل، کم‌ترین مقدار منحنی را به‌دست می‌آوریم و

Scanned by CamScanner

آنگاه با استفاده از معادله‌ی ۲۲-۳۸ خواهیم داشت

$$U=\vec{p}\cdot\vec{E}=-۱۰۰\times۱۰^{-۲۸}\,\mathrm{J}$$

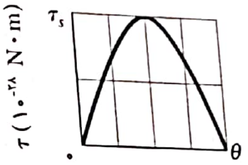
اگر $E=۲۰\,\mathrm{N/C}$ باشد به $p=۵٫۰\times۱۰^{-۲۸}\,\mathrm{C\cdot m}$ می‌رسیم.

۵۹●● برای چرخاندن یک دوقطبی با گشتاور دوقطبی $p=۳٫۰۲\times۱۰^{-۲۵}\,\mathrm{C\cdot m}$ به اندازه‌ی ۱۸۰° در میدان الکتریکی یکنواختی به بزرگی $E=۴۶٫۰\,\mathrm{N/C}$ چقدر کار لازم است، در صورتی که زاویه‌ی اولیه ۶۴° باشد؟

حل کار لازم برابر با تغییر انرژی پتانسیل ناشی از تغییر سمتگیری دوقطبی است:

$$W=U(\theta_\circ+\pi)-U(\theta_\circ)=-pE\left(\cos(\theta_\circ+\pi)-\cos(\theta_\circ)\right)$$
$$=۲pE\cos\theta_\circ=۲(۳٫۰۲\times۱۰^{-۲۵}\,\mathrm{C\cdot m})(۴۶٫۰\,\mathrm{N/C})\cos ۶۴٫۰^\circ$$
$$=۱٫۲۲\times۱۰^{-۲۳}\,\mathrm{J}$$

۶۰●● یک دوقطبی الکتریکی خاص در میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}$ با بزرگی $۴۰\,\mathrm{N/C}$ قرار گرفته است. شکل ۲۲-۶۳ بزرگی τی گشتاور نیروی وارد بر دوقطبی را برحسب زاویه‌ی θی بین $\vec{E}$ و گشتاور دوقطبی $\vec{p}$ نشان می‌دهد. محور قائم با $\tau_s=۱۰۰\times۱۰^{-۲۸}\,\mathrm{N\cdot m}$ مقیاس‌بندی شده است. بزرگی $\vec{p}$ چقدر است؟



شکل ۲۲-۶۳ مسئله‌ی ۶۰

حل با استفاده از معادله‌ی ۲۲-۳۵، با در نظر گرفتن θ به عنوان یک متغیر، درمی‌یابیم که گشتاور به مقدار بیشینه‌اش در $\theta=-۹۰^\circ$ می‌رسد: $\tau_{max}=pE$. بنابراین، به‌ازای $E=۴۰\,\mathrm{N/C}$ و $\tau_{max}=۱۰۰\times۱۰^{-۲۸}\,\mathrm{N\cdot m}$ (آن را از روی منحنی تعیین کرده‌ایم) به گشتاور دوقطبی $p\doteq ۲٫۵\times۱۰^{-۲۸}\,\mathrm{C\cdot m}$ می‌رسیم.

۶۱●● برای بسامد نوسان‌های کم‌دامنه‌ی یک دوقطبی الکتریکی با گشتاور دوقطبی $\vec{p}$ و لختی‌چرخشی I حول مکان تعادل آن در میدان الکتریکی یکنواخت به بزرگی E، عبارتی را به‌دست آورید.

حل گشتاور بازگرداننده با معادله‌ی ۲۲-۳۵ $(\tau=-pE\sin\theta)$ داده می‌شود. برای نوسان‌های با دامنه‌ی کوچک، $\sin\theta$ را می‌توانیم با θ بر حسب رادیان جایگزین کنیم. بنابراین $\tau\approx-pE\theta$ می‌شود. از طرفی از مبحث مکانیک می‌دانیم که $\tau=I\alpha$ است، که در آن I گشتاور لختی و α شتاب زاویه‌ای (برابر با $d^۲\theta/dt^۲$) است. بنابراین داریم

$$I\frac{d^۲\theta}{dt^۲}+pE\theta=۰$$

و یا

$$\frac{d^۲\theta}{dt^۲}+\left(\frac{pE}{I}\right)\theta=۰$$

که این معادله‌ی یک نوسانگر هماهنگ ساده با بسامد نوسان زیر است

$$f=\frac{\omega}{۲\pi}=\frac{۱}{۲\pi}\sqrt{\frac{pE}{I}}$$

مسئله‌های تکمیلی

۶۲ (الف) بزرگی شتاب یک الکترون در میدان الکتریکی یکنواختی به بزرگی $۱٫۴۰\times۱۰^{۶}\,\mathrm{N/C}$ چقدر است؟ (ب) با شروع از حالت سکون، چقدر طول می‌کشد تا الکترون به یک‌-دهم سرعت نور برسد؟ (پ) در این مدت، الکترون چه مسافتی را پیموده است؟

حل (الف) معادله‌ی ۲۲-۲۸ (به شکل قدرمطلق، $F=|q|E$) و قانون دوم نیوتون، $F=m_e a$، ترکیب می‌کنیم:

$$a=\frac{|q|E}{m_e}=\left(\frac{۱٫۶۰\times۱۰^{-۱۹}\,\mathrm{C}}{۹٫۱۱\times۱۰^{-۳۱}\,\mathrm{kg}}\right)(۱٫۴۰\times۱۰^{۶}\,\mathrm{N/C})$$
$$=۲٫۴۶\times۱۰^{۱۷}\,\mathrm{m/s^۲}$$

(ب) به‌ازای $v=\frac{c}{۱۰}=۳٫۰۰\times۱۰^{۷}\,\mathrm{m/s}$، با استفاده از معادله‌ی ۲-... (جلد اول کتاب) خواهیم داشت:

$$t=\frac{v-v_\circ}{a}=\frac{۳٫۰۰\times۱۰^{۷}\,\mathrm{m/s}}{۲٫۴۶\times۱۰^{۱۷}\,\mathrm{m/s^۲}}=۱٫۲۲\times۱۰^{-۱۰}\,\mathrm{s}$$

(پ) معادله‌ی ۲-۱۶ (جلد اول کتاب) چنین به‌دست می‌دهد:

$$\Delta x=\frac{v^۲-v_\circ^۲}{۲a}=\frac{(۳٫۰۰\times۱۰^{۷}\,\mathrm{m/s})^۲}{۲(۲٫۴۶\times۱۰^{۷}\,\mathrm{m/s})}=۱٫۸۳\times۱۰^{-۳}\,\mathrm{m}$$

۶۳ یک قطره‌ی آب کروی به قطر $۱٫۲۰\,\mu\mathrm{m}$ بر اثر میدان الکتریکی جوّی پایین‌سویی به بزرگی $E=۴۶۲\,\mathrm{N/C}$ در هوای آرام معلق شده است. (الف) بزرگی نیروی گرانشی وارد بر این قطره چقدر است؟ (ب) این قطره، چند الکترون اضافی دارد؟

حل (الف) با استفاده از چگالی آب $(\rho=۱۰۰۰\,\mathrm{kg/m^۳})$ وزن mg قطره‌ی کروی (به شعاع $r=۶٫۰\times۱۰^{-۷}\,\mathrm{m}$) چنین می‌شود:

$$W=\rho Vg=(۱۰۰۰\,\mathrm{kg/m^۳})\left(\frac{۴\pi}{۳}(۶٫۰\times۱۰^{-۷}\,\mathrm{m})^۳\right)\times(۹٫۸۰\,\mathrm{m/s^۲})$$
$$=۸٫۸۷\times۱۰^{-۱۵}\,\mathrm{N}$$

(ب) تعادل قائم نیروها به $mg=qE=neE$ می‌انجامد و از آنجا می‌توانیم تعداد الکترون‌های اضافی n را بیابیم

$$n=\frac{mg}{eE}=\frac{۸٫۸۷\times۱۰^{-۱۵}\,\mathrm{N}}{(۱٫۶۰\times۱۰^{-۱۹}\,\mathrm{C})(۴۶۲\,\mathrm{N/C})}=۱۲۰$$

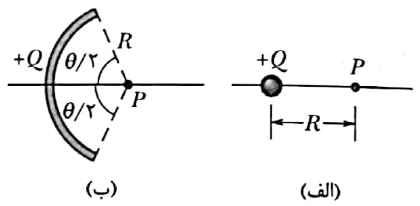
۶۴ سه ذره، هر یک با بار مثبت Q، تشکیل مثلث متساوی‌الاضلاعی را داده‌اند که طول هر ضلع آن برابر با d است. بزرگی میدان الکتریکی حاصل از این ذره‌ها در وسط هر ضلع چقدر است؟

Scanned by CamScanner

حل دو نزدیک‌ترین بار به وسط هر ضلع، میدان‌هایی را در این نقطه ایجاد می‌کنند که همدیگر را در آنجا خنثی می‌کنند. بنابراین فقط دورترین بار که به فاصله $r=\sqrt{3}d/2$ از وسط ضلع واقع است در میدان الکتریکی سهم دارد. با قرار دادن این مقدار در معادله‌ی $E=Q/4\pi\varepsilon_0 r^2$، میدان در وسط ضلع چنین می‌شود:

$$E=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0(\sqrt{3}d/2)^2}=\frac{Q}{3\pi\varepsilon_0 d^2}$$

۶۵ در شکل ۲۲-۶۴ الف، ذره‌ای با بار $+Q$ میدانی الکتریکی به بزرگی $E_{\text{ذره}}$ را در نقطه‌ی P، به فاصله‌ی R از این ذره ایجاد می‌کند. در شکل ۲۲-۶۴ ب، همان مقدار بار به‌طور یکنواخت روی کمانی دایره‌ای به شعاع R و زاویه‌ی θ پخش شده است. بار روی این کمان، میدانی الکتریکی به بزرگی $E_{\text{کمان}}$ را در مرکز خمیدگی Pی آن ایجاد می‌کند. به‌ازای چه مقداری از θ، $E_{\text{کمان}}=0.500E_{\text{ذره}}$ است؟ (*راهنمایی:* شما احتمالاً یک حلّ ترسیمی را به‌کار می‌گیرید.)



شکل ۲۲-۶۴ مسئله‌ی ۶۵

حل نخست به فرمولی برای میدان حاصل از کمان نیاز داریم. در حلّ مسئله‌ی ۲۹، این فرمول را به‌دست آوردیم:

$$E_{\text{کمان}}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}[\sin(\theta/2)-\sin(\theta/2)]=\frac{\lambda\sin(\theta/2)}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

که در آن $\lambda=Q/L$ چگالی خطی بار روی کمان و θ زاویه‌ی مرکزی کمان است. اگر θ بر حسب رادیان باشد، طول کمان $L=r\theta$ می‌شود. با قرار دادن R به‌جای r به رابطه‌ی زیر می‌رسیم:

$$E_{\text{کمان}}=\frac{Q/L\sin(\theta/2)}{2\pi\varepsilon_0 R}=\frac{Q\sin(\theta/2)}{2\pi\varepsilon_0\theta R^2}$$

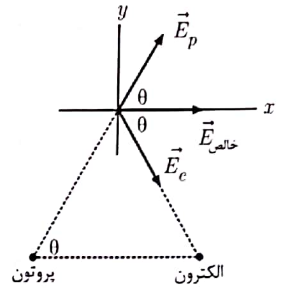
می‌خواهیم $E_{\text{کمان}}=\frac{1}{2}E_{\text{ذره}}$ باشد که $E_{\text{ذره}}$ با معادله‌ی ۲۲-۳ داده می‌شود. بنابراین داریم:

$$\frac{Q\sin(\theta/2)}{2\pi\varepsilon_0\theta R^2}=\frac{1}{2}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

و از آنجا $\sin(\theta/2)=\theta/4$ می‌شود، که دوباره توجه می‌هیم که زاویه بر حسب رادیان است. جواب تقریبی این معادله برابر با $\theta=3.79\,\text{rad}\approx 217°$ می‌شود.

۶۶ یک پروتون و یک الکترون دو رأس مثلث متساوی‌الاضلاعی را تشکیل داده‌اند که طول هر ضلع آن $2.0\times10^{-6}\,\text{m}$ است. بزرگی میدان الکتریکی خالص حاصل از این دو ذره در محل رأس سوم چقدر است؟

حل الکترون را با نماد e و پروتون را با نماد p نشان می‌دهیم.



از شکل درمی‌یابیم

$$|\vec E_e|=|\vec E_p|=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 d^2}$$

که در آن $d=2.0\times10^{-6}\,\text{m}$ است.

توجه کنید که مؤلفه‌های میدان‌های الکترون و پروتون در امتداد محور y همدیگر را خنثی می‌کنند. به‌ازای $\theta=60°$، بزرگی میدان الکتریکی خالص چنین می‌شود:

$$|\vec E_{\text{net}}|=E_x=2E_e\cos\theta=2\left(\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 d^2}\right)\cos\theta$$
$$=2k\left(\frac{e}{d^2}\right)\cos\theta$$
$$=2(8.99\times10^9\,\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C})\left[\frac{(1.6\times10^{-19}\,\text{C})}{(2.0\times10^{-6}\,\text{m})^2}\right]\cos60°$$
$$=3.6\times10^2\,\text{N/C}$$

۶۷ باری (با چگالی خطی یکنواخت $9.0\,\text{nC/m}$) روی تاری قرار دارد که بر محور x از $x=0$ تا $x=3.0\,\text{m}$ امتداد یافته است. بزرگی میدان الکتریکی را در $x=4.0\,\text{m}$ روی محور x تعیین کنید.

حل بخش کوچکی (یک عنصر دیفرانسیلی) از توزیع بار دارای بار $dq=\lambda dx$ است که در آن $\lambda=9.0\times10^{-9}\,\text{C/m}$ است. سهم این بخش در میدان الکتریکی در $x_p=4.0\,\text{m}$ برابر است با

$$dE=\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0(x-x_p)^2}$$

که در جهت $+x$ است. بنابراین داریم:

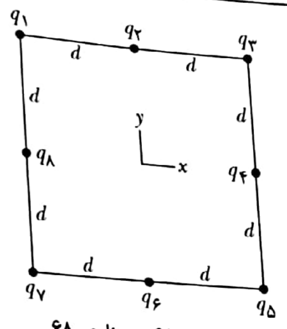
$$\vec E=\int_0^{3.0\text{m}}\frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0(x-x_p)^2}\hat{\mathrm{i}}$$

که با تغییرمتغیر $u=x-x_p$ چنین می‌شود:

$$\vec E=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-4.0\text{m}}^{-1.0\text{m}}\frac{du}{u^2}\hat{\mathrm{i}}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-1}{-1.0\,\text{m}}-\frac{-1}{-4.0\,\text{m}}\right)\hat{\mathrm{i}}$$
$$=(61\,\text{N/C})\hat{\mathrm{i}}$$

۶۸ در شکل ۲۲-۶۵، هشت ذره تشکیل مربعی را داده‌اند که در آن $d=2.0\,\text{cm}$ است. بارها عبارت‌اند از: $q_1=+3e$، $q_2=+e$، $q_3=-5e$، $q_4=-2e$، $q_5=+3e$، $q_6=+e$، $q_7=-5e$، و $q_8=+e$. برحسب نمادگذاری بردارهای یکه، میدان الکتریکی خالصی که این ذره‌ها در مرکز مربع ایجاد می‌کنند، چگونه است؟

Scanned by CamScanner



شکل ۲۲-۶۵ مسئله‌ی ۶۸

حل بیشتر میدان‌های مجزای حاصل از بارهایی که به‌طور قطری در مقابل هم هستند همدیگر را خنثی می‌کنند و تنها میدان حاصل از جفت باری که روی محور x قرار دارند در میدان الکتریکی مرکز مربع نقش دارند. این جفت بار، میدان زیر را در مرکز مربع ایجاد می‌کنند که جهت آن به سمت راست است:

$$\vec{E} = \frac{3q}{4\pi\varepsilon_0 d^2}\hat{\mathbf{i}} = \frac{3e}{4\pi\varepsilon_0 (0.020\,\mathrm{m})^2}\hat{\mathbf{i}} = (1.1\times10^{-5}\,\mathrm{N/C})\hat{\mathbf{i}}$$

۶۹ دو ذره، هر یک با بار $12\,\mathrm{nC}$، در دو رأس مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع $2.0\,\mathrm{m}$ قرار دارند. بزرگی میدان الکتریکی در رأس سوم چقدر است، در صورتی که (الف) هر دو بار مثبت و (ب) یکی از بارها مثبت و دیگری منفی باشد؟

حل (الف) از تقارن شکل درمی‌یابیم که مؤلفه‌ی میدان الکتریکی خالص در امتداد محور x برابر با صفر است و مؤلفه‌ی میدان الکتریکی در امتداد محور y رو به بالا می‌شود. به‌ازای $\theta = 60°$ داریم:

$$E_{\text{net},y} = 2\frac{Q\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$$

چون $\sin 60° = \sqrt{3}/2$ است، این رابطه را می‌توانیم به‌صورت $E_{\text{net}} = kQ\sqrt{3}/a^2$ بنویسیم که با گذاشتن مقادیر، $E_{\text{net}} = 47\,\mathrm{N/C}$ می‌شود.

(ب) از تقارن شکل درمی‌یابیم که در این حالت مؤلفه‌ی میدان الکتریکی خالص در امتداد محور y برابر صفر است و مؤلفه‌ی میدان الکتریکی در امتداد محور x رو به سمت راست می‌شود. به‌ازای $\theta = 60°$ داریم:

$$E_{\text{net},x} = 2\frac{Q\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$$

چون $\cos 60° = 1/2$، این رابطه را می‌توانیم به‌صورت $E_{\text{net}} = kQ/a^2$ بنویسیم که با گذاشتن مقادیر ($Q = 12\times10^{-9}\,\mathrm{C}$ و $a = 2.0\,\mathrm{m}$)، $E_{\text{net}} \approx 27\,\mathrm{N/C}$ می‌شود.

۷۰ جدول زیر بارهایی را نشان می‌دهد که میلیکان در آزمایش خود در زمان‌های مختلف روی یک قطره مشاهده کرد. با استفاده از این داده‌ها، بار بنیادی e را محاسبه کنید.

$6.563\times10^{-19}\,\mathrm{C}$	$13.13\times10^{-19}\,\mathrm{C}$	$19.71\times10^{-19}\,\mathrm{C}$
$8.204\times10^{-19}\,\mathrm{C}$	$16.48\times10^{-19}\,\mathrm{C}$	$22.89\times10^{-19}\,\mathrm{C}$
$11.50\times10^{-19}\,\mathrm{C}$	$18.08\times10^{-19}\,\mathrm{C}$	$26.13\times10^{-19}\,\mathrm{C}$

حل روش ما (براساس معادله‌ی $q = ne$) شامل چند مرحله [illegible] نخستین مرحله، یافتن یک مقدار تقریبی برای e با بررسی اختلاف [illegible] مقدارهای داده شده است. کمترین اختلاف، میان مقادیر داده‌های [illegible] ششم است:

$$[\ldots]\times10^{-19}\,\mathrm{C} - 16.48\times10^{-19}\,\mathrm{C} = 1.60\times10^{-19}\,\mathrm{C}$$

که آن را با $e_{\text{تقریبی}}$ مشخص می‌کنیم. هدف ما در اینجا تعیین [illegible] استفاده از این مقدار تقریبی برای e با استفاده از معادله‌ی $q = ne$ [illegible]

$$\text{داده‌ی ۱}: \frac{6.563\times10^{-19}\,\mathrm{C}}{e_{\text{تقریبی}}} = 4.10 \Rightarrow n_1 = 4$$

$$\text{داده‌ی ۲}: \frac{8.204\times10^{-19}\,\mathrm{C}}{e_{\text{تقریبی}}} = 5.13 \Rightarrow n_2 = 5$$

$$\text{داده‌ی ۳}: \frac{11.50\times10^{-19}\,\mathrm{C}}{e_{\text{تقریبی}}} = 7.19 \Rightarrow n_3 = 7$$

$$\text{داده‌ی ۴}: \frac{13.13\times10^{-19}\,\mathrm{C}}{e_{\text{تقریبی}}} = 8.21 \Rightarrow n_4 = 8$$

$$\text{داده‌ی ۵}: \frac{16.48\times10^{-19}\,\mathrm{C}}{e_{\text{تقریبی}}} = 10.30 \Rightarrow n_5 = 10$$

$$\text{داده‌ی ۶}: \frac{18.08\times10^{-19}\,\mathrm{C}}{e_{\text{تقریبی}}} = 11.30 \Rightarrow n_6 = 11$$

$$\text{داده‌ی ۷}: \frac{19.71\times10^{-19}\,\mathrm{C}}{e_{\text{تقریبی}}} = 12.32 \Rightarrow n_7 = 12$$

$$\text{داده‌ی ۸}: \frac{22.89\times10^{-19}\,\mathrm{C}}{e_{\text{تقریبی}}} = 14.31 \Rightarrow n_8 = 14$$

$$\text{داده‌ی ۹}: \frac{26.13\times10^{-19}\,\mathrm{C}}{e_{\text{تقریبی}}} = 16.33 \Rightarrow n_9 = 16$$

یک مجموعه‌ی جدید از داده‌ها ($e_1, e_2, e_3, \ldots$) را با تقسیم مقادیر [illegible] شده بر مقادیر دقیق مربوط به آنها (یعنی n_i به‌ازای $\ldots,1,2,3$) بنا می‌کنیم:

$$(e_1, e_2, e_3, \ldots) = \left(\frac{6.563\times10^{-19}\,\mathrm{C}}{n_1}, \frac{8.204\times10^{-19}\,\mathrm{C}}{n_2}, \frac{11.50\times10^{-19}\,\mathrm{C}}{n_3}, \ldots\right)$$

که مقادیر زیر را به‌دست می‌دهد (نگه داشتن رقم‌های بیشتر اعتبار [illegible] دارد)،

$$(1.64075\times10^{-19}\,\mathrm{C}, 1.6408\times10^{-19}\,\mathrm{C}, 1.64286\times10^{-19}\,\mathrm{C}, \ldots)$$

که آن را به‌عنوان مجموعه‌ی داده‌های جدید (مقادیر آزمایشگاهی [illegible] e) در نظر می‌گیریم. حال با گرفتن میانگین و انحراف معیار به مقدار [illegible] می‌رسیم:

$$e = e_{\text{avg}} \pm \Delta e = (1.641 \pm 0.004)\times10^{-19}\,\mathrm{C}$$

که با مقدارپذیری شده‌ی امروزی برای e نمی‌خواند. حدّ پایین این [illegible] به $e_{\text{avg}} - \Delta e = 1.637\times10^{-19}\,\mathrm{C}$ می‌انجامد که هنوز در حدود ۲٪ [illegible] از مقدار پذیرفته شده برای e است.

Scanned by CamScanner

۷۱ بار $۲۰nC$ به‌طور یکنواخت روی میله‌ی مستقیمی به طول $۴/۰m$ توزیع شده است که به شکل کمانی دایره‌ای به شعاع $۲/۰m$ درآمده است. بزرگی میدان الکتریکی در مرکز خمیدگی این کمان چقدر است؟

حل میدان الکتریکی حاصل از یک کمان دایره‌ای در مرکز خمیدگی آن در مسئله‌ی ۲۹ به‌دست آمد:

$$E=\frac{\lambda}{۴\pi\varepsilon_{\circ}r}[\sin(\theta/۲)-\sin(-\theta/۲)]=\frac{\lambda\sin(\theta/۲)}{۲\pi\varepsilon_{\circ}r}$$

که جهت آن در امتداد محور تقارن است. $\lambda=q/L=q/r\theta$ است که در آن θ بر حسب رادیان است. L طول کمان و برابر با $۴/۰m$ است. از طرفی $\theta\simeq L/r=۴/۰/۲/۰=۲/۰rad$ است. پس، به‌ازای $q=۲۰\times۱۰^{-۹}C$ خواهیم داشت:

$$E=\frac{۲q}{L}\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_{\circ}r}\sin(\theta/۲)$$

$$=\left[\frac{۲(۲۰\times۱۰^{-۹}C)}{۴/۰m}\right]\left[\frac{۹/۰\times۱۰^{۹}N\cdot m^{۲}/C^{۲}}{۲/۰m}\right]\sin(۱/۰rad)$$

$$=۳۸N/C$$

۷۲ الکترونی مقید است که بر محور مرکزی حلقه‌ی باردار شکل ۲۲-۱۱ به شعاع R، با $z\ll R$، حرکت کند. نشان دهید نیروی الکتروستاتیکی وارد بر الکترون می‌تواند موجب نوسان آن حول مرکز حلقه با بسامد زاویه‌ای زیر شود

$$\omega=\sqrt{\frac{eq}{۴\pi\varepsilon_{\circ}mR^{۳}}}$$

که در آن q بار حلقه و m جرم الکترون است.

حل میدان الکتریکی در نقطه‌ای روی محور یک حلقه‌ی باردار یکنواخت، به فاصله‌ی z از مرکز حلقه با معادله ۲۲-۱۶ داده می‌شود:

$$E=\frac{qz}{۴\pi\varepsilon_{\circ}(z^{۲}+R^{۲})^{۳/۲}}$$

که q بار حلقه و R شعاع آن است. برای q مثبت، سوی میدان رو به بالا و برای q منفی، سوی میدان رو به پایین است. سوی مثبت را رو به بالا می‌گیریم. بنابراین نیروی وارد بر یک الکترون روی محور چنین می‌شود:

$$F=-\frac{eqz}{۴\pi\varepsilon_{\circ}(z^{۲}+R^{۲})^{۳/۲}}$$

برای نوسان‌های کم‌دامنه $z\ll R$ است و بنابراین می‌توانیم از z در مخرج کسر بالا چشم‌پوشی کنیم. بنابراین داریم

$$F=-\frac{eqz}{۴\pi\varepsilon_{\circ}R^{۳}}$$

این، نیروی بازگرداننده است، یعنی الکترون را به سمت نقطه‌ی تعادل $z=۰$ می‌کشاند. به‌علاوه، بزرگی این نیرو متناسب با z است، درست مانند اینکه الکترون به فنری با ثابت فنر $k=eq/۴\pi\varepsilon_{\circ}R^{۳}$ چسبیده باشد. پس الکترون یک حرکت هماهنگ ساده با بسامد زاویه‌ای زیر انجام می‌دهد

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{eq}{۴\pi\varepsilon_{\circ}mR^{۳}}}$$

که m جرم الکترون است.

نکته: در سطوح بالاتر مرسوم است که شتاب را که مشتق دوم جابه‌جایی است با نماد $\ddot{x}$ (در اینجا $\ddot{z}$) نمایش دهند. بنابراین طبق قانون دوم نیوتون $F=ma$، خواهیم داشت:

$$m\ddot{z}+\frac{eq}{۴\pi\varepsilon_{\circ}R^{۳}}z=۰\ \Rightarrow\ \ddot{z}+\frac{eq}{۴\pi m\varepsilon_{\circ}R^{۳}}z=۰$$

که این معادله‌ی یک نوسانگر هماهنگ ساده با بسامد $\omega=\sqrt{eq/۴\pi\varepsilon_{\circ}mR^{۳}}$ است.

۷۳ میدان الکتریکی در صفحه‌ی xy حاصل از ذره‌ی باردار مثبتی واقع در نقطه‌ی $(۳/۰,۳/۰)cm$ برابر $۷/۲(۴/۰\hat{i}+۳/۰\hat{j})N/C$ و در نقطه‌ی $(۲/۰,۰)cm$ برابر $۱۰۰\hat{i}N/C$ است. مختصه‌ی (الف) x و (ب) y این ذره چیست؟ (پ) بار روی ذره چقدر است؟

حل از اندازه‌گیری دوم (در $(۲/۰,۰)$) درمی‌یابیم که بار باید جایی روی محور x باشد. خطی که با شیب $\tan^{-1}\left(\frac{۳}{۴}\right)$ از $(۳/۰cm,۳/۰cm)$ می‌گذرد محور x را در $x=-۱/۰cm$ قطع می‌کند. بنابراین، مکان ذره با مختصات $(-۱/۰,۰)$ برحسب سانتی‌متر مشخص می‌شود.

(الف) براساس آنچه که در بالا بیان شد، مختصه‌ی x برابر با $x=-۱/۰cm$ می‌شود.

(ب) به همین ترتیب مختصه‌ی y برابر $y=۰$ می‌شود.

(پ) بزرگی میدان الکتریکی در $(۲/۰cm,۰)$ که به فاصله‌ی $r=۰/۰۳۰m$ از بار قرار دارد چنین است

$$|\vec{E}|=\frac{q}{۴\pi\varepsilon_{\circ}r^{۲}}=۱۰۰N/C$$

با توجه به اینکه $۱/۴\pi\varepsilon_{\circ}=۹/۰\times۱۰^{۹}N\cdot m^{۲}/C^{۲}$ است به $q=۱/۰\times۱۰^{-۱۱}C=۱۰pC$ می‌رسیم.

۷۴ (الف) چه بار کلّ (اضافی) q یی باید روی قرص شکل ۲۲-۱۵ باشد تا بزرگی E ی میدان الکتریکی روی سطح قرص در مرکز آن برابر $۳/۰\times۱۰^{۶}N/C$ شود، مقداری که موجب فروریزش الکتریکی هوا و تخلیه‌ی جرقه‌ای می‌شود؟ شعاع قرص را $۲/۵cm$ در نظر بگیرید. (ب) فرض کنید هر اتم سطحی دارای سطح مقطع مؤثر $۰/۰۱۵nm^{۲}$ است. به چند اتم نیاز است تا سطح این قرص ساخته شود؟ (پ) مقدار بار محاسبه شده در قسمت (الف) ناشی از اتم‌های سطحی است که دارای یک الکترون اضافی هستند. چه کسری از این اتم‌ها باید این‌چنین باردار شده باشند؟

Scanned by CamScanner

حل (الف) $E=\sigma/۲\varepsilon_۰$ را با $\sigma=|q|/A$ در هم می‌آمیزیم و از آنجا $|q|$ را به‌دست می‌آوریم:

$$|q|=\pi R^۲\sigma=۲\pi\varepsilon_۰R^۲E=\frac{R^۲E}{۲k}$$

$$=\frac{(۲/۵\times۱۰^{-۲}\,m)^۲(۳/۰\times۱۰^۶\,N/C)}{۲(۸/۹۹\times۱۰^۹\,N\cdot m^۲/C^۲)}=۱/۰\times۱۰^{-۷}\,C$$

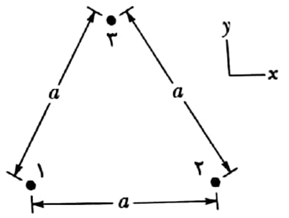
(ب) با یک تناسب ساده تعداد اتم‌ها تقریب زده می‌شود

$$N=\frac{\pi(۲/۵\times۱۰^{-۲}\,m)^۲}{۰/۰۱۵\times۱۰^{-۱۸}\,m^۲}=۱/۳\times۱۰^{۱۷}$$

(پ) بنابراین نسبت q/Ne چنین می‌شود

$$\frac{q}{Ne}=\frac{۱/۰\times۱۰^{-۷}\,C}{(۱/۳\times۱۰^{۱۷})(۱/۶\times۱۰^{-۱۹}\,C)}=۵/۰$$

۷۵ در شکل ۲۲-۶۶، ذره‌ی ۱ (با بار $+۱/۰۰\mu C$)، ذره‌ی ۲ (با بار $+۱/۰۰\mu C$)، و ذره‌ی ۳ (با بار Q) تشکیل مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع a را داده‌اند. به‌ازای چه مقداری از q (بزرگی همراه با علامت) میدان الکتریکی خالص حاصل از این سه ذره در مرکز مثلث برابر صفر می‌شود؟



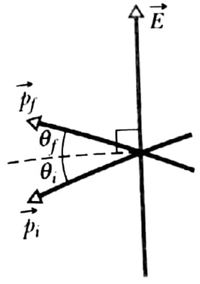
شکل ۲۲-۶۶ مسئله‌ی ۷۵ و ۸۶

حل بزرگی بار Q را به‌سادگی می‌توان از روی تقارن حدس زد که برابر با $Q=+۱/۰۰\mu C$ می‌شود. ولی اگر بخواهیم مسئله را به‌طور تحلیلی حل کنیم باید ازمعادله‌ی میدان الکتریکی (معادله‌ی ۲۲-۳) استفاده کنیم. هر یک از سه بار به فاصله‌ی $r=a/\sqrt{۳}$ از مرکز C مثلث قرار دارند. برای آنکه میدان خالص در نقطه‌ی C برابر با صفر باشد باید مؤلفه‌های x و مؤلفه‌های y میدان در این نقطه برابر با صفر شوند. با فرض $Q>۰$، $E_{net,y}=۰$ چنین به‌دست می‌دهد:

$$\frac{۲kq\sin۳۰^\circ}{r^۲}=\frac{kQ}{r^۲}$$

که q بار گوشه‌های پایینی مثلث است. از آنجا به $Q=۲q\sin۳۰^\circ=q$ می‌رسیم که همان نتیجه‌ای است که پیش‌تر براساس تقارن حدس زدیم.

۷۶ در شکل ۲۲-۶۷، یک دوقطبی الکتریکی از سمتگیری اولیه‌ی i ($\theta_i=۲۰/۰^\circ$) به سمتگیری نهایی f ($\theta_f=۲۰/۰^\circ$) در یک میدان الکتریکی یکنواخت خارجی $\vec{E}$ تاب می‌خورد. گشتاور دوقطبی الکتریکی $۱/۶۰\times۱۰^{-۲۷}$ C·m و بزرگی میدان $۳/۰۰\times۱۰^۶$ N/C است. تغییر انرژی پتانسیل دوقطبی چقدر است؟



شکل ۲۲-۶۷ مسئله‌ی ۷۶

حل طبق معادله‌ی ۲۲-۳۸، $U=-\vec{p}\cdot\vec{E}=-pE\cos\theta$ است. توجه کنید که θ زاویه‌ی بین $\vec{p}$ و $\vec{E}$، و بنابراین $\theta_i=۱۱۰^\circ$ و $\theta_f=۷۰/۰^\circ$ است در نتیجه خواهیم داشت:

$$\Delta U=-pE(\cos۷۰/۰^\circ-\cos۱۱۰^\circ)=-۳/۲۸\times۱۰^{-۲۱}\,J$$

۷۷ ذره‌ای با بار $-q_۱$ در مبداء محور x قرار دارد. (الف) ذره‌ای با بار $-۴q_۱$ در چه مکانی روی این محور باید قرار داده شود تا میدان الکتریکی خالص در $x=۲/۰\,mm$ برابر صفر شود؟ (ب) اگر، به جای این ذره، ذره‌ای با بار $+۴q_۱$ در آن مکان قرار داده شود، جهت میدان الکتریکی خالص (نسبت به سوی مثبت محور x) در $x=۲/۰\,mm$ چگونه می‌شود؟

حل (الف) چون دو بار، هم‌علامت هستند، میدان در جایی میان این دو بار صفر می‌شود و بنابراین $x=۲/۰\,mm$ باید در میان آنها واقع شده باشد. با اختیار مبدأ مختصات در محلّ ذره‌ی با بار $-q_۱$، مختصه‌ی مکان ذره‌ی دوم را d می‌نامیم. آنگاه میدان حاصل از $-q_۱$ برابر $E_۱=q_۱/۴\pi\varepsilon_۰a^۲$ و میدان حاصل از بار $-۴q_۱$ برابر با $E_۲=۴q_۱/۴\pi\varepsilon_۰(d-x)^۲$ می‌شود. برای آنکه میدان خالص $E_{net}=۰$ باشد، این دو مقدار را با هم قرار می‌دهیم:

$$E_۱=E_۲ \;\Rightarrow\; \frac{q_۱}{۴\pi\varepsilon_۰x^۲}=\frac{۴q_۱}{۴\pi\varepsilon_۰(d-x)^۲}$$

که به $d=۳x=۳(۲/۰\,mm)=۶/۰\,mm$ می‌انجامد.

(ب) در این حالت که ذره‌ی دوم اکنون مثبت است، بردارهای میدان الکتریکی ایجاد شده توسط هر دو بار در $x=۲/۰\,mm$، در سوی $-x$ می‌شود. بنابراین جهت میدان الکتریکی خالص در سوی $-x$ یا ۱۸۰° پادساعتگرد نسبت به محور $+x$ می‌شود.

۷۸ دوذره، هر یک با بار مثبت q، روی محور y، یکی در $y=d$ و دیگری در $y=-d$ ثابت شده‌اند. (الف) عبارتی بنویسید که بزرگی E ی میدان الکتریکی خالص حاصل از این دو ذره را در نقاطی به‌دست دهد که با $x=\alpha d$ داده شده‌اند. (ب) برای گستره‌ی $۰<\alpha<۴$، E را برحسب α رسم کنید. از روی این نمودار، مقادیر αیی را تعیین کنید که (پ) مقدار بیشینه‌ی E و (ت) نصف مقدار بیشینه‌ی E را به‌دست دهند.

Scanned by CamScanner

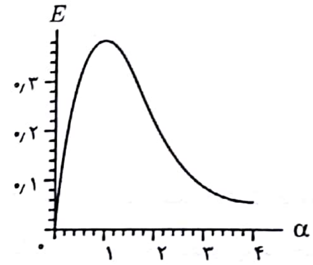
حل بار واقع در $y=d$ را با q_1 و بار واقع در $y=-d$ را با q_2 نشان می‌دهیم. بزرگی میدان‌های مجزای $|\vec{E}_1|$ و $|\vec{E}_2|$ از قانون کولن (معادله‌ی ۲۲-۳) به‌دست می‌آیند که البته قدرمطلق‌های بار برای q لازم نیست، زیرا هر دو بار مثبت‌اند. فاصله‌ی q_1 تا نقطه‌ای روی محور x برابر با فاصله‌ی q_2 تا همان نقطه روی محور x و برابر $r=\sqrt{x^2+d^2}$ است. طبق تقارن، مؤلفه‌ی y میدان خالص روی محور x برابر با صفر است. مؤلفه‌ی x میدان خالص روی نقاط محور $+x$ چنین می‌شود:

$$E_x=2\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\left(\frac{q}{r^2}\right)\cos\theta=2\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\left(\frac{q}{r^2}\right)\left(\frac{x}{r}\right)$$
$$=2\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\left(\frac{q}{x^2+d^2}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+d^2}}\right)$$
$$=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{x}{(x^2+d^2)^{3/2}}\right]$$

(الف) اگر رابطه‌ی بالا را با $x=\alpha d$ ساده کنیم به رابطه‌ی زیر می‌رسیم:

$$E_x=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 d^2}\left(\frac{\alpha}{(\alpha^2+1)^{3/2}}\right)$$

(ب) نمودار $E=E_x$ برحسب α در پایین رسم شده است. برای رسم چنین نموداری به مقادیر d و q نیاز داریم و در اینجا این نمودار به ازای $q=5.56\times10^{-11}\,\text{C}$ و $d=1\text{m}$ رسم شده است.



(پ) از روی این نمودار درمی‌یابیم که $E_{\max}$ تقریباً در $\alpha=0.71$ رخ می‌دهد. ولی روش دقیق‌تر آن است که از E_x نسبت به α مشتق گیریم و نتیجه را برابر صفر قرار دهیم:

$$\frac{dE_x}{d\alpha}=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 d^2}\left[(\alpha^2+1)^{-3/2}-3\alpha^2(\alpha^2+1)^{-5/2}\right]=0$$

و در نتیجه

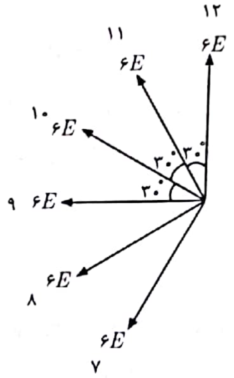
$$(\alpha^2+1)^{-3/2}\left[1-\frac{3\alpha^2}{\alpha^2+1}\right]=0$$

که به $\alpha=1/\sqrt{2}$ می‌انجامد.

(ت) از روی نمودار درمی‌یابیم که نقاط "نیم ـ ارتفاع" در $\alpha\approx0.2$ و $\alpha\approx2.0$ رخ می‌دهند. روش دقیق‌تر به طریق عددی است. به این ترتیب که $E_x=E_{\max}/2$ قرار دهیم که در آن صورت به $\alpha=0.204$ و $\alpha=1.99$ می‌رسیم.

۷۹ یک صفحه‌ی ساعت دارای بارهای نقطه‌ای $-q$، $-2q$، $-3q$، ...، $-12q$ است که در مکان‌های مربوط به شماره‌ی آنها قرار گرفته‌اند. عقربه‌های ساعت، میدان الکتریکی خالص حاصل از این بارهای نقطه‌ای را بر هم نمی‌زنند. در چه زمانی، عقربه‌ی ساعت‌شمار در همان جهتی است که بردار میدان الکتریکی در مرکز صفحه‌ی ساعت قرار دارد؟ (*راهنمایی:* از تقارن استفاده کنید.)

حل ساعت‌های قرینه (به‌طور قطری مقابل هم) را دو به دو در نظر می‌گیریم. بنابراین به شش میدان الکتریکی به بزرگی $6E$، به سوی بارهای $-12q$، $-11q$، $-10q$، $-9q$، $-8q$ و $-7q$ می‌رسیم.



مؤلفه‌های قائم میدان‌های مایل (مربوط به $-11q$، $-10q$، $-8q$ و $-7q$) با هم خنثی می‌شوند و مؤلفه‌ی قائم برایند، تنها مربوط به $-12q$ و برابر $6E$ است. برایند مؤلفه‌های افقی چنین می‌شود:

$$E_x=6E\cos60^\circ+6E\cos30^\circ+6E+6E\cos30^\circ+6E\cos60^\circ$$
$$=6E(1+2\cos30^\circ+2\cos60^\circ)=22.39\text{E}$$

پس، زاویه‌ی ϕ میان بردار میدان برآیند و راستای افق چنین می‌شود

$$\phi=\tan^{-1}\frac{6.0E}{-22.39E}=-15^\circ$$

که بدین معنی است که عقربه‌ی ساعت‌شمار به اندازه‌ی 15° از عدد ۹ جلوتر رفته است که این معادل ساعت ۹ و ۳۰ دقیقه می‌شود.

البته می‌توانستیم به روش هوشمندانه‌تری در همان ابتدا براساس تقارن حدس بزنیم که عقربه‌ی ساعت‌شمار در جهتی دقیقاً در میان ساعت‌های ۷ و ۱۲ قرار دارد که همان ساعت ۹ و ۳۰ دقیقه است.

۸۰ گشتاور دوقطبی الکتریکی یک الکترون و یک پروتون را که در فاصله‌ی 4.30nm از هم قرار دارند، محاسبه کنید.

حل بزرگی گشتاور دوقطبی با $p=qd$ داده می‌شود که q بار مثبت در دوقطبی و d فاصله‌ی جدایی بارها است. برای دوقطبی توصیف شده در این مسئله خواهیم داشت:

$$p=(1.60\times10^{-19}\,\text{C})(4.30\times10^{-9}\,\text{m})=6.88\times10^{-28}\,\text{C}\cdot\text{m}$$

گشتاور دوقطبی، برداری است که جهت آن از بار منفی به سمت بار مثبت است.

۸۱ میدان الکتریکی $\vec{E}$ در جوّ نزدیک سطح زمین دارای بزرگی متوسطی حدود $150\,\text{N/C}$ و رو به پایین است. می‌خواهیم کره‌ای از جنس گوگرد به وزن 4.4N را با باردار کردن آن در این میدان "شناور

Scanned by CamScanner

کنیم". (الف) از چه باری (بزرگی همراه با علامت) باید استفاده شود؟ (ب) چرا این آزمایش، عملی نیست؟

حل (الف) چون $\vec{E}$ رو به پایین است و ما نیاز به یک نیروی الکتریکی رو به بالا برای خنثی کردن نیروی رو به پایین گرانشی داریم، لازم است که بار کره منفی باشد. بزرگی این بار از قدرمطلق معادله‌ی ۲۲-۲۸ به‌دست می‌آید:

$$|q|=\frac{F}{E}=\frac{mg}{E}=\frac{۴٫۴\text{N}}{۱۵۰\text{N/C}}=۰٫۰۲۹\text{C}$$

و از آنجا $q=-۰٫۰۲۹\text{C}$ می‌شود.

(ب) امکان‌پذیر بودن این آزمایش را می‌توان با استفاده از معادله‌ی ۲۲-۳، یعنی $E=k|q|/r^۲$، بررسی کرد. به این منظور نخست شعاع r را به‌دست می‌آوریم. داریم

$$m_{کره}=\rho_{گوگرد}\,V_{کره}=\rho_{گوگرد}\left(\frac{۴}{۳}\pi r^۳\right)$$

جرم کره برابر با $۴٫۴/۹٫۸=۰٫۴۵\text{kg}$ و چگالی گوگرد در حدود $۲٫۱\times۱۰^۳\text{ kg/m}^۳$ است (پیوست ج کتاب مبانی فیزیک را ببینید.) در نتیجه r چنین می‌شود

$$r=\left(\frac{۳m_{کره}}{۴\pi\rho_{گوگرد}}\right)^{\frac{۱}{۳}}=۰٫۰۳۷\text{m}$$

و از آنجا E به‌دست می‌آید:

$$E=k\frac{|q|}{r^۲}(۸٫۹۹\times۱۰^۹\text{N}\cdot\text{m}^۲/\text{C}^۲)\frac{۰٫۰۲۹\text{C}}{(۰٫۰۳۷\text{m})^۲}$$
$$\approx۲٫۰\times۱۰^{۱۱}\text{N/C}$$

که این بسیار بزرگ‌تر از میدانی است که می‌تواند در هوا حفظ شود. (**استدلال دیگر** این است که کره‌ی گوگردی را نمی‌توان مثل یک بار نقطه‌ای صلب در نظر گرفت و نیروی دافعه‌ی کولنی ناشی از این میدان بزرگ باعث از هم پاشیدن آن می‌شود).

۸۲ بر میله‌ای کمانی با شعاع خمیدگی $R=۹٫۰۰\text{cm}$ و زاویه‌ی $\theta=۲٫۴۰\text{rad}$، بار مثبت $Q=۶٫۲۵\text{pC}$ به‌طور یکنواختی توزیع شده است. بزرگی میدان الکتریکی Q ی حاصل در مرکز خمیدگی چقدر است؟

حل میدان الکتریکی حاصل از یک کمان را در مسئله‌ی ۲۹ به‌دست آوردیم:

$$E=\frac{\lambda}{۴\pi\varepsilon_۰ r}[\sin(\theta/۲)-\sin(-\theta/۲)]=\frac{\lambda\sin(\theta/۲)}{۲\pi\varepsilon_۰ r}$$

که در آن $\lambda=|Q|/L$ و $L=r\theta$ است، در صورتی که θ بر حسب رادیان باشد. بنابراین با قرار دادن R به جای r به‌دست می‌آوریم:

$$E=\frac{|Q|/L\sin(\theta/۲)}{۲\pi\varepsilon_۰ R}=\frac{|Q|\sin(\theta/۲)}{۲\pi\varepsilon_۰\theta R^۲}$$

که به‌ازای $|Q|=۶٫۲۵\times۱۰^{-۱۲}\text{C}$، $\theta=۲٫۴۰\text{rad}=۱۳۷^\circ$ و $R=۹٫۰۰\times۱۰^{-۲}\text{m}$، بزرگی میدان الکتریکی $E=۵٫۳۹\text{N/C}$ می‌شود.

۸۳ یک دوقطبی الکتریکی با گشتاور دوقطبی

$$\vec{p}=(۳٫۰۰\hat{i}+۴٫۰۰\hat{j})(۱٫۲۴\times۱۰^{-۳۰}\text{ C}\cdot\text{m})$$

در میدان الکتریکی $\vec{E}=(۴۰۰۰\text{N/C})\hat{i}$ قرار دارد. (الف) انرژی پتانسیل این دوقطبی الکتریکی چقدر است؟ (ب) گشتاور نیروی وارد بر آ[ن] چیست؟ (پ) اگر یک عامل خارجی دوقطبی را تا وضعیتی بچرخاند ک[ه] گشتاور دوقطبی الکتریکی آن

$$\vec{p}=(-۴٫۰۰\hat{i}+۳٫۰۰\hat{j})(۱٫۲۴\times۱۰^{-۳۰}\text{ C}\cdot\text{m})$$

شود، چقدر کار توسط آن عامل خارجی صورت گرفته است؟

حل (الف) با استفاده از معادله‌ی ۲۲-۳۸، انرژی پتانسیل چنین می‌شود:

$$U=-\vec{p}\cdot\vec{E}$$
$$=-\left[(۳٫۰۰\hat{i}+۴٫۰۰\hat{j})(۱٫۲۴\times۱۰^{-۳۰}\text{ C}\cdot\text{m})\right]\cdot\left[(۴۰۰۰\text{N/C})\hat{i}\right]$$
$$=-۱٫۴۹\times۱۰^{-۲۶}\text{J}$$

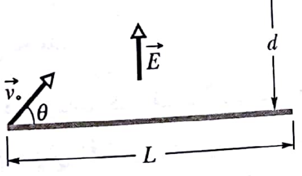
(ب) با استفاده از معادله‌ی ۲۲-۳۴، گشتاور نیرو چنین می‌شود:

$$\tau=\vec{p}\times\vec{E}$$
$$=\left[(۳٫۰۰\hat{i}+۴٫۰۰\hat{j})(۱٫۲۴\times۱۰^{-۳۰}\text{ C}\cdot\text{m})\right]\times\left[(۴۰۰۰\text{N/C})\hat{i}\right]$$
$$=(-۱٫۹۸\times۱۰^{-۲۶}\text{ N}\cdot\text{m})\hat{k}$$

(پ) کار انجام شده برابر است با

$$W=\Delta U=\Delta(-\vec{p}\cdot\vec{E})=(\vec{p}_i-\vec{p}_f)\cdot\vec{E}$$
$$=\left[(۳٫۰۰\hat{i}+۴٫۰۰\hat{j})-(-۴٫۰۰\hat{i}+۳٫۰۰\hat{j})\right]$$
$$\left[۱٫۲۴\times۱۰^{-۳۰}\text{C}\cdot\text{m}\right]\cdot\left[(۴۰۰۰\text{N/C})\hat{i}\right]=۳٫۴۷\times۱۰^{-۲۶}\text{J}$$

۸۴ در شکل ۲۲-۶۸، بر اثر باردار شدن مثبتِ صفحه‌ی پایینی و باردار شدن منفیِ صفحه‌ی بالایی، میدان الکتریکی یکنواخت بالاسوی $\vec{E}$ به بزرگی $۲٫۰۰\times۱۰^۳\text{ N/C}$ بین این دو صفحه ایجاد شده است. طول هر صفحه $L=۱۰٫۰\text{cm}$ و فاصله‌ی جدایی آنها $d=۲٫۰۰\text{cm}$ است. سپس الکترونی از لبه‌ی چپ صفحه‌ی پایینی به فضای میان دو صفحه شلیک می‌شود. سرعت اولیه‌ی $\vec{v}_۰$ الکترون با صفحه‌ی پایینی زاویه‌ی $\theta=۴۵٫۰^\circ$ می‌سازد و دارای بزرگی $۶٫۰۰\times۱۰^۶\text{ m/s}$ است. (الف) آیا الکترون با یکی از این دو صفحه برخورد می‌کند؟ (ب) اگر چنین است، با کدامیک از آنها و در چه فاصله‌ی افقی از لبه‌ی سمت چپ؟



شکل ۲۲-۶۸ مسئله‌ی ۸۴

حل روش اول. (الف) میدان الکتریکی در شکل، رو به بالا و بار منفی است. بنابراین نیروی وارد بر الکترون رو به پایین است. بزرگی شتاب $a=eE/m$ است که E بزرگی میدان و m جرم الکترون است.

Scanned by CamScanner

مقدار شتاب چنین می‌شود:

$$a=\frac{(۱٫۶۰\times۱۰^{-۱۹}\,C)(۲٫۰۰\times۱۰^{۳}\,N/C)}{۹٫۱۱\times۱۰^{-۳۱}\,kg}=۳٫۵۱\times۱۰^{۱۴}\,m/s^{۲}$$

مبدأ دستگاه مختصات را در مکان اولیه‌ی الکترون قرار می‌دهیم. محور x را افقی و سمت راست را جهت مثبت اختیار می‌کنیم. همچنین محور y را قائم و رو به بالا را مثبت اختیار می‌کنیم. معادله‌های سینماتیکی عبارتند از:

$$x=v_{۰}t\cos\theta_{۰}\ ,\ y=v_{۰}t\sin\theta_{۰}-\frac{۱}{۲}at^{۲}\ ,\ v_y=v_{۰}\sin\theta-at$$

نخست، بیشترین مختصه‌ی y را که الکترون به آن می‌تواند برسد محاسبه می‌کنیم. اگر این مقدار کمتر از d باشد، الکترون نمی‌تواند با صفحه‌ی بالایی برخورد کند. اگر این مقدار بزرگ‌تر از d باشد، در صورتی که مختصه‌ی x مربوط به آن کوچک‌تر از L باشد، با صفحه‌ی بالایی برخورد می‌کند. بیشترین مختصه‌ی y به‌ازای $v_y=۰$ رخ می‌دهد. این بدین معنی است که $v_{۰}\sin\theta_{۰}-at=۰$ یا $t=(v_{۰}/a)\sin\theta$، بیشینه‌ی y را چنین به‌دست می‌دهد:

$$y_{\max}=\frac{v_{۰}^{۲}\sin^{۲}\theta_{۰}}{a}-\frac{۱}{۲}a\frac{v_{۰}^{۲}\sin^{۲}\theta_{۰}}{a^{۲}}=\frac{۱}{۲}\frac{v_{۰}^{۲}\sin^{۲}\theta_{۰}}{a}$$
$$=\frac{(۶٫۰۰\times۱۰^{۶}\,m/s)^{۲}\sin^{۲}۴۵٫۰^{\circ}}{۲(۳٫۵۱\times۱۰^{۱۴}\,m/s^{۲})}=۲٫۵۶\times۱۰^{-۲}\,m$$

چون این مقدار بزرگ‌تر از $d=۲٫۰۰\,cm$ است، الکترون ممکن است با صفحه‌ی بالایی برخورد کند.

(ب) اکنون مختصه‌ی x مکان الکترون را وقتی $y=d$ است به‌دست می‌آوریم. معادله‌ی $d=v_{۰}t\sin\theta_{۰}-\frac{۱}{۲}at^{۲}$ را برای t حل می‌کنیم:

$$t=\frac{v_{۰}\sin\theta_{۰}-\sqrt{v_{۰}^{۲}\sin^{۲}\theta_{۰}-۲ad}}{a}$$

که در آن

$$v_{۰}\sin\theta_{۰}=(۶٫۰۰\times۱۰^{۶}\,m/s)\sin۴۵٫۰^{\circ}=۴٫۲۴\times۱۰^{۶}\,m/s$$

و

$$۲ad=۲(۳٫۵۱\times۱۰^{۱۴}\,m/s^{۲})(۰٫۰۲۰۰\,m)=۱٫۴۰\times۱۰^{۱۳}\,m^{۲}/s^{۲}$$

که به مقدار زیر برای t می‌انجامد:

$$t=\frac{۴٫۲۴\times۱۰^{۶}\,m/s-\sqrt{(۴٫۲۴\times۱۰^{۶}\,m/s)^{۲}-۱٫۴۰\times۱۰^{۱۳}\,m^{۲}/s^{۲}}}{۳٫۵۱\times۱۰^{۱۴}\,m/s^{۲}}$$
$$=۶٫۴۳\times۱۰^{-۹}\,s$$

علامت منفی ریشه را از آن‌رو انتخاب کردیم که به "کمترین" زمان که برای آن $y=d$ است نیاز داریم. از آنجا مختصه‌ی x چنین می‌شود:

$$x=v_{۰}t\cos\theta_{۰}=(۶٫۰۰\times۱۰^{۶}\,m/s)(۶٫۴۳\times۱۰^{-۹}\,s)\cos۴۵٫۰^{\circ}$$
$$=۲٫۷۲\times۱۰^{-۲}\,m$$

که این کمتر از L است و بنابراین الکترون با صفحه‌ی بالایی در $x=۲٫۷۲\,cm$ برخورد می‌کند.

روش دوم. (الف) و (ب) با اختیار همان محورهای مختصات به‌کار رفته در روش اول، مسئله را حل می‌کنیم. اگر الکترون بخواهد با صفحه‌ی بالایی برخورد کند باید در $y=d$، فاصله‌ی افقی برخورد کوچک‌تر از L باشد. توجه کنید همان‌طور که در روش اول بیان کردیم الکترون در خلاف جهت میدان الکتریکی شتاب می‌گیرد و $a_y<۰$ است.

$$y=-\frac{۱}{۲}\frac{eE}{m_e}t^{۲}+v_{۰}\sin\theta_{۰}t\ ,\ t=\frac{x}{v_{۰}\cos\theta_{۰}}$$

و در نتیجه

$$y=-\frac{۱}{۲}\frac{eE}{m_e}\left(\frac{x}{v_{۰}\cos\theta_{۰}}\right)^{۲}+(v_{۰}\sin\theta_{۰})\left(\frac{x}{v_{۰}\cos\theta_{۰}}\right)$$
$$=-\frac{۱}{۲}\frac{eE}{m_e}\frac{x^{۲}}{v_{۰}^{۲}\cos^{۲}\theta_{۰}}+x\tan\theta_{۰}$$

که با گذاشتن مقادیر به رابطه‌ی زیر می‌انجامد:

$$۲٫۰۰\times۱۰^{-۲}\,m=-\frac{۱}{۲}\frac{(۱٫۶۰\times۱۰^{-۱۹}\,C)(۲٫۰۰\times۱۰^{۳}\,N/C)}{۹٫۱۱\times۱۰^{-۳۱}\,kg}$$
$$\times\frac{x^{۲}}{(۶٫۰۰\times۱۰^{۶}\,m/s)^{۲}\cos^{۲}۴۵٫۰^{\circ}}+x\tan۴۵٫۰^{\circ}$$

و یا

$$۹٫۷۶x^{۲}-x+۰٫۰۲۰۰=۰$$

که جواب قابل قبول آن $۲٫۷۲\,cm$ است که چون کمتر از L است، پس حتماً برخورد در این مختصه با صفحه‌ی بالایی رخ می‌دهد

۸۵ برای داده‌های مسئله ۷۰ فرض کنید که بار qی روی قطره با $q=ne$ داده می‌شود، که n یک عدد درست و e بار بنیادی است. (الف) n را برای هر مقدار معین q به‌دست آورید. (ب) یک برازش رگرسیون خطی[۱] از مقادیر q برحسب مقادیر n انجام دهید و سپس با استفاده از آن برازش، e را تعیین کنید.

حل (الف) اگر هر مقدار را از مقدار بزرگ‌تر بعدی در جدول کم کنیم به مجموعه‌ی اعداد زیر می‌رسیم:

$$۳٫۳۵\times۱۰^{-۱۹}\ ,\ ۱٫۶۳\times۱۰^{-۱۹}\ ,\ ۳٫۳\times۱۰^{-۱۹}\ ,\ ۱٫۶۴\times۱۰^{-۱۹}$$

$$۳٫۲۴\times۱۰^{-۱۹}\ ,\ ۳٫۱۸\times۱۰^{-۱۹}\ ,\ ۱٫۶۳\times۱۰^{-۱۹}\ ,\ ۱٫۶۰\times۱۰^{-۱۹}$$

که یکای آنها کولن است. این مقادیر یا نزدیک به مقدار معمول بار الکترون $e=۱٫۶۰\times۱۰^{-۱۹}\,C$ و یا دو برابر آن‌اند. مقادیر آزمایشگاهی را بر اعداد بالا تقسیم می‌کنیم و بسته به اینکه این اعداد نزدیک به مقدار e یا دو برابر آن هستند، حاصل تقسیم را در ۱ یا ۲ ضرب می‌کنیم و پس از گرد کردن به $n=۴,۵,۷,۸,۱۰,۱۱,۱۲,۱۴,۱۶$ می‌رسیم.

(ب) یک مرجع بسیار خوب برای روش‌های عددی و نیز برازش‌های خم کتاب «آنالیز عددی و روش‌های کامپیوتری، تألیف ر.ح پنینگتون، ترجمه‌ی پرویز جبه‌دار مارالانی و منصوره نیکخواه بهرامی، انتشارات دانشگاه تهران» است. یکی از روش‌های برازش، "روش کمترین توان‌های دوم" است که البته اکنون با نرم‌افزارهای ریاضی صورت می‌گیرد. اگر آن را برای مجموعه‌ی مقادیر اولیه برحسب این مقادیر n به کار گیریم به معادله‌ی خطی زیر خواهیم رسید

[۱] linear regression fit

Scanned by CamScanner

$$q=۷٫۱۸\times۱۰^{-۲۱}+۱٫۶۳\times۱۰^{-۱۹}n$$

اگر جمله‌ی ثابت را کنار بگذاریم و بر فرض آن را ناشی از خطاهای سیستماتیک در اندازه‌گیری‌ها بپنداریم به‌ازای $n=۱$ به $e=۱٫۶۳\times۱۰^{-۱۹}$ خواهیم رسید.

۸۶ در شکل ۲۲-۶۶، ذره‌ی ۱ (با بار $+۲٫۰۰\,\mathrm{pC}$)، ذره‌ی ۲ (با بار $-۲٫۰۰\,\mathrm{pC}$)، و ذره‌ی ۳ (با بار $+۵٫۰۰\,\mathrm{pC}$) تشکیل مثلث متساوی‌الاضلاعی را به‌طول ضلع $a=۹٫۵۰\,\mathrm{cm}$ داده‌اند. (الف) نسبت به سوی مثبت محور x، جهت نیروی $\vec{F}_۳$ی وارد بر ذره‌ی ۳ از سوی دو ذره‌ی دیگر را با رسم خطوط میدان الکتریکی آن دو ذره، تعیین کنید. (ب) بزرگی نیروی $\vec{E}_۳$ را محاسبه کنید.

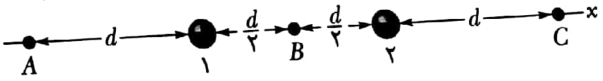
حل از روی تقارن شکل درمی‌یابیم که مؤلفه‌ی نیروی خالص در امتداد محور y برابر با صفر است و مؤلفه‌ی نیروی خالص در امتداد محور x رو به سمت راست می‌شود (شکل حل مسئله ۶۶ را ببینید). به روش مشابه حل مسئله ۶۶ داریم:

$$F_۳=۲\frac{q_۳q_۱\cos\theta}{۴\pi\varepsilon_۰a^۲}$$

که $\theta=۶۰^\circ$ است. چون $\cos۶۰^\circ=\frac{۱}{۲}$ است، $F_۳$ چنین می‌شود

$$F_۳=\frac{kq_۳q_۱}{a^۲}=\frac{(۸٫۹۹\times۱۰^۹)(۵٫۰۰\times۱۰^{-۱۲})(۲٫۰۰\times۱۰^{-۱۲})}{(۰٫۰۹۵۰)^۲}$$
$$=۹٫۹۶\times۱۰^{-۱۲}\,\mathrm{N}$$

۸۷ در شکل ۲۲-۶۹، ذره‌ی ۱ با بار $q_۱=۱٫۰۰\,\mathrm{pC}$ و ذره‌ی ۲ با بار $q_۲=-۲٫۰۰\,\mathrm{pC}$ در فاصله‌ی $d=۵٫۰۰\,\mathrm{cm}$ از یکدیگر ثابت شده‌اند. برحسب نمادگذاری بردارهای یکه، میدان الکتریکی خالص در نقطه‌های (الف) A، (ب) B، و (پ) C چگونه است؟ (ت) خطوط میدان الکتریکی را رسم کنید.



شکل ۲۲-۶۹ مسئله‌ی ۸۷

حل (الف) برای نقطه‌ی A (در یکاهای SI) داریم

$$\vec{E}_A=\left[\frac{q_۱}{۴\pi\varepsilon_۰r_۱^۲}+\frac{|q_۲|}{۴\pi\varepsilon_۰r_۲^۲}\right](-\hat{\mathbf{i}})$$
$$=\frac{(۸٫۹۹\times۱۰^۹)(۱٫۰۰\times۱۰^{-۱۲}\,\mathrm{C})}{(۵٫۰۰\times۱۰^{-۲})^۲}(-\hat{\mathbf{i}})+\frac{(۸٫۹۹\times۱۰^۹)\left|-۲٫۰۰\times۱۰^{-۱۲}\,\mathrm{C}\right|}{(۲\times۵٫۰۰\times۱۰^{-۲})^۲}(\hat{\mathbf{i}})$$
$$=(-۱٫۸۰\,\mathrm{N/C})\hat{\mathbf{i}}$$

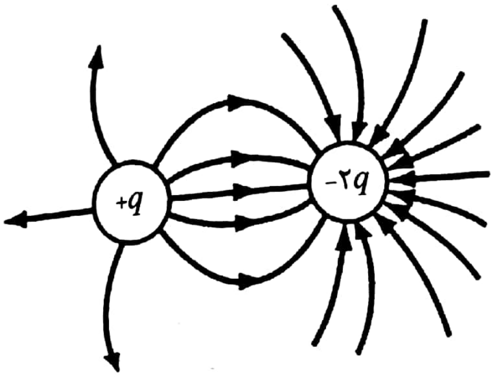
(ب) به همین ترتیب برای نقطه‌ی B داریم

$$\vec{E}_B=\left[\frac{q_۱}{۴\pi\varepsilon_۰r_۱^۲}+\frac{|q_۲|}{۴\pi\varepsilon_۰r_۲^۲}\right]\hat{\mathbf{i}}$$
$$=\frac{(۸٫۹۹\times۱۰^۹)(۱٫۰۰\times۱۰^{-۱۲}\,\mathrm{C})}{(۲٫۰۰\times۵٫۰۰\times۱۰^{-۲})^۲}\hat{\mathbf{i}}+\frac{(۸٫۹۹\times۱۰^۹)\left|-۲٫۰۰\times۱۰^{-۱۲}\,\mathrm{C}\right|}{(۰٫۵۰۰\times۵٫۰۰\times۱۰^{-۲})^۲}\hat{\mathbf{i}}$$
$$=(۴۳٫۲\,\mathrm{N/C})\hat{\mathbf{i}}$$

(پ) و برای نقطه‌ی C داریم

$$\vec{E}_C=\left[\frac{q_۱}{۴\pi\varepsilon_۰r_۱^۲}-\frac{|q_۲|}{۴\pi\varepsilon_۰r_۲^۲}\right]\hat{\mathbf{i}}$$
$$=\frac{(۸٫۹۹\times۱۰^۹)(۱٫۰۰\times۱۰^{-۱۲}\,\mathrm{C})}{(۲٫۰۰\times۵٫۰۰\times۱۰^{-۲})^۲}\hat{\mathbf{i}}-\frac{(۸٫۹۹\times۱۰^۹)\left|-۲٫۰۰\times۱۰^{-۱۲}\,\mathrm{C}\right|}{(۵٫۰۰\times۱۰^{-۲})^۲}\hat{\mathbf{i}}$$
$$=-(۶٫۲۹\,\mathrm{N/C})\hat{\mathbf{i}}$$

(ت) شکل قدری شبیه به شکل ۲۲-۵ کتاب می‌شود، با این تفاوت که تعداد خطوط میدان وارد به بار منفی دو برابر می‌شود که این، تقارن تعداد خطوط بالا و پایین آن شکل را بر هم می‌زند.



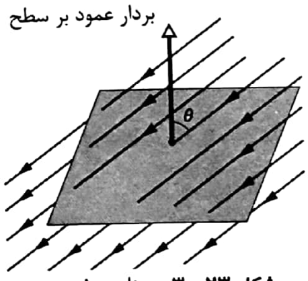
Scanned by CamScanner

فصل بیست و سوم

قانون گاؤس

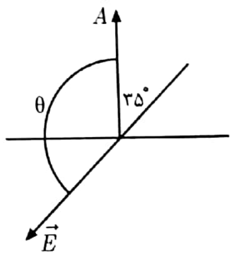
بخش ۲۳-۱ شار الکتریکی

۱۰ طول هر ضلع سطح مربعی نشان داده شده است در شکل ۲۳-۳۰ برابر با $۳/۲\,\mathrm{mm}$ است. این سطح در میدان الکتریکی یکنواختی به بزرگی $E=۱۸۰۰\,\mathrm{N/C}$ قرار گرفته است و همان‌طور که شکل نشان می‌دهد خطوط میدان، با بردار عمود بر این سطح زاویه‌ی $\theta=۳۵°$ می‌سازند. بردار عمود بر سطح "برون‌سو" است، گویی که این سطح روی وجه جعبه‌ای قرار دارد. شار الکتریکی عبوری از این سطح را محاسبه کنید.



شکل ۲۳-۳۰ مسئله‌ی ۱

حل بردار سطح $\vec{A}$ و میدان الکتریکی $\vec{E}$ در شکل پایین نشان داده شده است. زاویه‌ی θی میان آنها $۱۴۵°=۳۵°-۱۸۰°$ است.



بنابراین شار الکتریکی عبوری از این سطح چنین می‌شود:

$$\Phi=\int \vec{E}\cdot d\vec{A}=\vec{E}\cdot\vec{A}=EA\cos\theta$$
$$=(۱۸۰۰\,\mathrm{N/C})(۳/۲\times ۱۰^{-۳}\,\mathrm{m})^{۲}\cos ۱۴۵°$$
$$=-۱/۵\times ۱۰^{-۲}\,\mathrm{N\cdot m^{۲}/C}$$

۲۰۰ یک میدان الکتریکی که با $\vec{E}=۴/۰\hat{\mathbf{i}}-۳/۰(y^{۲}+۲/۰)\hat{\mathbf{j}}$ داده شده است از مکعب گاؤسی شکل ۲۳-۷ به ضلع $۲/۰\,\mathrm{m}$ می‌گذرد. (بزرگی E برحسب نیوتون بر کولن و مکان x بر حسب متر است.) شار الکتریکی عبوری از (الف) وجه بالایی، (ب) وجه پایینی، (پ) وجه سمت چپ، و (ت) وجه عقبی چقدر است؟ (ث) شار الکتریکی خالص عبوری از مکعب چقدر است؟

حل از $\Phi=\int \vec{E}\cdot d\vec{A}$ استفاده می‌کنیم و توجه می‌کنیم طول هر ضلع مکعب برابر با $۲/۰\,\mathrm{m}=(۳/۰\,\mathrm{m}-۱/۰\,\mathrm{m})$ است.

(الف) روی وجه بالایی $y=۲/۰\,\mathrm{m}$ است و بنابراین $\vec{E}$ چنین می‌شود:

$$\vec{E}=۴/۰\hat{\mathbf{i}}-۳/۰\left((۲/۰)^{۲}+۲/۰\right)\hat{\mathbf{j}}=۴/۰\hat{\mathbf{i}}-۱۸\hat{\mathbf{j}}$$

و چون روی وجه بالایی $d\vec{A}=(dA)\hat{\mathbf{j}}$ است، شار عبوری از این وجه برابر می‌شود با

$$\Phi=\int_{\text{بالا}}\vec{E}\cdot d\vec{A}=\int_{\text{بالا}}(۴/۰\hat{\mathbf{i}}-۱۸\hat{\mathbf{j}})\cdot(dA)\hat{\mathbf{j}}=-۱۸\int_{\text{بالا}}dA$$
$$=(-۱۸)(۲/۰)^{۲}\,\mathrm{N\cdot m^{۲}/C}=-۷۲\,\mathrm{N\cdot m^{۲}/C}$$

(ب) روی وجه پایینی $y=۰$ است و بنابراین $\vec{E}$ چنین می‌شود:

$$\vec{E}=۴/۰\hat{\mathbf{i}}-۳/۰(۰^{۲}+۲/۰)\hat{\mathbf{j}}=۴/۰\hat{\mathbf{i}}-۶/۰\hat{\mathbf{j}}$$

و چون روی وجه پایینی $d\vec{A}=(dA)(-\hat{\mathbf{j}})$ است، شار عبوری از این وجه برابر می‌شود با

$$\Phi=\int_{\text{پایین}}\vec{E}\cdot d\vec{A}=\int_{\text{پایین}}(۴/۰\hat{\mathbf{i}}-۶/۰\hat{\mathbf{j}})\cdot(dA)(-\hat{\mathbf{j}})=۶/۰\int_{\text{پایین}}dA$$
$$=۶/۰(۲/۰)^{۲}\,\mathrm{N\cdot m^{۲}/C^{۲}}=+۲۴\,\mathrm{N\cdot m^{۲}/C}$$

(پ) روی وجه سمت چپ $d\vec{A}=(dA)(-\hat{\mathbf{i}})$ و شار عبوری از این وجه چنین می‌شود

$$\Phi=\int_{\text{چپ}}\vec{E}\cdot d\vec{A}=\int_{\text{چپ}}(۴/۰\hat{\mathbf{i}}+E_y\hat{\mathbf{j}})\cdot(dA)(-\hat{\mathbf{i}})=-۴/۰\int_{\text{چپ}}dA$$
$$=-۴/۰(۲/۰)^{۲}\,\mathrm{N\cdot m^{۲}/C}=-۱۶\,\mathrm{N\cdot m^{۲}/C}$$

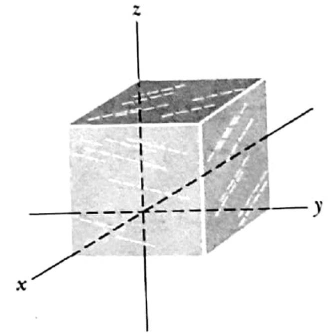
(ت) روی وجه پشتی $d\vec{A}=(dA)(-\hat{\mathbf{k}})$ است. ولی چون $\vec{E}$ هیچ مؤلفه‌ای در راستای z ندارد، ضریب داخلی آنها $\vec{E}\cdot d\vec{A}=۰$ است و در نتیجه $\Phi=۰$ می‌شود.

(ث) برای محاسبه‌ی شار خالص عبوری کافی است که شار عبوری از دو وجه دیگر را نیز محاسبه کنیم. بدیهی است شار عبوری از وجه جلویی به مانند شار عبوری از وجه پشتی برابر صفر می‌شود؛ زیرا برای این وجه

$d\vec{A}=(dA)\hat{k}$ است و $\vec{E}\cdot d\vec{A}=0$ می‌شود. شار عبوری از وجه سمت راست نیز یقیناً منفی شار عبوری از وجه سمت چپ می‌شود. زیرا در آنجا $d\vec{A}=(dA)(\hat{i})$ است و E_y نقش بازی نمی‌کند. پس، شار عبوری از وجه سمت چپ برابر با $+16 N\cdot m^2/C$ می‌شود. در نتیجه، شار کل عبوری از مکعب چنین می‌شود:

$$\Phi=(-72+24-16+0+0+16)N\cdot m^2/C=-48 N\cdot m^2/C$$

۳●● مکعب نشان داده شده در شکل ۲۳-۳۱ دارای ضلعی به طول $1.40 m$ است و مطابق شکل در فضای یک میدان الکتریکی یکنواخت قرار گرفته است. شار الکتریکی عبوری از وجه سمت راست را در صورتی بیابید که میدان الکتریکی، برحسب نیوتون بر کولن، با (الف) $6.00\hat{i}$، (ب) $-2.00\hat{j}$ و (پ) $-3.00\hat{i}+4.00\hat{k}$ داده شده باشد. (ت) شار کلّ عبوری از این مکعب به‌ازای هر یک از این میدان‌ها چقدر است؟



شکل ۲۳-۳۱ مسئله‌های ۳، ۶ و ۹

حل از $\Phi=\int\vec{E}\cdot d\vec{A}=\vec{E}\cdot\vec{A}$ استفاده می‌کنیم که در آن $\vec{A}=A\hat{j}=(1.40m)^2\hat{j}$ است.

(الف) $\Phi=(6.00N/C)\hat{i}\cdot(1.40m)^2\hat{j}=0$

(ب) $\Phi=(-2.00N/C)\hat{j}\cdot(1.40m)^2=-3.92N\cdot m^2/C$

(پ) $\Phi=\left[(-3.00N/C)\hat{i}+(400N/C)\hat{k}\right]\cdot(1.40m)^2\hat{j}=0$

(ت) کلاً در غیاب یک چشمه‌ی بار، شار خالص عبوری یک میدان "یکنواخت" از یک سطح "بسته" همواره برابر صفر است. با این حال خوب است در این مثال نوعی، این نتیجه را تحقیق کنیم. $\vec{E}_1$ بر وجوه عمود بر محورهای y و z عمود است و بنابراین شار عبوری از این چهار وجه برابر صفر است. به‌علاوه شار عبوری از وجوه عمود بر محور x نیز صفر است. چرا که شار میدان وارد شده برابر شار میدان خارج شده است. به همین ترتیب $\vec{E}_2$ بر وجوه عمود بر محورهای x و z عمود است و بنابراین شار عبوری از این چهار وجه صفر است. به‌علاوه شار عبوری از وجود عمود بر محور y نیز صفر است. چرا که شار میدان وارد شده برابر با شار میدان خارج شده است. میدان $\vec{E}_3$ بر وجوه عمود بر محور y عمود است و بنابراین شار عبوری از این دو وجه صفر است و می‌ماند چهار وجه دیگر. مثلاً برای وجوه عمود بر محور x داریم:

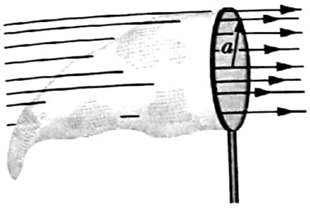
$$\Phi_1=(-3\hat{i}+4\hat{k})\cdot A(\hat{i})=-3A$$

$$\Phi_{11}=(-3\hat{i}+4\hat{k})\cdot A(-\hat{i})=+3A$$

که مجموع‌شان برابر صفر می‌شود. به همین ترتیب برای وجود عمود بر محور z نیز شار عبوری صفر است و بنابراین شار کلّ عبوری برابر صفر می‌شود.

بخش ۲۳-۲ قانون گاؤس

۴● در شکل ۲۳-۳۲، یک تور پروانه‌گیری در میدان الکتریکی یکنواخت به بزرگی $E=3.0 mN/C$ قرار گرفته است. قاب تور، دایره‌ای است به شعاع $a=11cm$ که عمود بر میدان الکتریکی قرار دارد. تور حاوی هیچ بار خالصی نیست. شار الکتریکی عبوری از تور را پیدا کنید.



شکل ۲۳-۳۲ مسئله‌ی ۴

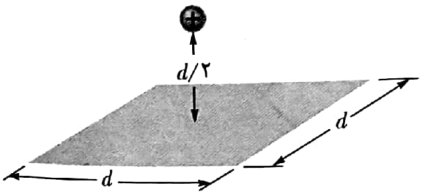
حل چون هیچ چشمه‌ی باری داخل تور محصور نشده و میدان الکتریکی عبوری از آن یکنواخت است، بنابراین شار عبوری از سطح بسته‌ی تور برابر صفر است. این سطح بسته را می‌توانیم مشتمل بر دو سطح بگیریم: یکی سطح دایره‌ای به شعاع a (سطح I) و دیگری سطح پشتی آن (سطح II). در نتیجه داریم

$$\Phi=\int\vec{E}\cdot d\vec{A}=\int_{I}\vec{E}\cdot d\vec{A}=\int_{II}\vec{E}\cdot d\vec{A}=0$$

و از آنجا

$$\int_{II}\vec{E}\cdot d\vec{A}=-\int_{I}\vec{E}\cdot d\vec{A}=-EA_I=-E\pi a^2$$
$$=-(3.0\times10^{-3} N/C)\pi(0.11m)^2=-1.1\times10^{-4} N\cdot m^2/C$$

۵● در شکل ۲۳-۳۳، پروتونی مستقیماً به فاصله‌ی $d/2$ بالای مرکز مربعی به ضلع d قرار دارد. بزرگی شار الکتریکی عبوری از این مربع چقدر است؟ (*راهنمایی:* این مربع را به‌صورت یک وجه مکعبی به ضلع d تصور کنید.)



شکل ۲۳-۳۳ مسئله‌ی ۵

حل برای آنکه از تقارن استفاده کنیم یک سطح گاؤسی بسته به شکل مکعبی به ضلع d را تصور می‌کنیم که پروتون با بار $q=+1.6\times10^{-19}$ دقیقاً در مرکز آن قرار گرفته باشد. این مکعب شش وجه دارد و انتظار داریم شاری یکسان ازهر وجه آن بگذرد. طبق قانون گاؤس، شار خالص کلّ عبوری از این سطح بسته‌ی فرضی برابر با $\Phi_{net}=q/\varepsilon_0$ است و در نتیجه شار عبوری از هر یک از شش وجه این مربع برابر با $\Phi=\Phi_{net}/6=q/6\varepsilon_0=3.01\times10^{-9} N\cdot m^2/C$ می‌شود.

Scanned by CamScanner

۶۰ در هر نقطه روی سطح مکعب نشان داده شده در شکل ۲۳-۳۱، میدان الکتریکی موازی با محور z است. طول هر ضلع این مکعب $3.0\,m$ است. در وجه بالایی مکعب $\vec{E}=-34\hat{k}\,N/C$، و در وجه پایینی $\vec{E}=+20\hat{k}\,N/C$ است. بار خالص محصور شده در داخل این مکعب را تعیین کنید.

حل چون سوی میدان در راستای محور z است، شار عبوری از چهار وجه دیگر برابر با صفر است و از قانون گاؤس داریم:

$$\Phi=\oint \vec{E}\cdot d\vec{A}=\int_{+z}\vec{E}\cdot d\vec{A}+\int_{-z}\vec{E}\cdot d\vec{A}=q_{enc}/\varepsilon_0$$
$$=(-34\,N/C)(\hat{k})\cdot(3.0\,m\times 3.0\,m)\hat{k}+(20\,N/C)(\hat{k})\cdot(3.0\,m\times 3.0\,m)(-\hat{k})$$
$$=-486\,N.m^2/C$$

در نتیجه بار محصور q_{enc} چنین می‌شود

$$q_{enc}=\Phi\varepsilon_0=(-486\,N\cdot m^2/C)(8.85\times10^{-12}\,C^2/N\cdot m^2)$$
$$=-4.30\times10^{-9}\,C=-4.30\,nC$$

۷۰ بار نقطه‌ای $1.8\,\mu C$ در مرکز یک سطح گاؤسی مکعبی به ضلع $55\,cm$ قرار دارد. شار الکتریکی خالص عبوری از این سطح چقدر است؟

حل از قانون گاؤس $\varepsilon_0\Phi=q_{enc}$ استفاده می‌کنیم که در اینجا Φ شار کلِ عبوری از سطح مکعب و q_{enc} بار خالص محصور شده در آن است. بنابراین داریم

$$\Phi=\frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}=\frac{1.8\times10^{-6}\,C}{8.85\times10^{-12}\,C^2/N\cdot m^2}=2.0\times10^{5}\,N\cdot m^2/C$$

۸۰۰ وقتی شیرِ دوش را در حمام دربسته‌ای باز می‌کنیم، ترشح آب از وان خالی می‌تواند هوای داخل حمام را پر از یون‌های باردار منفی کند و موجب ایجاد میدان الکتریکی‌ای به بزرگی $1000\,N/C$ در هوا شود. حمامی به ابعاد $2.5\,m\times3.0\,m\times2.0\,m$ را در نظر بگیرید. میدان الکتریکی را در امتداد سقف، کف و چهار دیواره‌ی حمام، تقریباً عمود بر این سطوح و دارای بزرگی یکنواخت $600\,N/C$ فرض کنید. همچنین فرض کنید این سطوح یک سطح گاؤسی بسته را به دور هوای حمام تشکیل می‌دهند. (الف) چگالی حجمی بار ρ و (ب) تعداد بارهای بنیادیِ اضافیِ e بر مترمکعب هوای حمام چقدر است؟

حل (الف) مساحت کلی که توسط حمام محصور شده برابر است با

$$A=2(2.5\times3.0)+2(3.0\times2.0)+2(2.0\times2.5)=37\,m^2$$

آنگاه قدرمطلق شار الکتریکی کل چنین می‌شود:

$$|\Phi|=\sum\vec{E}\cdot\vec{A}=|\vec{E}|A=(600\,N/C)(37\,m^2)=22.2\times10^{3}\,N\cdot m^2/C$$

از قانون گاؤس نتیجه می‌گیریم که قدرمطلق بار محصور شده برابر می‌شود با:

$$|q_{enc}|=\varepsilon_0|\Phi|=(8.85\times10^{-12}\,C^2/N\cdot m^2)(22.2\times10^{3}\,N\cdot m^2/C)=1.96\times10^{-7}\,C$$

چون حجم حمام برابر با $V=(2.0\,m)(2.5\,m)(3.0\,m)=15.0\,m^3$ است، چگالی بار حجمی چنین می‌شود:

$$\rho=\frac{q_{enc}}{V}=\frac{-1.96\times10^{-7}\,C}{15.0\,m^3}=-1.31\times10^{-8}\,C/m^3$$

علامت منفی را از آن‌رو برگزیدیم که در صورت مسئله، بارهای محصور شده یون‌های منفی در نظر گرفته شده‌اند.

(ب) $q=ne$ است و چون در اینجا تعداد بار بنیادی اضافی بر مترمکعب مورد نظر است، خواهیم داشت:

$$n_V=\frac{|q_{enc}/e|}{V}=\frac{1.96\times10^{-7}\,C/1.60\times10^{-19}\,C}{15.0\,m^3}=8.18\times10^{10}$$

۹۰۰ ILW شکل ۲۳-۳۱ یک سطح گاؤسی به شکل مکعبی به ضلع $1.40\,m$ را نشان می‌دهد. (الف) شار خالص Φی عبوری از این سطح و (ب) بار خالص q_{enc} محصور شده توسط این سطح چقدر است، در صورتی که $\vec{E}=[-4.00\hat{i}+(6.00+3.00y)\hat{j}]\,N/C$ باشد؟

حل (الف) باید شار عبوری از وجوه مختلف را محاسبه کنیم. میدان الکتریکی در جهت $\hat{j}$ است و بنابراین شار تنها از وجوهی که در راستای محور y هستند می‌گذرد. زیرا ضرب داخلی بردار عمود بر سطح وجوه دیگر در میدان الکتریکی برابر صفر می‌شوند. این وجوه عبارتند از وجه بالایی و وجه پایینی. شار عبوری از وجه بالایی عبارت است از

$$\Phi_u=\int\vec{E}_u\cdot d\vec{A}=\int(3.00y\hat{j})\cdot(dA\hat{j})$$
$$=(3.00y\hat{j})\cdot(A\hat{j})\Big|_{y=1.40}=(3.00)(1.40)(1.40)^2$$
$$=8.23\,N\cdot m^2/C$$

که در آن از $A=(1.40\,m)^2$ استفاده کردیم و شار عبوری از وجه پایینی چنین می‌شود:

$$\phi_l=\int\vec{E}_l\cdot d\vec{A}=\int(3.00y\hat{j})\cdot(dA)(-\hat{j})$$
$$=(3.00y\hat{j})\cdot(-A\hat{j})\Big|_{y=0}=0$$

پس، شار عبوری از وجه پایینی نیز برابر با صفر می‌شود و بنابراین شار خالص عبوری از مکعب همان $8.23\,N\cdot m^2/C$ است.

(ب) بار محصور در مکعب از قانون گاؤس به‌دست می‌آید:

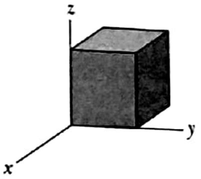
$$q_{enc}=\varepsilon_0\Phi=(8.85\times10^{-12}\,C^2/N\cdot m^2)(8.23\,N\cdot m^2/C)$$
$$=7.29\times10^{-11}\,C=72.9\,pC$$

(پ) این میدان الکتریکی را می‌توانیم به‌صورت $\vec{E}=3.00y\hat{i}+\vec{E}_0$ دوباره‌نویسی کنیم که در آن $\vec{E}_0=-4.00\hat{i}+6.00\hat{j}$ میدان یکنواختی است که سهمی در شار خالص عبوری از مکعب ندارد. بنابراین بی‌آنکه

محاسبه‌ای انجام دهیم نتیجه می‌گیریم که Φ همان $۸٫۲۳\,\mathrm{N\cdot m^2/C}$ می‌شود.

(ت) به همین ترتیب، بار محصور شده نیز تغییر نمی‌کند و همان $۷٫۲۹\times۱۰^{-۱۱}\,\mathrm{C}$ می‌شود.

••۱۰ شکل ۲۳-۳۴ سطح گاوسی بسته‌ای به شکل مکعب را نشان می‌دهد که طول هر ضلع آن $۲٫۰۰\,\mathrm{m}$ است. این مکعب در ناحیه‌ای با میدان الکتریکی $\vec{E}=\left[(۳٫۰۰x+۴٫۰۰)\hat{i}+۶٫۰۰\hat{j}+۷٫۰۰\hat{k}\right]\mathrm{N/C}$ قرار گرفته است، که در آن x برحسب متر است. بار خالص محصور شده در این مکعب چقدر است؟



شکل ۲۳-۳۴ مسئله‌ی ۱۰

حل هیچ‌کدام از جمله‌های ثابت، سهمی در شار میدان الکتریکی ندارند (معادله‌های ۲۳-۴ و ۲۳-۷ را ببینید). پس خود را فقط روی جمله‌های وابسته به x متمرکز می‌کنیم. در یکاهای SI داریم:

$$\vec{E}_{\text{متغیر}}=۳x\hat{i}$$

چون هر ضلع مکعب $۲٫۰۰\,\mathrm{m}$ است، آن وجه مکعب که در $x=۰$ (در صفحه‌ی yz) قرار دارد دارای مساحت $A=۴٫۰۰\,\mathrm{m^2}$ است، ولی بردار عمود بر سطح آن در جهت $+\hat{i}$ است. سهم این وجه در شار عبوری برابر است با

$$(E_{\text{متغیر}})(A)=(۳٫۰۰)(۰)(۴٫۰۰)=۰$$

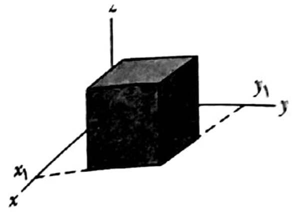
آن وجه مکعب که در $x=-۲٫۰۰\,\mathrm{m}$ قرار دارد دارای مساحت $A=۴٫۰۰\,\mathrm{m^2}$ است، ولی بردار عمود بر سطح آن در جهت $-\hat{i}$ است. سهم این وجه در شار عبوری برابر است با

$$-(E_{\text{متغیر}})(A)=-(۳٫۰۰)(-۲٫۰۰)(۴٫۰۰)=۲۴٫۰ \quad \text{(در یکاهای SI)}$$

چون متغیر $\vec{E}$ بر چهار وجه دیگر عمود است، بنابراین شار خالص کل $\Phi=۰+۲۴٫۰=۲۴٫۰\,\mathrm{N\cdot m^2/C}$ می‌شود. آنگاه از قانون گاوس نتیجه می‌گیریم:

$$q_{enc}=\varepsilon_0\Phi=(۸٫۸۵\times۱۰^{-۱۲}\,\mathrm{C^2/N\cdot m^2})(۲۴٫۰\,\mathrm{N\cdot m^2/C})$$
$$=۲٫۱۳\times۱۰^{-۱۰}\,\mathrm{C}$$

••۱۱ GO شکل ۲۳-۳۵ سطح گاوسی بسته‌ای به شکل مکعب را نشان می‌دهد که طول هر ضلع آن $۲٫۰۰\,\mathrm{m}$ است و یکی از گوشه‌های آن در $x_1=۵٫۰۰\,\mathrm{m}$ و $y_1=۴٫۰۰\,\mathrm{m}$ قرار دارد. این مکعب در ناحیه‌ای با میدان الکتریکی $\vec{E}=[-۳٫۰۰\hat{i}-۴٫۰۰y^2\hat{j}+۳٫۰۰\hat{k}]\,\mathrm{N/C}$ قرار گرفته است، که در آن y بر حسب متر است. بار خالص محصور شده در این مکعب چقدر است؟



شکل ۲۳-۳۵ مسئله‌ی ۱۱

حل هیچ‌کدام از جمله‌های ثابت سهمی در شار میدان الکتریکی ندارند (معادله‌های ۲۳-۴ و ۲۳-۷ را ببینید). پس خود را فقط روی جمله‌ی وابسته به y متمرکز می‌کنیم. در یکاهای SI داریم:

$$\vec{E}_{\text{متغیر}}=(-۴٫۰۰y^2)\hat{j}$$

آن وجه مکعب که در $y=۴٫۰۰\,\mathrm{m}$ قرار دارد دارای مساحت $A=۴٫۰۰\,\mathrm{m^2}$ است و بردار عمود بر سطح آن در جهت $+\hat{j}$ است. سهم این وجه در شار عبوری برابر است با

$$(E_{\text{متغیر}})(A)=(-۴٫۰۰)(۴٫۰۰^2)(۴٫۰۰)=-۲۵۶ \quad \text{(در یکاهای SI)}$$

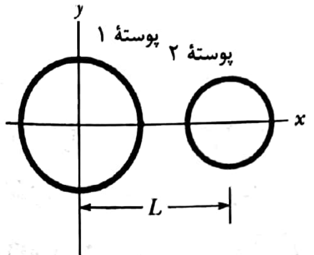
آن وجه مکعب که در $y=۲٫۰۰\,\mathrm{m}$ قرار دارد دارای همان مساحت $A=۴٫۰۰\,\mathrm{m^2}$ است، ولی بردار عمود بر سطح آن در جهت $-\hat{j}$ است. سهم این وجه در شار عبوری برابر است با:

$$-(E_{\text{متغیر}})(A)=-(-۴٫۰۰)(۲٫۰۰^2)(۴٫۰۰)=۶۴٫۰ \quad \text{(در یکاهای SI)}$$

چون متغیر E عمود بر چهار وجه دیگر است، بنابراین شار خالص کل $\Phi=-۲۵۶+۶۴٫۰=-۱۹۲\,\mathrm{N\cdot m^2/C}$ می‌شود. آنگاه از قانون گاوس نتیجه می‌گیریم:

$$q_{enc}=\varepsilon_0\Phi=(۸٫۸۵\times۱۰^{-۱۲}\,\mathrm{C^2/N\cdot m^2})(-۱۹۲\,\mathrm{N\cdot m^2/C})$$
$$=-۱٫۷۰\times۱۰^{-۹}\,\mathrm{C}$$

••۱۲ شکل ۲۳-۳۶ دو پوسته‌ی کروی نارسانا را نشان می‌دهد که در جای خود ثابت شده‌اند. پوسته‌ی ۱ دارای چگالی سطحی بار یکنواخت $+۶٫۰\,\mu\mathrm{C/m^2}$ روی سطح خارجی خود و شعاع $۳٫۰\,\mathrm{cm}$ است؛ پوسته‌ی ۲ دارای چگالی سطحی بار یکنواخت $+۴٫۰\,\mu\mathrm{C/m^2}$ روی سطح خارجی خود و شعاع $۲٫۰\,\mathrm{cm}$ است؛ مرکز پوسته‌ها به فاصله‌ی $L=۱۰\,\mathrm{cm}$ از هم قرار گرفته‌اند. برحسب نمادگذاری بردارهای یکه، میدان الکتریکی خالص در $x=۲٫۰\,\mathrm{cm}$ چگونه است؟

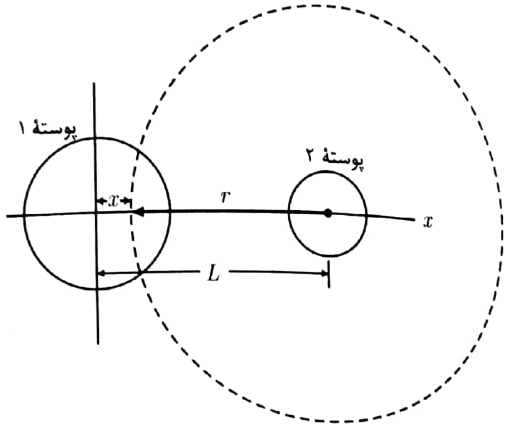


شکل ۲۳-۳۶ مسئله‌ی ۱۲

حل سطح گاوسی کروی، هم‌مرکز با پوسته‌ی ۲ و به شعاع نقطه‌ی مورد نظر، اختیار می‌کنیم. توجه کنید که فقط پوسته‌ی کوچک‌تر (پوسته‌ی

Scanned by CamScanner

۲) در میدان (غیرصفر) نقطه‌ی مورد نظر سهم دارد؛ زیرا این نقطه در داخل شعاع کره‌ی بزرگ‌تر قرار دارد (و میدان داخل یک پوسته‌ی کروی صفر است).
سوی خطوط میدان در جهت $-x$ است و در نتیجه داریم:



$$\vec{E} = E(-\hat{i}) = -\frac{q_۲}{۴\pi\varepsilon_۰ r^۲}\hat{i} = -\frac{\sigma_۲ ۴\pi R^۲}{۴\pi\varepsilon_۰ r(L-x)^۲}\hat{i}$$

$$= -(۲٫۸\times ۱۰^۲\ N/C)\hat{i}$$

که در آن از $R = ۰٫۰۲۰m$ (شعاع پوسته‌ی ۲)، $L = ۰٫۱۰m$ و $x = ۰٫۰۲۰m$ استفاده کرده‌ایم.

۱۳۰۰ به‌طور تجربی مشخص شده است که میدان الکتریکی در ناحیه‌ی معینی از جوّ زمین، به‌طور عمودی رو به پایین است. در ارتفاع ۳۰۰ متری، بزرگی میدان الکتریکی برابر با $۶۰٫۰N/C$ و در ارتفاع ۲۰۰ متری بزرگی این میدان برابر با $۱۰۰N/C$ است. مقدار بار خالص محصور شده در مکعبی به ضلع $۱۰۰m$ که وجه‌های افقی آن در ارتفاع‌های $۲۰۰m$ و $۳۰۰m$ قرار دارند، چقدر است؟

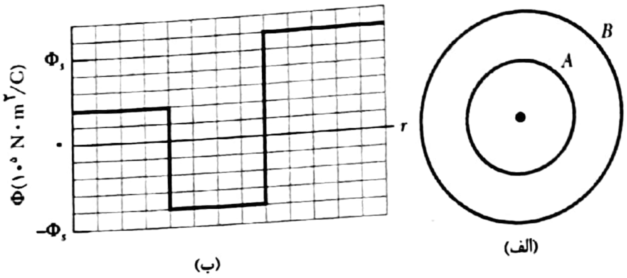
حل شار عبوری از وجوه چپ و راست و وجوه جلویی و عقبی برابر صفر است و می‌ماند شار عبوری از وجوه بالایی و پایینی. E_u را بزرگی میدان الکتریکی در وجه بالایی و E_l را بزرگی میدان الکتریکی در وجه پایینی بگیرید. بردار عمود بر سطح در روی وجه بالایی، رو به بالا (در خلاف جهت میدان) و در روی وجه پایینی، رو به پایین (در جهت میدان) است و بنابراین شار عبوری از وجوه بالایی به‌ترتیب چنین می‌شوند:

$$\Phi_u = \int \vec{E}_u \cdot d\vec{A} = \int E_u(-\hat{j})\cdot dA(\hat{j}) = -E_u A$$
$$\Phi_l = \int \vec{E}_l \cdot d\vec{A} = \int E_l(-\hat{j})\cdot dA(\hat{j}) = +E_l A$$

آنگاه $\Phi = \Phi_u + \Phi_l = (E_l - E_u)A$ و از قانون گاؤس، بار خالص محصور در مکعب چنین می‌شود:

$$q_{enc} = \varepsilon_۰\Phi = \varepsilon_۰(E_l - E_u)A$$
$$= (۸٫۸۵\times۱۰^{-۱۲} C^۲/N\cdot m^۲)$$
$$\times(۱۰۰N/C - ۶۰٫۰N/C)(۱۰۰m)^۲ = ۳٫۵۴\times۱۰^{-۶}C$$
$$= ۳٫۵۴\mu C$$

۱۴۰۰ GO *شار و پوسته‌های نارسانا* یک ذره‌ی باردار در مرکز دو پوسته‌ی کروی هم‌مرکز که بسیار نازک‌اند و از ماده‌ای نارسانا ساخته شده‌اند، معلق شده است. شکل ۲۳-۳۷ الف مقطعی از آنها را نشان می‌دهد. شکل ۲۳-۳۷ ب شار خالص Φی عبوری از یک کره گاؤسی به مرکز ذره‌ی باردار را بر حسب تابعی از شعاع r کره نشان می‌دهد. محور قائم با $\Phi_s = ۵٫۰\times۱۰^۵ N\cdot m^۲/C$ مقیاس‌بندی شده است. (الف) بار ذره‌ی مرکزی چقدر است؟ بار خالص (ب) پوسته‌ی A و (پ) پوسته‌ی B چقدر است؟



شکل ۲۳-۳۷ مسئله‌ی ۱۴

حل از قانون گاؤس $\varepsilon_۰\Phi = q_{enc}$ استفاده می‌کنیم، که در آن $\varepsilon_۰ = ۸٫۸۵\times۱۰^{-۱۲}C^۲/N\cdot m^۲$ است. توجه کنید که در منحنی شار الکتریکی، سه ناحیه‌ی یکنواخت داریم که به‌ترتیب مربوط به فضای داخل پوسته‌ی A، فضای میان پوسته‌های A و B، و فضای خارج از پوسته‌ها می‌شود. برای سادگی کار، بار ذره‌ی مرکزی را با q_c نشان می‌دهیم.

(الف) یک سطح گاؤسی کروی به مرکز بار q_c و به شعاع $r < r_A$ می‌زنیم و قانون گاؤس را به‌کار می‌بندیم. از روی منحنی درمی‌یابیم که برای r کوچک، $\Phi = ۲٫۰\times۱۰^۵$ (در یکاهای SI) است و از آنجا $q_c = +۱٫۸\times۱۰^{-۶}C$ می‌شود.

(ب) این‌بار سطح گاؤس کروی را برای $r_A < r < r_B$ اختیار می‌کنیم. در این ناحیه $\Phi = -۴٫۰\times۱۰^۵$ (در یکاهای SI است) که به $q_{enc} = -۳٫۵\times۱۰^{-۶}C$ می‌انجامد. بنابراین بار q_A با استفاده از نتیجه‌ی قسمت (الف) چنین می‌شود:

$$q_A = q_{enc} - q_c = -۵٫۳\times۱۰^{-۶}C$$

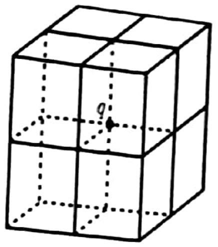
(پ) سطح گاؤسی کروی به شعاع $r > r_B$ اختیار می‌کنیم. برای این ناحیه $\Phi = ۶٫۰\times۱۰^۵$ (در یکاهای SI) است که به $Q_{enc} = ۵٫۳\times۱۰^{-۶}C$ می‌انجامد. (از Q_{enc} برای تمایز با q_{enc} استفاده کردیم و در واقع بار کلّ محصور شده در شعاع $r > r_B$ است). با توجه به نتایج بالا نتیجه می‌گیریم:

$$q_B = Q_{enc} - q_c - q_A$$
$$= (۵٫۳ - ۱٫۸ + ۵٫۳)\times۱۰^{-۶}C = +۸٫۸\times۱۰^{-۶}C$$

۱۵۰۰ ذره‌ای به بار $+q$ در یکی از گوشه‌های مکعبی گاؤسی قرار گرفته است. برحسب مضربی از $q/\varepsilon_۰$ شار عبوری از (الف) هر وجه مکعب که آن گوشه را می‌سازد و (ب) هر یک از وجه‌های دیگر مکعب چقدر است؟

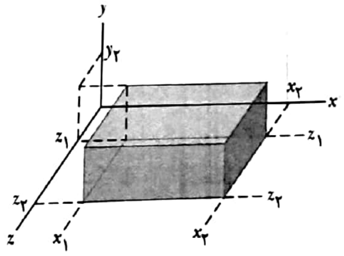
Scanned by CamScanner

حل (الف) و (ب) برای آنکه بتوانیم از قانون گاؤس استفاده کنیم باید q را در مرکز یک مکعب گاؤسی قرار دهیم. بدین منظور ۸ مکعب به طریق زیر می‌سازیم:



شار خالص کلّ عبوری از این مکعب گاؤسی برابر $\Phi_{net}=q/\varepsilon_0$ است. و هر وجه این مکعب گاؤسی از چهار سطح مربعی تشکیل شده است و بنابراین شار عبوری از هر سطح مربعی برابر با $\Phi=\frac{\Phi_{net}}{6\times4}=\frac{q}{24\varepsilon_0}$ می‌شود. از روی شکل مشخص است که این همان شار عبوری از سه وجه‌ای از مکعب است که با q تلاقی ندارد. بنابراین شار عبوری از آن سه وجه‌ای که با q تلاقی دارند برابر صفر می‌شود.

۱۶●●● GO سطح گاؤسیِ جعبه- مانندِ شکل ۲۳-۳۸ بار خالص $+24.0\varepsilon_0\,C$ را محصور کرده است و در میدانی الکتریکی با $\vec{E}=[(10.0+2.00x)\hat{i}-3.00\hat{j}+bz\hat{k}]\,N/C$ قرار گرفته است، که در آن x و z بر حسب متر و b یک ثابت است. وجه پایینی در صفحه‌ی xz واقع است. وجه بالایی در صفحه‌ی افقیِ عبوری از $y_2=1.00\,m$ قرار دارد. به‌ازای $x_1=1.00\,m$، $x_2=4.00\,m$، $z_1=1.00\,m$، و $z_2=3.00\,m$، b چقدر است؟



شکل ۲۳-۳۸ مسئله‌ی ۱۶

حل شار الکتریکی خالص عبوری از مکعب $\Phi=\oint\vec{E}\cdot d\vec{A}$ است. شار خالص عبوری از دو وجه موازی با صفحه‌ی yz برابر است با

$$\Phi_{yz}=\int\int[E_x(x=x_2)-E_x(x=x_1)]dydz$$
$$=\int_{y_1=0}^{y_2=1.00}dy\int_{z_1=1.00}^{z_2=3.00}dz[10.0+2.00(4.00)-10.0-2.00(1.00)]$$
$$=6.00\int_{y_1=0}^{y_2=1.00}dy\int_{z_1=1.00}^{z_2=3.00}dz=(6.00)(1.00)(2.00)=12.00$$

به همین ترتیب، شار خالص عبوری از دو وجه موازی با صفحه‌ی xz برابر است با

$$\Phi_{xz}=\int\int[E_y(y=y_2)-E_y(y=y_1)]dxdz$$
$$=\int_{x_1=1.00}^{x_2=4.00}dy\int_{z_1=1.00}^{z_2=3.00}dz[-3.00-(-3.00)]=0$$

و سرانجام شار خالص عبوری از دو وجه موازی با صفحه xy چنین می‌شود

$$\Phi_{xy}=\int\int[E_z(z=z_2)-E_z(z=z_1)]dxdy$$
$$=\int_{x_1=1.00}^{x_2=4.00}dx\int_{y_1=0}^{y_2=1.00}dy(3.00b-1.00b)=2.00b(3.00)(1.00)$$
$$=6.00b$$

آنگاه با به کار بردن قانون گاؤس خواهیم داشت:

$$q_{enc}=\varepsilon_0\Phi_{net}=\varepsilon_0(\Phi_{xy}+\Phi_{xz}+\Phi_{yz})$$
$$=\varepsilon_0(6.00b+0+12.0)=24.0\varepsilon_0$$

و از آنجا به $b=2.00\,N/C\cdot m$ می‌رسیم.

بخش ۲۳-۳ رسانای باردار منزوی

۱۷● کره رسانایی با بار یکنواخت و قطر $1.2m$ دارای چگالی سطحی بار $8.1\mu C/m^2$ است. (الف) بار خالص روی این کره را به‌دست آورید. (ب) شار الکتریکی کلّی که از سطح این کره خارج می‌شود، چقدر است؟

حل (الف) بار روی سطح کره، حاصل‌ضرب چگالی سطحی بار σ در مساحت سطح کره ($4\pi r^2$ که r شعاع است) می‌شود. بنابراین داریم:

$$q=4\pi r^2\sigma=4\pi\left(\frac{1.2m}{2}\right)^2(8.1\times10^{-6}C/m^2)$$
$$=3.67\times10^{-5}C\approx3.7\mu C$$

(ب) از یک سطح گاؤس کروی هم‌مرکز با کره‌ی رسانا استفاده می‌کنیم و از آنجا Φ را محاسبه می‌کنیم:

$$\Phi=\frac{q}{\varepsilon_0}=\frac{3.67\times10^{-5}C}{8.85\times10^{-12}C^2/N\cdot m^2}=4.14\times10^{6}N\cdot m^2/C$$

۱۸● میدان الکتریکی درست بالای سطح غلتک باردار یک دستگاه فتوکپی دارای بزرگی $E=2.3\times10^5\,N/C$ است. چگالی سطحی بار روی غلتک، با فرض آنکه غلتک رسانا باشد، چقدر است؟

حل میدان الکتریکی در نزدیکی سطح یک رسانای باردار از معادله‌ی ۲۳-۱۱ ($E=\sigma/\varepsilon_0$) به‌دست می‌آید و از آنجا برای چگالی سطحی بار خواهیم داشت:

$$\sigma=E\varepsilon_0=(2.3\times10^5N/C)(8.85\times10^{-12}C^2/N\cdot m^2)$$
$$=2.0\times10^{-6}C/m^2$$

۱۹● فضاپیماهای عبوری از کمربندهای تابشی کره زمین ممکن است با تعداد قابل توجه‌ای الکترون برخورد کنند. بارهای حاصل از این برخوردها می‌توانند به اجزای الکترونیکی فضاپیما آسیب برسانند و موجب اختلال در عملکردهای آن شوند. فرض کنید یک ماهواره‌ی فلزی کروی به قطر $1.3m$ در یک چرخش مداری، باری به اندازه‌ی $2.4\mu C$ را جمع کند. (الف) چگالی سطحی بار حاصل را به‌دست آورید. (ب) بزرگی میدان الکتریکی ناشی از این بار سطحی را درست در بیرون سطح ماهواره محاسبه کنید.

Scanned by CamScanner

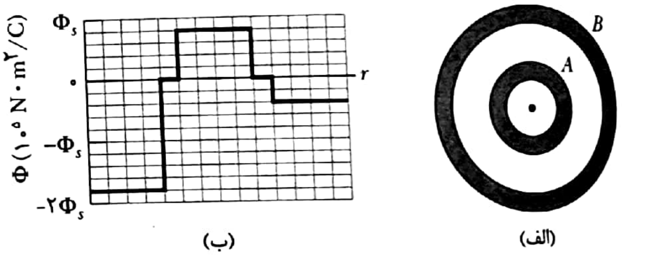
حل (الف) مساحت سطح یک کره با $4\pi R^2 = \pi D^2$ داده می‌شود که در آن D قطر کره است. بنابراین σ چنین می‌شود:

$$\sigma = \frac{q}{\pi D^2} = \frac{2.4\times10^{-6}\,C}{\pi(1.3\,m)^2} = 4.5\times10^{-7}\,C/m^2$$

(ب) میدان الکتریکی در نزدیکی سطح یک رسانای باردار از معادله‌ی ۲۳-۱۱ به‌دست می‌آید:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{4.5\times10^{-7}\,C/m^2}{8.85\times10^{-12}\,C^2/N\cdot m^2} = 5.1\times10^4\,N/C$$

۲۰۰ GO *شار و پوسته‌ی رسانا.* ذره‌ی بارداری در مرکز دو پوسته‌ی کروی هم‌مرکز قرار داده شده است. شکل ۲۳-۳۹ الف مقطعی از آنها را نشان می‌دهد. شکل ۲۳-۳۹ ب شار خالص Φی عبوری از یک کره گاؤسی به مرکز آن ذره را برحسب تابعی از شعاع r کره نشان می‌دهد. محور قائم با $\Phi_s = 5.0\times10^5\,N\cdot m^2/C$ مقیاس‌بندی شده است. (الف) بار ذره‌ی مرکزی و بار خالص (ب) پوسته‌ی A و (پ) پوسته‌ی B چقدر است؟



شکل ۲۳-۳۹ مسئله‌ی ۲۰

حل از قانون گاؤس $\varepsilon_0\Phi = q_{enc}$ استفاده می‌کنیم که در آن $\varepsilon_0 = 8.85\times10^{-12}\,C^2/N\cdot m^2$ است.

(الف) $\Phi = -9.0\times10^5$ (در یکاهای SI) برای r کوچک به $q_0 = -8.0\times10^{-6}\,C$ می‌انجامد.

(ب) مقدار (غیرصفر) بعدی که Φ می‌گیرد برابر با $+4.0\times10^5$ (در یکاهای SI) است که به $q_1 = 3.5\times10^{-6}\,C$ می‌انجامد. بنابراین بار q_A با استفاده از نتیجه‌ی قسمت (الف) چنین می‌شود:

$$q_A = q_1 - q_0 = 11.5\times10^{-6}\,C$$

(پ) سرانجام برای r بزرگ $\Phi = -2.0\times10^5$ (در یکاهای SI) است که به $q_2 = -1.8\times10^{-6}\,C$ می‌انجامد. با توجه به نتایج بالا، پاسخ چنین می‌شود

$$q_2 - q_A - q_0 = -5.3\times10^{-6}\,C$$

۲۱۰۰ یک رسانای منزوی به شکل دلخواه دارای بار خالص $+10\times10^{-6}\,C$ است. در داخل این رسانا، کاواکی وجود دارد که در آن بار نقطه‌ای $q = +3.0\times10^{-6}\,C$ قرار گرفته است. بار (الف) روی دیواره‌ی کاواک و (ب) روی سطح خارجی رسانا چقدر است؟

حل (الف) به این منظور سطح گاؤسی را در نظر می‌گیریم که به‌طور کامل داخل رسانا باشد و حفره را در برگیرد. همچنین توجه کنید که بار $Q = +10\times10^{-6}\,C$ روی سطح بیرونی رسانا قرار دارد. میدان داخل رسانا باید صفر باشد. چون بار محصور شده در سطح گاؤس $q = +3.0\times10^{-6}\,C$ است، بنابراین باید باری معادل با $q_w = -q$ در دیواره‌ی حفره توزیع شود تا بار خالص داخل سطح گاؤس صفر و در نتیجه میدان الکتریکی داخل دیواره نیز صفر شود. پس بار داخل دیواره برابر با $q_w = -3.0\times10^{-6}\,C$ است.

(ب) توجه کنید که باید پایستگی بار برقرار بماند. یعنی نمی‌شود که بار q_w بی‌آنکه با باری معادل خود خنثی شود، ظاهر شود. برای آنکه پایستگی بار برقرار بماند باید بار $-q_w$ روی دیواره‌ی رسانا توزیع شود و چون قبلاً روی دیواره‌ی رسانا بار Q قرار داشته است، بار خالص روی دیواره‌ی رسانا چنین می‌شود:

$$q_s = Q - q_w = (10\times10^{-6}\,C) - (-3.0\times10^{-6}\,C) = +1.3\times10^{-5}\,C$$

بخش ۲۳-۴ به‌کارگیری قانون گاؤس: تقارن استوانه‌ای

۲۲۰ الکترونی از حالت سکون، از فاصله‌ی قائم ۹٫۰cm از خطّ بار روی یک میله‌ی نارسانای بسیار بلند، رها می‌شود. این بار، به‌طور یکنواخت و با چگالی ۶٫۰μC بر متر توزیع شده است. بزرگی شتاب اولیه‌ی الکترون چقدر است؟

حل قانون دوم نیوتون $(F = ma)$ را با تعریف میدان الکتریکی $(F = qE)$ و میدان الکتریکی حاصل از یک خط بار $(E = \lambda/2\pi\varepsilon_0 r)$ ترکیب می‌کنیم و به رابطه‌ی زیر می‌رسیم

$$m_e a = eE = \frac{e\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

و از آنجا

$$a = \frac{e\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r m_e} = \frac{(1.60\times10^{-19}\,C)(6.0\times10^{-6}\,C/m)}{2\pi(8.85\times10^{-12}\,C^2/N\cdot m^2)(0.090\,m)(9.11\times10^{-31}\,kg)} = 2.1\times10^{17}\,m/s^2$$

۲۳۰ (الف) غلتک یک دستگاه فتوکپی دارای طول ۴۲cm و قطر ۱۲cm است. میدان الکتریکی درست بالای سطح این غلتک برابر با $2.3\times10^5\,N/C$ است. بار کلّ روی غلتک چقدر است؟ (ب) تولیدکننده‌ای می‌خواهد نوع رومیزی‌ای از این دستگاه تولید کند. لازمه‌ی این کار، آن است که طول غلتک را به ۲۸cm و قطر آن را به ۸٫۰cm کاهش دهد. میدان الکتریکی روی سطح غلتک نباید تغییر کند. بار روی این غلتک جدید باید چقدر باشد؟

حل (الف) همان‌طور که در حلّ مسئله ۲۴ خواهیم دید با تصور یک سطح گاؤسی استوانه‌ای به دور غلتک استوانه‌ای می‌توانیم میدان

Scanned by CamScanner

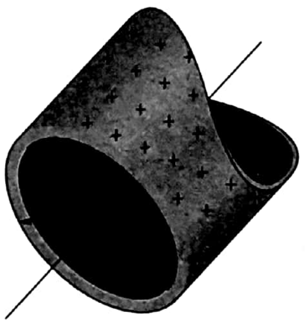
الکتریکی را در اطراف غلتک به‌دست آوریم که برابر با $E=\lambda/۲\pi\varepsilon_۰ r$ می‌شود و از آنجا می‌توانیم λ را برحسب E بنویسیم. از طرفی $q=\lambda h$ است و بنابراین q چنین می‌شود:

$$q=(۲\pi\varepsilon_۰ rE)h=\pi\varepsilon_۰ EDh$$
$$=\pi(۸٫۸۵\times۱۰^{-۱۲}\,\mathrm{C^۲/N\cdot m^۲})(۲٫۳\times۱۰^{۵}\,\mathrm{N/C})(۰٫۱۲\mathrm{m})(۰٫۴۲\mathrm{m})$$
$$=۳٫۲\times۱۰^{-۷}\,\mathrm{C}=۰٫۳۲\mu\mathrm{C}$$

(ب) بار جدید برابر است با

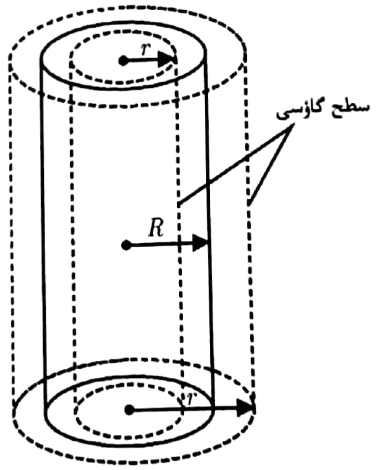
$$q'=q\left(\frac{A'}{A}\right)=q\left(\frac{\pi D'h'}{\pi Dh}\right)$$
$$=(۳٫۲\times۱۰^{-۷}\,\mathrm{C})\left[\frac{(۸٫۰\mathrm{cm})(۲۸\mathrm{cm})}{(۱۲\mathrm{cm})(۴۲\mathrm{cm})}\right]=۱٫۴\times۱۰^{-۷}\,\mathrm{C}=۰٫۱۴\mu\mathrm{C}$$

۲۴● شکل ۲۳-۴۰ مقطع یک لوله‌ی فلزی نازک و بلند به شعاع $R=۳٫۰۰\mathrm{cm}$ را نشان می‌دهد که دارای بار بر واحد طول $\lambda=۲٫۰۰\times۱۰^{-۸}\,\mathrm{C/m}$ است. بزرگی E ی میدان الکتریکی در فاصله‌ی شعاعی (الف) $r=R/۲٫۰۰$ و (ب) $r=۲٫۰۰R$ چقدر است؟ (پ) E را برحسب r در گستره‌ی $r=۰$ تا $r=۲٫۰۰R$ رسم کنید.



شکل ۲۳-۴۰ مسئله‌ی ۲۴

حل برای دو قسمت مسئله باید سطوح گاؤسی استوانه‌ای هم‌مرکز با لوله‌ی فلزی، به‌ترتیب با شعاع‌های $r<R$ و $r>R$ در نظر بگیریم و آنگاه با استفاده از قانون گاؤس، میدان الکتریکی را به‌دست آوریم.



(الف) به‌ازای $r<R$، بار محصور $q_{\text{enc}}=۰$ است و در نتیجه $E_{\text{داخل}}=۰$ می‌شود.

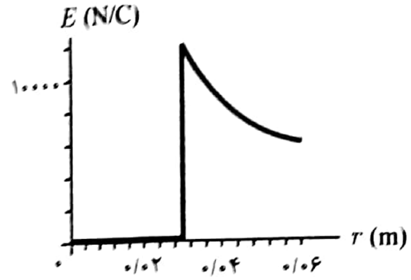
(ب) به‌ازای $r>R$، بار محصور $q_{\text{enc}}=\lambda L$ می‌شود و آنگاه قانون گاؤس چنین به‌دست می‌دهد:

$$\oint\vec{E}\cdot d\vec{A}=E_{\text{خارج}}(۲\pi rL)=(\lambda L)/\varepsilon_۰$$

و در نتیجه

$$E_{\text{خارج}}=\frac{\lambda}{۲\pi\varepsilon_۰ r}=\frac{(۲٫۰\times۱۰^{-۸}\,\mathrm{C/m})}{۲\pi(۸٫۸۵\times۱۰^{-۱۲}\,\mathrm{C^۲/N\cdot m^۲})(۰٫۰۶۰۰\mathrm{m})}$$
$$=۶٫۰\times۱۰^{۳}\,\mathrm{N/C}$$

(پ) نمودار E برحسب r در پایین نشان داده شده است.



در اینجا مقدار بیشینه برابر است با

$$E_{\max}=\frac{\lambda}{۲\pi\varepsilon_۰ r}=\frac{(۲٫۰\times۱۰^{-۸}\,\mathrm{C/m})}{۲\pi(۸٫۸۵\times۱۰^{-۱۲}\,\mathrm{C^۲/N\cdot m^۲})(۰٫۰۳۰\mathrm{m})}$$
$$=۱٫۲\times۱۰^{۴}\,\mathrm{N/C}$$

۲۵● یک خطِ بار نامتناهی، میدانی به بزرگی $۴٫۵\times۱۰^{۴}\,\mathrm{N/C}$ را در فاصله‌ی $۲٫۰\mathrm{m}$ از آن ایجاد می‌کند. چگالی خطی بار را محاسبه کنید.

حل بزرگی میدان الکتریکی ایجاد توسط یک خط بار نامتناهی - استفاده از قانون گاؤس به‌دست می‌آید. به این منظور یک سطح گاؤسی استوانه‌ای به شعاع r دور خطِ بار در نظر می‌گیریم. در نتیجه از قانون گاؤس خواهیم داشت:

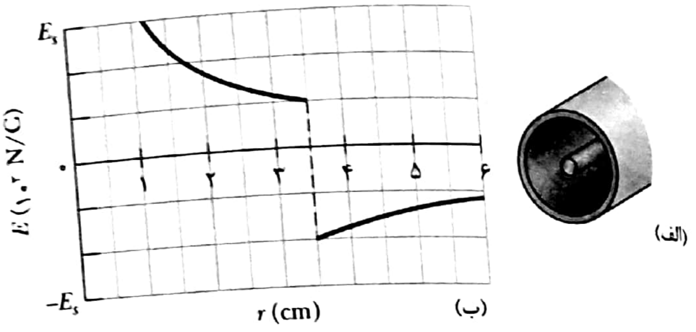
$$\oint\vec{E}\cdot d\vec{A}=q_{\text{enc}}/\varepsilon_۰=h\lambda/\varepsilon_۰$$
$$(E)(۲\pi rh)=\lambda h/\varepsilon_۰\ \Rightarrow\ E=\frac{\lambda}{۲\pi\varepsilon_۰ r}$$

که در واقع همان معادله‌ی ۲۳-۱۲ کتاب است. از آنجا λ را محاسبه می‌کنیم

$$\lambda=۲\pi\varepsilon_۰ Er$$
$$=۲\pi(۸٫۸۵\times۱۰^{-۱۲}\,\mathrm{C^۲/N\cdot m^۲})(۴٫۵\times۱۰^{۴}\,\mathrm{N/C})(۲٫۰\mathrm{m})$$
$$=۵٫۰\times۱۰^{-۶}\,\mathrm{C/m}$$

۲۶●● شکل ۲۳-۴۱ الف استوانه‌ای توپُر باردارِ باریکی را نشان می‌دهد که با یک پوسته‌ی استوانه‌ای باردار بزرگتر هم‌محور است. هر دو نازک‌اند و روی سطح‌های خارجی خود دارای چگالی سطحی بار یکنواختی هستند. شکل ۲۳-۴۱ ب مؤلفه‌ی شعاعی E ی میدان الکتریکی را برحسب فاصله‌ی شعاعی r از محور مشترک آنها نشان می‌دهد. محور قائم با $E_s=۳٫۰\times۱۰^{۳}\,\mathrm{N/C}$ مقیاس‌بندی شده است. چگالی خطی بار پوسته چقدر است؟

Scanned by CamScanner



شکل ۲۳-۴۱ مسئله‌ی ۲۶

حل از شکل درمی‌یابیم وقتی به فاصله‌ی $r=3{,}5cm$ از داخل می‌رسیم، داریم

$$E_{داخل}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}=1000N/C$$

و وقتی به فاصله‌ی $r=3{,}5cm$ از بیرون می‌رسیم، داریم

$$E_{خارج}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}+\frac{\lambda'}{2\pi\varepsilon_0 r}=-3000N/C$$

با محاسبه‌ی اختلاف این دو میدان و با قرار دادن $r=0{,}035m$، بار در واحد طول پوسته (استوانه‌ی بزرگ‌تر) را برابر با $\lambda'=-5{,}8\times10^{-9}C/m$ به‌دست می‌آوریم.

۲۷۰۰ GO سیم مستقیم و بلندی دارای باری منفی ثابت شده‌ای با چگالی خطی بار $3{,}6nC/m$ است. این سیم توسط یک پوسته‌ی استوانه‌ای نارسانای نازک و هم‌محور به شعاع $1{,}5cm$ محصور شده است. پوسته دارای بار مثبت با چگالی سطحی بار σ روی سطح خارجی خود است که موجب می‌شود میدان الکتریکی خالص خارجی برابر با صفر شود. σ را محاسبه کنید.

حل سطح گاؤسی استوانه‌ای به شعاع $r>R$ به دور استوانه در نظر می‌گیریم. بار محصورشده q_{enc} در این سطح گاؤسی حاصل از بار سیم مرکزی و بار استوانه‌ی نازک است. بنابراین از قانون گاؤس داریم:

$$\oint\vec{E}\cdot d\vec{A}=q_{enc}/\varepsilon_0=(q_{سیم}+q_{استوانه})/\varepsilon_0$$

اگر λ و λ' را به‌ترتیب قدرمطلق چگالی‌های بار خطی سیم و استوانه بنامیم، از قانون گاؤس خواهیم داشت:

$$E_0 2\pi rL=(-\lambda+\lambda')L/\varepsilon_0$$

و از آنجا

$$E=-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}+\frac{\lambda'}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

که جمله‌ی اول و دوم را می‌توانیم به‌ترتیب میدان الکتریکی حاصل از سیم و میدان الکتریکی حاصل از استوانه بنامیم. از طرفی می‌توانیم چگالی خطی بار استوانه را به چگالی سطحی بار آن به‌ترتیب زیر مربوط کنیم:

$$q_{استوانه}=\lambda'L=\sigma(2\pi RL)\quad\Rightarrow\quad\lambda'=\sigma(2\pi R)$$

برای آنکه میدان در خارج استوانه صفر باشد باید $E=0$ و از آنجا $\lambda'=\lambda$ باشد بنابراین نتیجه‌ی بالا چنین به دست می‌دهد:

$$\lambda=\lambda'=\sigma(2\pi R)$$

$$\Rightarrow\quad\sigma=\frac{\lambda}{2\pi R}=\frac{3{,}6\times10^{-6}C/m}{(2\pi)(0{,}015m)}=3{,}8\times10^{-8}C/m^2$$

۲۸۰۰ GO باری با چگالی خطی یکنواخت $2{,}0nC/m$ روی میله‌ی نارسانا، نازک و بلندی توزیع شده است. این میله با پوسته‌ی استوانه‌ای رسانای بلندی (با شعاع داخلی $5{,}0cm$ و شعاع خارجی $10cm$) هم‌محور است. بار خالص روی پوسته برابر صفر است. (الف) بزرگی میدان الکتریکی در فاصله‌ی $15cm$ از محور پوسته چقدر است؟ چگالی سطحی بار روی (ب) سطح داخلی و (پ) سطح خارجی پوسته چقدر است؟

حل (الف) یک سطح گاؤسی استوانه‌ای هم‌مرکز با میله‌ی رسانا به دور استوانه در نظر می‌گیریم. با توجه به اینکه استوانه بدون بار است، بار محصور در این سطح گاؤسی برابر با بار روی میله یعنی $q=\lambda L$ می‌شود، و آنگاه از قانون گاؤس خواهیم داشت:

$$\oint\vec{E}\cdot d\vec{A}=q/\varepsilon_0=\lambda L/\varepsilon_0$$

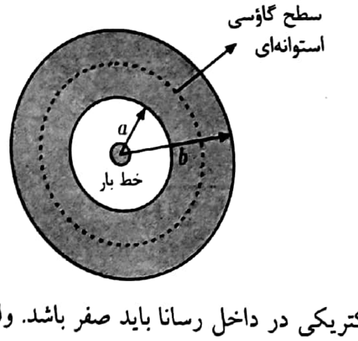
با توجه به اینکه شار فقط از سطح جانبی می‌گذرد، داریم:

$$(E)(2\pi rL)=\lambda L/\varepsilon_0$$

و از آنجا

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}=\frac{2{,}0\times10^{-9}C/m}{2\pi(8{,}85\times10^{-12}C^2/N\cdot m^2)(15\times10^{-2}m)}$$
$$=2{,}4\times10^2N/C$$

(ب) و (پ) به این منظور یک سطح گاؤسی استوانه‌ای را در دل پوسته‌ی رسانای استوانه‌ای و هم‌مرکز با آن در نظر می‌گیریم. در شکل زیر مقطع آن رسم شده است که در آن a و b شعاع‌های داخلی و خارجی پوسته هستند.



می‌دانیم میدان الکتریکی در داخل رسانا باید صفر باشد. ولی حضور خط بار، صفر شدن میدان در داخل رسانا را بر هم می‌زند. پس، برای آنکه میدان در داخل رسانا صفر بماند، باید باری به بزرگی بار خطّ بار، ولی با علامت مخالف روی سطح داخلی آن توزیع شود. بنابراین بر روی سطح داخلی رسانا، باری با چگالی سطحی زیر توزیع می‌شود:

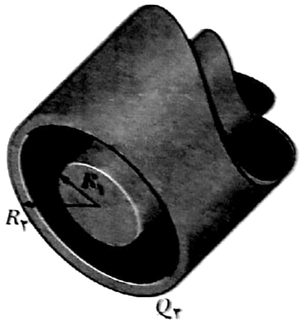
$$\sigma_1=\frac{q}{2\pi aL}=-\frac{q/L}{2\pi a}=-\frac{\lambda}{2\pi a}=-\frac{2{,}0\times10^{-9}C/m}{(2\pi)(5{,}0\times10^{-2}m)}$$
$$=-6{,}4\times10^{-9}C/m^2$$

ولی چون طبق قانون پایستگی بار، بار جدیدی نمی‌تواند ایجاد شود، پس باید باری هم‌اندازه با بار خطّ بار و هم‌علامت با آن بر روی پوسته‌ی خارجی استوانه توزیع شود. بنابراین چگالی بار بر روی پوسته خارجی استوانه چنین می‌شود

Scanned by CamScanner

$$\sigma_2 = +\frac{q}{۲\pi bL} = \frac{q/L}{۲\pi b} = \frac{\lambda}{۲\pi b} = \frac{۲٫۰\times ۱۰^{-۹}\,C/m}{(۲\pi)(۱۰\times ۱۰^{-۲}\,m)}$$
$$= +۳٫۲\times ۱۰^{-۹}\,C/m^2$$

۲۹●●● www شکل ۲۳-۴۲ مقطعی از یک میله‌ی رسانا به شعاع $R_1 = ۱٫۳۰\,mm$ و طول $L = ۱۱٫۰\,m$ را در داخل یک پوسته‌ی هم‌محور استوانه‌ای نازک رسانا به شعاع $R_2 = ۱۰٫۰R_1$ و (همان) طول L نشان می‌دهد. بار خالص روی میله $Q_1 = +۳٫۴۰\times ۱۰^{-۱۲}\,C$ و بار خالص روی پوسته $Q_2 = -۲٫۰۰Q_1$ است. (الف) بزرگی E و (ب) جهت (به‌طور شعاعی رو به داخل یا رو به خارج) میدان الکتریکی در فاصله‌ی شعاعی $r = ۲٫۰۰R_2$ چیست؟ (پ) E و (ت) جهت در فاصله‌ی شعاعی $r = ۵٫۰۰R_1$ چیست؟ بار روی (ث) سطح داخلی و (ج) سطح خارجی پوسته چقدر است؟



شکل ۲۳-۴۲ مسئله‌ی ۲۹

حل (الف) به این منظور یک سطح گاوسی استوانه‌ای هم‌مرکز با استوانه‌ها و به طول L را خارج پوسته‌ی رسانا در نظر می‌گیریم. در این صورت بار خالص محصورشده در داخل این سطح گاوس برابر با $q_{enc} = Q_1 + Q_2 = -Q_1$ می‌شود. در نتیجه از قانون گاوس خواهیم داشت

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = q_{enc}/\varepsilon_0 = -Q_1/\varepsilon_0$$

و در نتیجه

$$E = \frac{-Q_1}{۲\pi\varepsilon_0 Lr} = \frac{-Q_1}{۲\pi\varepsilon_0 L(۲٫۰۰R_2)}$$
$$= \frac{-۳٫۴۰\times ۱۰^{-۱۲}\,C}{۲\pi(۸٫۸۵\times ۱۰^{-۱۲}\,C^2/N\cdot m^2)(۱۱٫۰\,m)(۲۰٫۰\times ۱٫۳۰\times ۱۰^{-۳}\,m)}$$
$$= -۰٫۲۱۴\,N$$

یا $|E| = ۰٫۲۱۴\,N/C$.

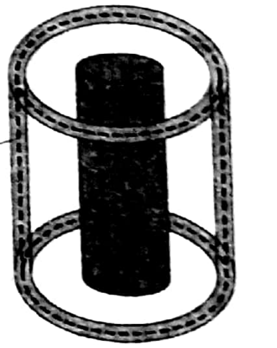
(ب) علامت منفی نشان می‌دهد که جهت میدان رو به داخل است.

(پ) حالا به‌ازای $r = ۵٫۰۰R_1$ بار محصورشده توسط سطح گاوسی $q_{enc} = Q_1$ می‌شود و در نتیجه با استفاده از قانون گاوس که به $۲\pi r\varepsilon_0 LE = q_{enc}$ می‌انجامد، خواهیم داشت:

$$E = \frac{Q_1}{۲\pi\varepsilon_0 Lr}$$
$$= \frac{-۳٫۴۰\times ۱۰^{-۱۲}\,C}{۲\pi(۸٫۸۵\times ۱۰^{-۱۲}\,C^2/N\cdot m^2)(۱۱٫۰\,m)(۵٫۰۰\times ۱٫۳۰\times ۱۰^{-۳}\,m)}$$
$$= ۰٫۸۵۵\,N/C$$

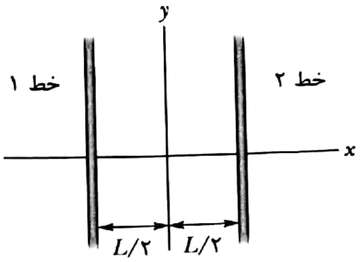
(ت) علامت مثبت نشان می‌دهد که جهت میدان رو به بیرون است.

(ث) و (ج) به این منظور سطح گاوسی استوانه‌ای را در داخل پوسته‌ی رسانا در نظر می‌گیریم



میدان داخل پوسته رسانا باید صفر باشد. ولی در داخل سطح گاوسی، بار خالص حاصل از میله‌ی استوانه‌ای با بار Q_1 محصورشده است که این صفر بودن میدان داخل رسانا را بر هم می‌زند. سپس، برای آنکه میدان داخل رسانا صفر بماند باید در سطح داخلی پوسته بار $-Q_1$ القا شود تا بار خالص محصورشده برابر صفر، و میدان الکتریکی داخل پوسته‌ی رسانا صفر شود. از طرفی برای آنکه پایستگی بار برقرار بماند باید بار $+Q_1$ در سطح بیرونی پوسته القا شود. قبلاً بار روی پوسته برابر با $-۲Q_1$ بود. بنابراین بار روی پوسته‌ی رسانا $-۲Q_1 + Q_1 = -Q_1$ می‌شود. پس بار روی پوسته‌ی داخلی $Q_{داخل} = -۳٫۴۰\times ۱۰^{-۱۲}\,C$ و بار روی پوسته‌ی خارجی برابر با $Q_{خارج} = -۳٫۴۰\times ۱۰^{-۱۲}\,C$ می‌شود.

۳۰●●● در شکل ۲۳-۴۳، مقطع کوتاهی از دو خطّ بار بسیار بلند موازی نشان داده شده است که در مکان‌های خود به فاصله‌ی $L = ۸٫۰\,cm$ از یکدیگر ثابت شده‌اند. چگالی‌های بار خطی عبارت‌اند از $+۶٫۰\,\mu C/m$ برای خط ۱ و $-۲٫۰\,\mu C/m$ برای خط ۲. در کجای محور x نشان داده شده، میدان الکتریکی خالص حاصل از این دو خطّ بار برابر با صفر است؟



شکل ۲۳-۴۳ مسئله‌ی ۳۰

حل نقطه‌ی P (نقطه‌ای روی محور x که در آنجا میدان الکتریکی برابر با صفر است) نمی‌تواند میان خطوط بار باشد؛ زیرا بار آنها مخالف هم است. همچنین نقطه‌ی P در سمت چپ خط ۱ نیست، زیرا بزرگی بار آن (بر واحد طول) بیشتر از بزرگی بار (بر واحد طول) خط ۲ است. بنابراین نقطه‌ی P در سمت راست خط ۲ واقع است. حال با استفاده از معادله‌ی ۲۳-۱۲ ($E = \lambda/۲\pi r\varepsilon_0$)، برای میدان الکتریکی خط بار، میدان الکتریکی خالص را در نقطه‌ی P محاسبه می‌کنیم.

$$E_{net} = E_1 + E_2 = \frac{\lambda_1}{۲\pi\varepsilon_0(x + L/۲)} + \frac{\lambda_2}{۲\pi\varepsilon_0(x - L/۲)}$$

Scanned by CamScanner

با برابر صفر قرار دادن این رابطه، ان را برای x حل می‌کنیم و به رابطه‌ی زیر می‌رسیم

$$x=\left(\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)\left(\frac{L}{2}\right)=\left(\frac{۶٫۰+۲٫۰}{۶٫۰-۲٫۰}\right)(۴٫۰\,\text{cm})=۸٫۰\,\text{cm}$$

۳۱۰۰ ILW دو پوسته‌ی استوانه‌ای هم‌محور، نازک، باردار و بلند دارای شعاع‌های $۳٫۰\,\text{cm}$ و $۶٫۰\,\text{cm}$ هستند. بار بر واحد طول روی پوسته‌ی داخلی برابر با $۵٫۰\times۱۰^{-۶}\,\text{C/m}$ و روی پوسته‌ی خارجی برابر $-۷٫۰\times۱۰^{-۶}\,\text{C/m}$ است. (الف) بزرگی E و (ب) جهت (به‌طور شعاعی رو به داخل یا رو به خارج) میدان الکتریکی در فاصله‌ی شعاعی $r=۴٫۰\,\text{cm}$ چیست؟ (پ) E و (ت) جهت در $r=۸٫۰\,\text{cm}$ چیست؟

حل برای محاسبه‌ی میدان‌های الکتریکی در $r=۴٫۰\,\text{cm}$ و $r=۸٫۰\,\text{cm}$ باید سطوح گاؤسی استوانه‌ای هم‌مرکز با استوانه‌ها به‌ترتیب در میان دو استوانه و بیرون دو استوانه در نظر بگیریم.

(الف) اگر سطح گاؤسی در میان دو استوانه و به شعاع $r=۴٫۰\,\text{cm}$ در نظر بگیریم، بار خالص محصور شده تنها ناشی از بار استوانه‌ی داخلی با چگالی خطی بار $\lambda_1=۵٫۰\times۱۰^{-۶}\,\text{C/m}$ است. آنگاه از قانون گاؤس خواهیم داشت:

$$\oint\vec{E}\cdot d\vec{A}=q_1/\varepsilon_0 \quad\Rightarrow\quad E(r)=\frac{q_1}{۲\pi\varepsilon_0 rh}=\frac{\lambda}{۲\pi\varepsilon_0 r}$$

و از آنجا

$$E(r)=\frac{۵٫۰\times۱۰^{-۶}\,\text{C/m}}{۲\pi(۸٫۸۵\times۱۰^{-۱۲}\,\text{C}^۲/\text{N}\cdot\text{m}^۲)(۴٫۰\times۱۰^{-۲}\,\text{m})}$$
$$=۲٫۳\times۱۰^{۶}\,\text{N}$$

(ب) میدان الکتریکی $\mathbf{E}(r)$ به‌طور شعاعی رو به بیرون است.

(پ) اگر سطح گاؤسی در خارج دو استوانه و به شعاع $r=۸٫۰\,\text{cm}$ در نظر بگیریم، بار خالص محصور شده ناشی از هم بار استوانه‌ی داخلی با چگالی خطی بار $\lambda_1=۵٫۰\times۱۰^{-۶}\,\text{C/m}$ و هم استوانه‌ی خارجی با چگالی خطی بار $\lambda_2=-۷٫۰\times۱۰^{-۶}\,\text{C/m}$ است. بنابراین قانون گاؤس میدان الکتریکی را در خارج دو استوانه چنین به‌دست می‌دهد:

$$E(r)=\frac{\lambda_1+\lambda_2}{۲\pi\varepsilon_0 r}$$
$$=\frac{۵٫۰\times۱۰^{-۶}\,\text{C/m}-۷٫۰\times۱۰^{-۶}\,\text{C/m}}{۲\pi(۸٫۸۵\times۱۰^{-۱۲}\,\text{C}^۲/\text{N}\cdot\text{m}^۲)(۸٫۰\times۱۰^{-۲}\,\text{m})}$$
$$=-۴٫۵\times۱۰^{۵}\,\text{N/C}$$

و یا $|E(r)|=۴٫۵\times۱۰^{۵}\,\text{N/C}$ می‌شود.

(ت) علامت منفی نشان‌دهنده‌ی این است که $\vec{E}(r)$ به طور شعاعی رو به داخل است.

۳۲۰۰۰ GO استوانه‌ی توپُر، نارسانا و بلندی به شعاع $۴٫۰\,\text{cm}$ دارای چگالی حجمی بار نایکنواخت ρ است که تابعی از فاصله‌ی شعاعی r از محور استوانه است: $\rho=Ar^۲$. به‌ازای $A=۲٫۵\,\mu\text{C/m}^۵$، بزرگی میدان الکتریکی در (الف) $r=۳٫۰\,\text{cm}$ و (ب) $r=۵٫۰\,\text{cm}$ چقدر است؟

حل سطح گاؤسی استوانه‌ای، هم‌محور با استوانه در دل آن در نظر می‌گیریم و قانون گاؤس را به‌کار می‌بندیم:

$$\oint\vec{E}\cdot d\vec{A}=\frac{q}{\varepsilon_0}=\frac{\int\rho dV}{\varepsilon_0}$$

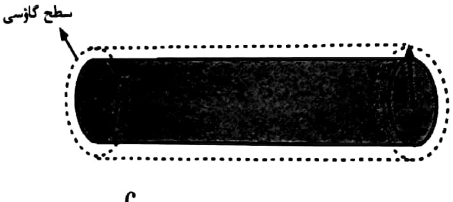
که در آن ρ، چگالی بار حجمی نایکنواخت استوانه و برابر $\rho=Ar^۲$ است که $A=۲٫۵\mu\text{C/m}^۵$ می‌باشد. همچنین چون حجم سطح گاؤسی برابر با $V=\pi r^۲L$ است، عنصر حجمی $dV=۲\pi Ldr$ می‌شود. شار فقط از سطح جانبی می‌گذرد و بنابراین قانون گاؤس چنین به‌دست می‌دهد

$$(E_{\text{داخل}})(۲\pi rL)=\frac{۱}{\varepsilon_0}\int_0^r(Ar^۲)(۲\pi rL)dr$$
$$=\frac{۲\pi LA}{\varepsilon_0}\int_0^r r^۳dr=\frac{۲\pi LA}{۴\varepsilon_0}r^۴$$

و از آنجا میدان الکتریکی در داخل استوانه چنین می‌شود:

$$E_{\text{داخل}}=\frac{A}{۴\varepsilon_0}r^۳$$
$$=\frac{۲٫۵\times۱۰^{-۶}\,\text{C/m}^۵}{۴(۸٫۸۵\times۱۰^{-۱۲}\,\text{C}^۲/\text{N}\cdot\text{m}^۲)}(۳٫۰\times۱۰^{-۲}\,\text{m})^۳$$
$$=۱٫۹\,\text{N/C}$$

(ب) این‌بار سطح گاؤسی استوانه‌ای را در خارج استوانه در نظر می‌گیریم و قانون گاؤس را به‌کار می‌بندیم. توجه کنید که این دفعه، بار خالص داخل سطح گاؤس برابر با بار کلّ استوانه به شعاع R می‌شود و بنابراین خواهیم داشت:



$$\oint\vec{E}\cdot d\vec{A}=\frac{q}{\varepsilon_0}=\frac{\int\rho dV}{\varepsilon_0}=\frac{۱}{\varepsilon_0}\int_0^R(Ar^۲)(۲\pi rL)dr$$
$$=\frac{۲\pi LA}{۴\varepsilon_0}\int_0^R r^۳dr=\frac{۲\pi LA}{۴\varepsilon_0}R^۴$$

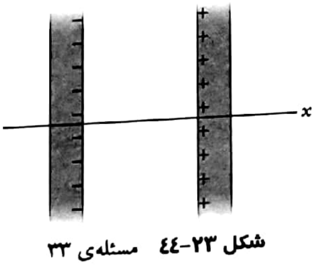
با توجه به اینکه سمت چپ برابر با $(E_{\text{خارج}})(۲\pi rL)$ است، $E_{\text{خارج}}$ چنین می‌شود:

$$E_{\text{خارج}}=\frac{A}{۴\varepsilon_0 r}R^۴$$
$$=\frac{۲٫۵\times۱۰^{-۶}\,\text{C/m}^۵}{۴(۸٫۸۵\times۱۰^{-۱۲}\,\text{C}^۲/\text{N}\cdot\text{m}^۲)(۵٫۰\times۱۰^{-۲}\,\text{m})}(۴٫۰\times۱۰^{-۳}\,\text{m})^۴$$
$$=۳٫۶\,\text{N/C}$$

Scanned by CamScanner

بخش ۲۳-۵ به‌کارگیری قانون گاؤس: تقارن صفحه‌ای

۳۳● در شکل ۲۳-۴۴، دو صفحه‌ی فلزی نازکِ بلند، موازی و نزدیک به یکدیگرند. این صفحه‌ها در وجه‌های داخلی خود دارای بارهای سطحی اضافه‌ای با چگالی‌هایی به بزرگی $7{,}00\times10^{-22}\ C/m^2$ هستند که از لحاظ علامت مخالف یکدیگرند. برحسب نمادگذاری بردارهای یکه، میدان الکتریکی در نقاط (الف) سمت چپ صفحه‌ها، (ب) سمت راست صفحه‌ها، (پ) میان آنها چگونه است؟



شکل ۲۳-۴۴ مسئله‌ی ۳۳

حل از معادله‌ی ۲۳-۱۳ $(\sigma/2\varepsilon_0)$ برای ورقه‌ی نارسانا استفاده می‌کنیم.

(الف) در سمت چپ صفحه‌ها داریم

$$\vec{E}=\vec{E}_{(\text{ناشی از صفحه‌ی سمت چپ})}+\vec{E}_{(\text{ناشی از صفحه‌ی سمت راست})}$$
$$=\left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right)(-\hat{i})+\left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right)(\hat{i})=0$$

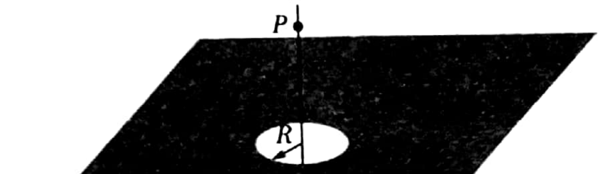
(ب) در سمت راست صفحه داریم

$$\vec{E}=\vec{E}_{(\text{ناشی از صفحه‌ی سمت چپ})}+\vec{E}_{(\text{ناشی از صفحه‌ی سمت راست})}$$
$$=\left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right)(\hat{i})+\left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right)(-\hat{i})=0$$

(پ) در میان صفحه‌ها داریم

$$\vec{E}=\left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right)(-\hat{i})+\left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right)(-\hat{i})=\left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)(-\hat{i})$$
$$=-\left(\frac{7{,}00\times10^{-22}\,C/m^2}{8{,}85\times10^{-12}\,C^2/N\cdot m^2}\right)=(-7{,}91\times10^{-11}\,N/C)\hat{i}$$

۳۴● در شکل ۲۳-۴۵، یک حفره‌ی دایره‌ای کوچک به شعاع $R=1{,}80\,cm$ در وسط یک سطح نارسانای تخت نامتناهی که دارای چگالی سطحی بار یکنواخت $\sigma=4{,}5\,pC/m^2$ است، کنده شده است. محور z که مبداء آن در مرکز حفره قرار دارد، عمود بر این سطح است. برحسب نمادگذاری بردارهای یکه، میدان الکتریکی در نقطه‌ی P واقع در $z=2{,}56\,cm$ چگونه است؟ (*راهنمایی:* معادله‌ی ۲۲-۲۶ را ببینید و از اصل برهم‌نهی استفاده کنید.)



شکل ۲۳-۴۵ مسئله‌ی ۳۴

حل در اینجا باید از اصل برهم‌نهی استفاده کنیم. نخست فرض می‌کنیم که حفره‌ای در صفحه‌ی نارسانا وجود ندارد. در این‌صورت میدان در نقطه‌ی P، طبق معادله‌ی ۲۳-۱۳ کتاب، چنین می‌شود:

$$\vec{E}_1=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k}$$

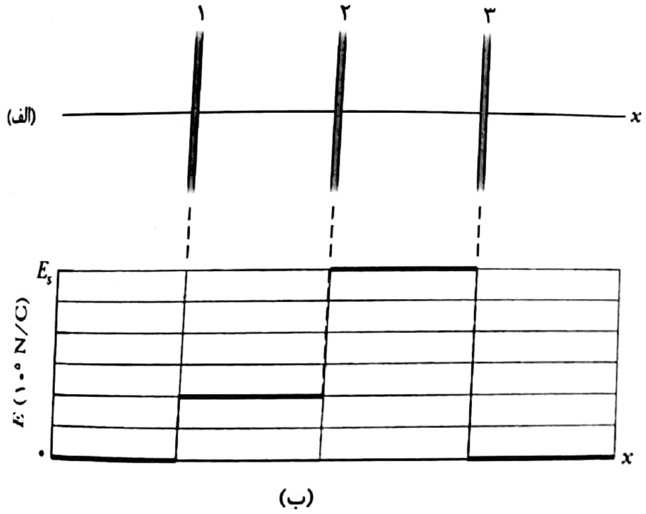
حال باید سهم میدان یک قرص باردار به شعاع R را از این میدان کم کنیم. از معادله‌ی ۲۲-۲۶برای میدان یک قرص باردار در نقطه‌ای روی محور مرکزی آن به فاصله‌ی z داریم:

$$\vec{E}_2=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1-\frac{z}{\sqrt{z^2+r^2}}\right]\hat{k}$$

پس، $\vec{E}_p$ چنین می‌شود:

$$\vec{E}_p=\vec{E}_1-\vec{E}_2=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right]\hat{k}$$
$$=\frac{(4{,}50\times10^{-12}\,C/m^2)}{2(8{,}85\times10^{-12}\,C^2/N\cdot m^2)}$$
$$\times\left(\frac{2{,}56\times10^{-2}\,m}{\sqrt{(2{,}56\times10^{-2}\,m)^2+(1{,}80\times10^{-2}\,m)^2}}\right)\hat{k}$$
$$=(0{,}208\,N/C)\hat{k}$$

۳۵● GO شکل ۲۳-۴۶الف سه ورقه‌ی پلاستیکی بزرگ و موازی را نشان می‌دهد که به‌طور یکنواختی باردار شده‌اند. شکل۲۳-۴۶ ب مؤلفه‌ی میدان الکتریکی خالص را در راستای محور x عبوری از ورقه‌ها نشان می‌دهد. محور قائم با $E_s=6{,}0\times10^5\,N/C$ مقیاس‌بندی شده است. نسبت چگالی بار ورقه‌ی ۳ به ورقه‌ی ۲ چقدر است؟



شکل ۲۳-۴۶ مسئله‌ی ۳۵

حل در ناحیه‌ی میان ورقه‌های ۱ و ۲، میدان الکتریکی خالص (برایند) برابر $E_1-E_2+E_3=2{,}0\times10^5\,N/C$ است. در ناحیه‌ی بین ورقه‌های ۲ و ۳، میدان الکتریکی خالص بزرگ‌ترین مقدار را دارد:

$$E_1+E_2+E_3=6{,}0\times10^5\,N/C$$

میدان الکتریکی خالص در ناحیه‌ی سمت راست ورقه‌ی ۳ صفر می‌شود؛ در آنجا $E_1+E_2=E_3$ است. این بدین معناست که σ_3 منفی و دارد

Scanned by CamScanner

بزرگ‌ترین چگالی سطحی است. این شرط برای به‌دست آوردن میدان‌ها کفایت می‌کند:

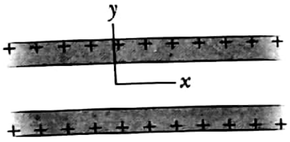
$$E_1=1.0\times10^{5}\ \mathrm{N/C}\ ,\ E_2=2.0\times10^{5}\ \mathrm{N/C}\ ,\ E_3=3.0\times10^{5}\ \mathrm{N/C}$$

آنگاه از معادله‌ی ۲۳-۱۳ ($E=\sigma/2\varepsilon_0$) می‌توانیم نسبت چگالی‌های بار زیر را به‌دست آوریم

$$\frac{|\sigma_3|}{|\sigma_2|}=\frac{3.0\times10^{5}\ \mathrm{N/C}}{2.0\times10^{5}\ \mathrm{N/C}}=1.5$$

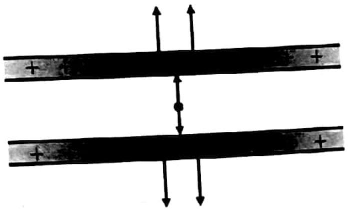
با توجه به اینکه در بالا دریافتیم که σ_3 کمیتی منفی است، نتیجه می‌گیریم که $\sigma_3/\sigma_2=-1.5$ است.

۳۶• شکل ۲۳-۴۷ مقطعی از دو ورقه‌ی نارسانای موازی و بزرگ را نشان می‌دهد که دارای توزیع‌های بار مثبت یکسانی با چگالی سطحی بار $\sigma=1.77\times10^{-22}\ \mathrm{C/m^2}$ هستند. برحسب نمادگذاری بردارهای یکه، $\vec{E}$ در نقاط (الف) بالای ورقه‌ها، (ب) در میان آنها و (پ) پایین آنها چگونه است؟



شکل ۲۳-۴۷ مسئله‌ی ۳۶

حل طبق معادله‌ی ۲۳-۱۳ میدان الکتریکی حاصل از هر ورقه‌ی نارسانای باردار با چگالی سطحی $\sigma=1.77\times10^{-22}\ \mathrm{C/m^2}$ عمود بر صفحه‌ی آن ورقه و بزرگی آن برابر $E=\sigma/2\varepsilon_0$ است. در پاسخ‌گویی به قسمت‌های مختلف مسئله از اصل برهم‌نهی استفاده می‌کنیم:



(الف)

$$\vec{E}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{\mathrm{j}}+\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{\mathrm{j}}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{\mathrm{j}}=\frac{1.77\times10^{-22}\ \mathrm{C/m^2}}{8.85\times10^{-12}\ \mathrm{C^2/N\cdot m^2}}\hat{\mathrm{j}}=2.00\times10^{-11}\ \mathrm{N/C}\,\hat{\mathrm{j}}$$

(ب)

$$\vec{E}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{\mathrm{j}}-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{\mathrm{j}}=0$$

(پ)

$$\vec{E}=-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{\mathrm{j}}-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{\mathrm{j}}=-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{\mathrm{j}}=-(2.00\times10^{-11}\ \mathrm{N/C})\hat{\mathrm{j}}$$

۳۷• WWW یک صفحه‌ی فلزی مربعی به ضلع $8.0\ \mathrm{cm}$ و ضخامت ناچیز، دارای بار کلّ $6.0\times10^{-6}\ \mathrm{C}$ است. (الف) با فرض اینکه بار روی هر دو وجه این صفحه به‌طور یکنواخت توزیع شده باشد، بزرگی E ی میدان الکتریکی را درست بیرون مرکز صفحه (مثلاً در فاصله‌ی $0.50\ \mathrm{mm}$ از مرکز آن) محاسبه کنید. (ب) با فرض اینکه صفحه یک بار نقطه‌ای باشد، E را در فاصله‌ی $30\ \mathrm{m}$ (که نسبت به اندازه‌ی صفحه بسیار بزرگ است) محاسبه کنید.

حل (الف) برای محاسبه‌ی میدان الکتریکی در نقطه‌ای "بسیار نزدیک" به یک صفحه‌ی متناهی که به‌طور یکنواختی باردار شده است می‌توانیم آن صفحه را با یک صفحه‌ی نامتناهی با همان چگالی سطحی بار جایگزین کنیم و بنابراین بزرگی میدان الکتریکی برابر با $E=\sigma/\varepsilon_0$ می‌شود که در آن σ چگالی سطحی بار برای سطحی است که درست زیر نقطه‌ی مورد نظر واقع است. بار به‌طور یکنواختی روی هر دو طرف صفحه توزیع شده است و بنابراین چگالی بار روی هر طرف چنین می‌شود:

$$\sigma=\frac{q}{2A}=\frac{6.0\times10^{-6}\ \mathrm{C}}{2(0.080\ \mathrm{m})^2}=4.7\times10^{-4}\ \mathrm{C/m^2}$$

در نتیجه بزرگی میدان الکتریکی برابر است با

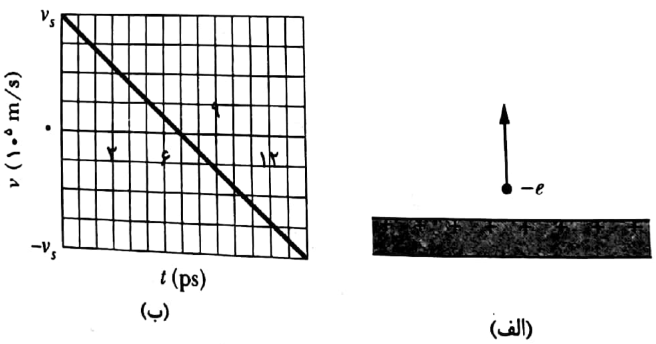
$$E=\frac{4.7\times10^{-4}\ \mathrm{C/m^2}}{8.85\times10^{-12}\ \mathrm{C^2/N\cdot m^2}}=5.31\times10^{7}\ \mathrm{N/C}$$

چون بار روی هر صفحه، مثبت است، این میدان عمود بر صفحه و رو به بیرون آن است.

(ب) در نقطه‌ای بسیار دور از صفحه، میدان الکتریکی درست مانند میدان حاصل از یک بار نقطه‌ای به بار کلّ صفحه می‌شود. بزرگی این میدان برابر است با

$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{kq}{r^2}=\frac{(8.99\times10^{9}\ \mathrm{N\cdot m^2/C^2})(6.0\times10^{-6}\ \mathrm{C})}{(30\ \mathrm{m})^2}=60\ \mathrm{N/C}$$

۳۸•• GO در شکل ۲۳-۴۸ الف، الکترونی مستقیماً از یک ورقه‌ی پلاستیکی باردار یکنواخت، با تندی $v_s=2.0\times10^{5}\ \mathrm{m/s}$ رو به بیرون شلیک شده است. این ورقه، نارسانا، تخت و بسیار بزرگ است. شکل ۲۳-۴۸ ب مؤلفه‌ی قائم v ی سرعت الکترون را برحسب زمان t تا هنگام برگشتن الکترون به نقطه‌ی شلیک، نشان می‌دهد. چگالی سطحی بار ورقه چقدر است؟



شکل ۲۳-۴۸ مسئله‌ی ۳۸

حل میدان الکتریکی ناشی از ورقه‌ی نارسانا از معادله‌ی ۲۳-۱۳ برابر با $E=\sigma/2\varepsilon_0$ می‌شود. بزرگی نیروی وارد بر الکترون از طرف

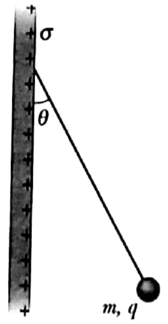
Scanned by CamScanner

میدان برابر $F=eE$ است و فرض می‌کنیم که این تنها نیرویی است به الکترون شتاب می‌دهد. در نتیجه شتاب الکترون چنین می‌شود:

$$a=\frac{e\sigma}{2\varepsilon_0 m_e}=\text{شیب منحنی}\,(=2.0\times10^{5}\,\mathrm{m/s}/7.0\times10^{-12}\,\mathrm{s})$$

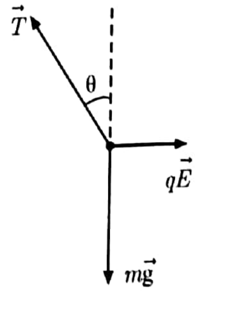
آنگاه با قرار دادن $e=1.6\times10^{-19}\,\mathrm{C}$ و $m_e=9.11\times10^{-31}\,\mathrm{kg}$ به $\sigma=2.9\times10^{-6}\,\mathrm{C/m^2}$ می‌رسیم.

۳۹•• در شکل ۲۳-۴۹، گوی کوچک نارسانایی به جرم $m=1.0\,\mathrm{mg}$ و بار $q=2.0\times10^{-8}\,\mathrm{C}$ (که به‌طور یکنواخت در سرتاسر حجم آن توزیع شده است) از یک نخ عایق آویزان است و با ورقه‌ی نارسانای قائمی با بار یکنواخت (که مقطع آن نشان داده شده است) زاویه‌ی $\theta=30^\circ$ می‌سازد. نیروی گرانشی وارد بر گوی را در نظر بگیرید و با فرض اینکه ورقه به‌طور قائم و نیز به سمت داخل و خارج صفحه‌ی کاغذ تا فاصله‌های دور امتداد داشته باشد، چگالی سطحی بار σی ورقه را محاسبه کنید.



شکل ۲۳-۴۹ مسئله‌ی ۳۹

حل نیروهای وارد بر گوی به جرم m در شکل پایین رسم شده‌اند، که در آن نیروی گرانشی $m\vec{g}$، نیروی الکتریکی $q\vec{E}$، و نیروی کشش نخ $\vec{T}$ است. میدان الکتریکی حاصل از صفحه، عمودی و رو به سمت راست است. چون گوی باردار مثبت است، نیروی الکتریکی وارد بر آن نیز به سمت راست می‌شود. کشش نخ با امتداد قائم زاویه $\theta(=30^\circ)$ می‌سازد.



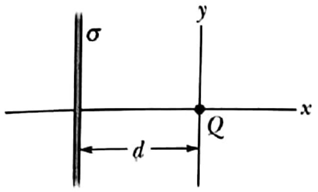
چون گوی در تعادل است، نیروی خالص وارد بر آن صفر است. شرط تعادل نیرو در راستای افقی $qE-T\sin\theta=0$ و شرط تعادل نیروها در راستای قائم $T\cos\theta-mg=0$ را به‌دست می‌دهد. این دو معادله را می‌توان به صورت $T\sin\theta=qE$ و $T\cos\theta=mg$ نوشت و آنگاه از تقسیم آنها بر هم به $qE=mg\tan\theta$ رسید. از طرفی، میدان الکتریکی حاصل از یک ورقه‌ی نارسانای باردار یکنواخت برابر با $E=\sigma/2\varepsilon_0$ است. بنابراین $q\sigma/2\varepsilon_0=mg\tan\theta$ می‌شود و از آنجا برای σ خواهیم داشت:

$$\sigma=\frac{2\varepsilon_0 mg\tan\theta}{q}$$

$$=\frac{2(8.85\times10^{-12}\,\mathrm{C^2/N\cdot m^2})(1.0\times10^{-6}\,\mathrm{kg})(9.8\,\mathrm{m/s^2})\tan30^\circ}{2.0\times10^{-8}\,\mathrm{C}}$$

$$=5.0\times10^{-9}\,\mathrm{C/m^2}$$

۴۰•• شکل ۲۳-۵۰، یک ورقه‌ی نارسانای خیلی بزرگ را نشان می‌دهد که دارای چگالی سطحی بار یکنواخت $\sigma=-2.00\,\mu\mathrm{C/m^2}$ است؛ این شکل همچنین ذره‌ای به بار $Q=6.00\,\mu\mathrm{C}$ را نشان می‌دهد که در فاصله‌ی d از ورقه قرار دارد. هر دو ورقه در مکان‌های خود ثابت شده‌اند. اگر $d=0.200\,\mathrm{m}$ باشد، در چه مختصه‌ی (الف) مثبت و (ب) منفی‌ای روی محور x (غیر از بی‌نهایت)، میدان الکتریکی خالص $\vec{E}_{\text{net}}$ حاصل از ورقه و ذره برابر با صفر است؟ (پ) اگر $d=0.800\,\mathrm{m}$ باشد، در چه مختصه‌ای روی محور x، $\vec{E}_{\text{net}}=0$ است؟



شکل ۲۳-۵۰ مسئله‌ی ۴۰

حل چون ورقه و ذره دارای بارهایی مخالف‌اند، نقطه‌ای که در آنجا میدان‌های مجزا می‌توانند همدیگر را خنثی کنند در ناحیه‌ی میان ورقه و ذره $(-d<x<0)$ قرار ندارد. نقاطی که در آنجا میدان‌های مجزا می‌توانند همدیگر را خنثی کنند در ناحیه‌ی سمت راست ذره $(x>0)$ و ناحیه‌ی سمت چپ ورقه $(x<-d)$ قرار دارد. در این نقاط باید شرط زیر برقرار باشد:

$$\frac{|\sigma|}{2\varepsilon_0}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\Rightarrow r=\pm\sqrt{\frac{Q}{2\pi|\sigma|}}=\pm\sqrt{\frac{6.00\,\mu\mathrm{C}}{4.00\pi\,\mu\mathrm{C/m^2}}}$$

که به $r=x\approx\pm0.691\,\mathrm{m}$ می‌انجامد.

اگر $d=0.200\,\mathrm{m}$ باشد (که کوچک‌تر از مقدار r به‌دست آمده در بالاست)، آنگاه هیچکدام از این نقاط $(x\approx\pm0.691\,\mathrm{m})$ در ناحیه‌ی "غیرمجاز" میان ذره و ورقه نیستند. در نتیجه، هر دو مقدار مجازند و بنابراین داریم:

(الف) $x=0.691\,\mathrm{m}$ روی محور مثبت، و

(ب) $x=-0.691\,\mathrm{m}$ روی محور منفی.

(پ) ولی اگر $d=0.800\,\mathrm{m}$ باشد (که بزرگ‌تر از مقدار r به‌دست آمده در بالاست)، آنگاه یکی از نقاط $(x\approx-0.691\,\mathrm{m})$ در ناحیه‌ی "غیرمجاز" میان ذره و ورقه می‌افتد و غیرمجاز است. در این قسمت، میدان‌ها همدیگر را در نقطه‌ی $x\approx+0.691\,\mathrm{m}$ خنثی می‌کنند.

۴۱•• GO الکترونی مستقیماً به سمت مرکز یک صفحه‌ی فلزی بزرگ، با چگالی سطحی بار $-2.0\times10^{-6}\,\mathrm{C/m^2}$، پرتاب می‌شود. اگر انرژی جنبشی اولیه‌ی این الکترون $1.60\times10^{-17}\,\mathrm{J}$ باشد و اگر الکترون درست در لحظه‌ی رسیدن به صفحه (بر اثر دافعه‌ی الکتروستاتیکی حاصل از صفحه) متوقف شود، نقطه‌ی پرتاب باید در چه فاصله‌ای از صفحه قرار داشته باشد؟

Scanned by CamScanner

حل بار روی صفحه‌ی فلزی، منفی است و یک نیروی دافعه بر الکترون وارد کرده و آن را سرانجام متوقف می‌کند. بزرگی میدان الکتریکی حاصل از صفحه‌ی فلزی $E=\sigma/\varepsilon_\circ$ و در نتیجه بزرگی نیروی وارد بر الکترون $F=eE=e\sigma/\varepsilon_\circ$ است. از قضیه‌ی کار ـ انرژی جنبشی استفاده می‌کنیم. چون تا پیش از متوقف شدن الکترون نیرو در خلاف جهت جابه‌جایی است، $\vec{F}\cdot\vec{d}=-Fd$ می‌شود. انرژی جنبشی اولیه $K_\circ$ و انرژی جنبشی نهایی برابر با صفر است. بنابراین داریم:

$$\Delta K=K-K_\circ=-K_\circ=-Fd$$

و از آنجا d چنین می‌شود:

$$d=\frac{K_\circ}{e(\sigma/\varepsilon_\circ)}$$

$$=\frac{(۱۰۰\text{eV})(۱/۶۰\times۱۰^{-۱۹}\text{J/eV})(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲}\text{C}^۲/\text{N}\cdot\text{m}^۲)}{(۱/۶۰\times۱۰^{-۱۹}\text{C})(۲/۰\times۱۰^{-۶}\text{C/m}^۲)}$$

$$=۴/۴\times۱۰^{-۴}\text{m}=۰/۴۴\text{mm}$$

البته می‌توانستیم مسئله را با استفاده از معادله‌های سینماتیکی حرکت نیز حل کنیم. به این ترتیب که شتاب کاهنده را با استفاده از $F=ma$ برابر $-e\sigma/\varepsilon_\circ m_e$ به‌دست آورده و آن را به‌ازای $v=۰$ در معادله‌ی $v^۲-v_\circ^۲=۲ad$ قرار دهیم. آنگاه به رابطه زیر می‌رسیم:

$$x=-\frac{v_\circ^۲}{۲a}=\frac{\varepsilon_\circ m_e v_\circ^۲}{۲e\sigma}=\frac{\varepsilon_\circ K_\circ}{e\sigma}$$

که همان رابطه‌ی بالاست.

۴۲۰۰ دو صفحه‌ی فلزی بزرگ به مساحت $۱/۰\text{m}^۲$ موازی یکدیگرند. آنها به فاصله‌ی $۵/۰\text{cm}$ از یکدیگر واقع‌اند و روی سطوح داخلی‌شان بارهایی مساوی ولی با علامت مخالف دارند. اگر بزرگی E ی میدان الکتریکی در میان صفحه‌ها ۵۵N/C باشد، بزرگی بار روی هر صفحه چقدر است؟ از اثر لبه‌ها چشم‌پوشی کنید.

حل بزرگی میدان میان دو صفحه‌ی فلزی را در حلّ قسمت پ مسئله‌ی ۳۶ برابر با $E=\sigma/\varepsilon_\circ$ به‌دست آوردیم. حال از آنجا σ را به‌دست می‌آوریم:

$$\sigma=\varepsilon_\circ E=(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲}\text{C}^۲/\text{N}\cdot\text{m}^۲)(۵۵\text{N/C})$$

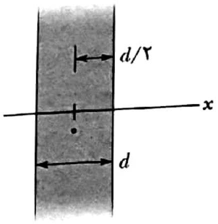
$$=۴/۸۶\times۱۰^{-۱۰}\text{C/m}^۲$$

چون مساحت هر صفحه $A=۱/۰\text{ m}^۲$ است، بزرگی بار روی هر صفحه چنین می‌شود:

$$Q=\sigma A=(۴/۸۶\times۱۰^{-۱۰}\text{C/m}^۲)(۱/۰\text{m}^۲)$$

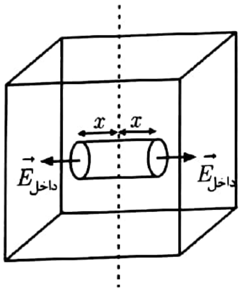
$$=۴/۸۶\times۱۰^{-۱۰}\text{C}=۴۸۶\text{pC}$$

۴۳۰۰۰ GO شکل ۲۳-۵۱ مقطع یک بُره‌ی نارسانای خیلی بزرگ به ضخامت $d=۹/۴۰\text{mm}$ را نشان می‌دهد که دارای چگالی حجمی بار یکنواخت $\rho=۵/۸۰\text{fC/m}^۳$ است. مبداء محور x در مرکز بره قرار دارد. بزرگی میدان الکتریکی بره در مختصه‌ی x (الف) ۰، (ب) ۲/۰۰mm، (پ) ۴/۷۰mm، و (ت) ۲۶/۰mm چقدر است؟



شکل ۲۳-۵۱ مسئله‌ی ۴۳

حل سطح گاؤسی متناسب برای این مسئله یک جعبه‌ی مستطیلی با وجوه راست‌گوشه و به ارتفاع $۲x$ است که به طور متقارن در داخل مکعب قرار گرفته باشد. ولی مرسوم است که جهت راحتی کار از یک سطح گاؤسی استوانه‌ای (موسوم به pill box– یا همان جعبه‌ی قرص جوشان خودمان) به ارتفاع $۲x$ استفاده کنیم. چرا که در به کار بردن قانون گاؤس به جای آنکه شش سطح (شش وجه جعبه) کافی است سه سطح(دو قاعده و سطح جانبی استوانه) را در نظر بگیریم. میدان الکتریکی موازی با چهار وجه جعبه و یا یک سطح جانبی استوانه است و بنابراین شار عبوری از آنها برابر صفر است. پس، همان‌طور که گفتیم راحت‌تر همان است که از سطح گاؤسی استوانه‌ای شکل زیر استفاده کنیم.



چون بار مثبت است، میدان روی هر دو قاعده ($\vec{E}$ داخل) رو به خارج و هم‌جهت با بردار عمود بر سطح قاعده‌هاست. پس، از قانون گاؤس داریم:

$$\varepsilon_\circ\oint\vec{E}\cdot d\vec{A}=q_{enc}$$

$$\varepsilon_\circ(E_{\text{داخل}}+۰+E_{\text{داخل}})A=\rho V=(\rho)(A)(۲x)$$

و از آنجا خواهیم داشت:

$$\vec{E}_{\text{داخل}}=\frac{\rho x}{۲\varepsilon_\circ}$$

(الف) به‌ازای $x=۰$، $\vec{E}_{\text{داخل}}=۰$ می‌شود.

(ب) به‌ازای $x=۲/۰۰\text{mm}=۲/۰۰\times۱۰^{-۳}\text{m}$، خواهیم داشت:

$$E_{\text{داخل}}=\frac{(۵/۸۰\times۱۰^{-۱۵}\text{C/m}^۳)(۲/۰۰\times۱۰^{-۳}\text{m})}{۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲}\text{C}^۲/\text{N}\cdot\text{m}^۲}$$

$$=۱/۳۱\times۱۰^{-۶}\text{N/C}$$

(پ) توجه کنید که به‌ازای $x=d/۲=۴/۷۰\text{mm}=۴/۷۰\times۱۰^{-۳}\text{m}$، روی سطح قطعه هستیم و در واقع $E_{\text{داخل}}$ به $E_{\text{خارج}}$ تبدیل می‌شود.

$$E_{\text{خارج}}=\frac{(۵/۸۰\times۱۰^{-۱۵}\text{C/m}^۳)(۴/۷۰\times۱۰^{-۳}\text{m})}{۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲}\text{C}^۲/\text{N}\cdot\text{m}^۲}$$

$$=۳/۰۸\times۱۰^{-۶}\text{N/C}$$

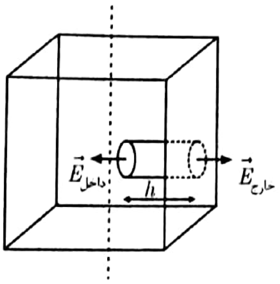
Scanned by CamScanner

(ت) توجه کنید هرچند که $x = 26.0\,mm$ بزرگ‌تر از $d/2$ است ولی وقتی قانون گاوس را به‌کار می‌بندیم با بار محصور شده در سطح گاوسی سروکار داریم. یعنی، هرچند ارتفاع سطح گاوسی که در اینجا به کار می‌گیریم بلندتر است ولی بار محصور شده در این سطح برابر با بار محصور شده در $x = d/2$ است:

$$\varepsilon_0 (E_{\text{خارج}} + E_{\text{خارج}}) A = (\rho)(A)(d)$$

و از آنجا $E_{\text{خارج}} = \rho d/2\varepsilon_0$ می‌شود که همان $E_{\text{خارج}}$ به‌دست آمده در قسمت پ است.

توجه یک روش دیگر که به نتایج آموزنده‌ای می‌انجامد این است که نخست $E_{\text{خارج}}$ را به‌دست آورده و سپس سراغ محاسبه‌ی $E_{\text{داخل}}$ برویم. برای محاسبه $E_{\text{خارج}}$ همان‌گونه که در قسمت‌های (پ) و (ت) انجام دادیم، سطح گاوسی استوانه‌ای را باید به گونه‌ای انتخاب کنیم که دو سر آن خارج از قطعه قرار گیرد که در آن صورت $E_{\text{خارج}} = \rho d/\varepsilon_0$ می‌شود. حال برای محاسبه‌ی $E_{\text{داخل}}$ باید سطح گاوسی استوانه‌ای را به‌گونه‌ای اختیار کنیم که یک سر آن در داخل قطعه (بر فرض به فاصله‌ی h از یک وجه آن) و سر دیگر آن روی آن وجه باشد. آنگاه قانون گاوس چنین به‌دست می‌دهد:



$$\varepsilon_0 \oint \vec E\cdot d\vec A = q_{enc}$$

$$\varepsilon_0 (E_{\text{داخل}} + 0 + E_{\text{خارج}}) A = \rho A h$$

$E_{\text{خارج}}$ را پیشتر به‌دست آوردیم. با قرار دادن آن در رابطه‌ی بالا خواهیم داشت:

$$\varepsilon_0 = \left(E_{\text{داخل}} + \frac{\rho d}{2\varepsilon_0}\right) A = \rho A h$$

و در نتیجه $E_{\text{داخل}}$ چنین می‌شود:

$$E_{\text{داخل}} = \frac{\rho h - \rho d/2}{\varepsilon_0}$$

خوب است که دو حالت خاص را بررسی کنیم. میدان باید درست در وسط قطعه برابر با صفر باشد:

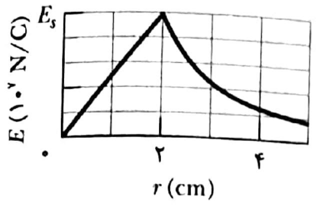
$$h = d/2 \Rightarrow E_{\text{داخل}} = \frac{\rho d/2 - \rho d/2}{\varepsilon_0} = 0$$

میدان باید به‌ازای $h = d$ همان $E_{\text{خارج}}$ شود:

$$E_{\text{داخل}} = \frac{\rho d - \rho d/2}{\varepsilon_0} = \frac{\rho d}{2\varepsilon_0} = E_{\text{خارج}}$$

بخش ۲۳-۶ به‌کارگیری قانون گاوس: تقارن کروی

۴۴● شکل ۲۳-۵۲ بزرگی میدان الکتریکی را در داخل و خارج کره‌ای نشان می‌دهد که بار مثبت در سرتاسر حجم آنها به‌طور یکنواخت توزیع شده است. محور قائم $E_s = 5.0\times10^7\,N/C$ مقیاس‌بندی شده است. بار روی کره چقدر است؟



شکل ۲۳-۵۲ مسئله‌ی ۴۴

حل بار کلّ روی گوی را با بررسی مقدار بیشینه‌ی میدان نشان داده شده روی منحنی ($E = 5.0\times10^7\,N/C$) که در $r = 0.020\,m$ رخ می‌دهد، تعیین می‌کنیم. در نتیجه داریم:

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\Rightarrow q = \frac{r^2 E}{k} = \frac{(0.020\,m)^2(5.0\times10^7\,N/C)}{8.99\times10^9\,N\cdot m^2/C^2} = 2.2\times10^{-6}\,C$$

۴۵● دو پوسته‌ی کروی باردار هم‌مرکز دارای شعاع‌های $10.0\,cm$ و $15.0\,cm$ هستند. بار روی پوسته‌ی داخلی $4.00\times10^{-8}\,C$ و بار روی پوسته‌ی خارجی $2.00\times10^{-8}\,C$ است. میدان الکتریکی را در (الف) $r = 12.0\,cm$ و (ب) $r = 20.0\,cm$ به‌دست آورید.

حل (الف) یک سطح گاوسی کروی هم‌مرکز با کره‌ها در فضای میان دو کره به شعاع $r = 0.12\,m$ اختیار می‌کنیم و قانون گاوس را به‌کار می‌بندیم.

$$\oint \vec E\cdot d\vec A = q_{enc}/\varepsilon_0 \quad \Rightarrow \quad E(4\pi r^2) = q_1/\varepsilon_0$$

و از آنجا

$$E = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{(8.99\times10^9\,N\cdot m^2/C^2)(4.00\times10^{-8}\,C)}{(0.120\,m)^2}$$

$$= 2.50\times10^4\,N/C$$

(ب) این بار، یک سطح گاوسی کروی هم‌مرکز با کره‌ها در فضای خارج کره به شعاع $r = 0.2\,m$ اختیار می‌کنیم و قانون گاوس را به‌کار می‌بندیم.

$$\oint \vec E\cdot d\vec A = q/\varepsilon_0 \quad \Rightarrow \quad E(4\pi r^2) = (q_1 + q_2)/\varepsilon_0$$

و از آنجا

$$E = \frac{q_1 + q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$= \frac{(8.99\times10^9\,N\cdot m^2/C^2)(4.00 + 2.00)(10^{-8}\,C)}{(0.200\,m)^2}$$

$$= 1.35\times10^4\,N/C$$

۴۶● فرض کنید یک گوی باردار دارای چگالی بار منفی‌ای است که به‌جز در مجرای شعاعی باریک عبوری از مرکز کره، که یک طرف سطح کره را به سطح مقابل آن وصل می‌کند، به‌طور یکنواختی توزیع شده است. همچنین فرض کنید که می‌توانیم یک پروتون را در هر جایی داخل این

Scanned by CamScanner

مجرا یا بیرون گوی قرار دهیم. F_R را بزرگی نیروی الکتروستاتیکی وارد بر پروتون در هنگامی در نظر بگیرید که پروتون روی سطح گوی، به شعاع R، قرار دارد. برحسب مضربی از R، در چه فاصله‌ای از سطح کره نقطه‌ای وجود دارد که در آنجا بزرگی نیروی وارد بر پروتون $0.50F_R$ می‌شود، در صورتی که پروتون را (الف) از گوی دور کنیم و (ب) به داخل مجرا ببریم؟

حل (الف) پروتون دارای بار e است و بزرگی بار گوی برابر با q است. بنابراین، تا هنگامی که پروتون در فاصله‌ی $r \geq R$ قرار دارد، نیروی وارد بر پروتون از سوی گوی بزرگی زیر را دارد، که در آن E میدان الکتریکی در محل پروتون است:

$$F = eE = e\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right) = \frac{eq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

توجه کنید که r فاصله‌ی مرکز گوی تا پروتون است. اگر $r = R$ باشد، رابطه‌ی بالا چنین می‌شود:

$$F_R = \frac{eq}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

آنگاه شرط $F = 0.50F_R$ به $r = \sqrt{2}R$ می‌انجامد. چون مسئله، فاصله از سطح گوی را خواسته است، پاسخ $\sqrt{2}R - R = 0.41R$ می‌شود.

(ب) وقتی پروتون داخل گوی قرار دارد، میدان حاصل از گوی در مکان پروتون با معادله‌ی ۲۳-۲۰ داده می‌شود (و نیز حل مسئله‌ی ۴۹ را ببینید). بنابراین بزرگی نیروی وارد بر پروتون چنین می‌شود:

$$F_{\text{داخل}} = e\,E_{\text{داخل}} = e\left(\frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\right)$$

آنگاه شرط $F_{\text{داخل}} = 0.50F_R$ به $r = R/2 = 0.50R$ می‌انجامد.

۴۷• یک بار نامشخص روی کره توپُر نارسانایی به شعاع $10\,\text{cm}$ قرار دارد. اگر میدان الکتریکی در فاصله‌ی $15\,\text{cm}$ از مرکز این کره دارای بزرگی $3.0\times10^3\,\text{N/C}$ و جهت آن به‌طور شعاعی رو به داخل باشد، بار خالص روی این کره چقدر است؟

حل بار منفی به‌طور یکنواختی روی سطح کره توزیع شده است و میدان الکتریکی که ایجاد می‌کند به‌طور شعاعی رو به خارج است. یک سطح گاوسی کروی به شعاع r به دور کره‌ی رسانا به شعاع R در نظر می‌گیریم و قانون گاوس را به کار می‌بندیم. سوی میدان الکتریکی و بردار عمود بر سطح در خلاف جهت یکدیگرند و در نتیجه داریم:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = q_{\text{enc}}/\varepsilon_0$$

$$-(E)(4\pi r^2) = q_{\text{enc}}/\varepsilon_0$$

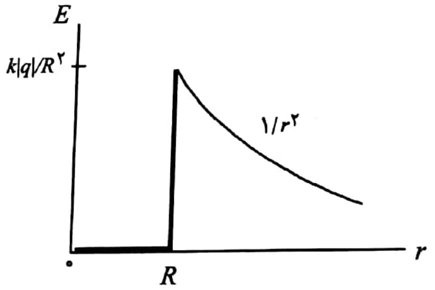
و در نتیجه q_{enc} چنین می‌شود:

$$q_{\text{enc}} = -4\pi\varepsilon_0 E r^2$$

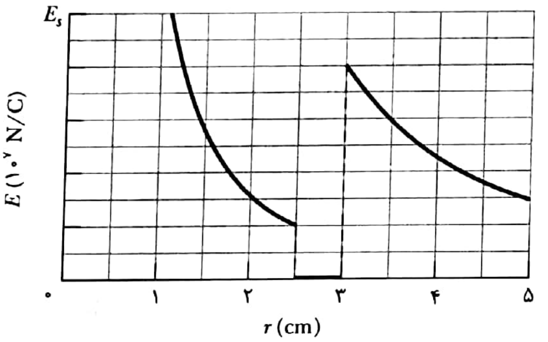
$$= (4\pi)(8.85\times10^{-12}\,\text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(3.0\times10^3\,\text{N/C})(0.15\text{m})^2$$

$$= -7.5\times10^{-9}\,\text{C} = -7.5\,\text{nC}$$

تبصره. رسم نمودار میدان الکتریکی E برحسب شعاع r می‌تواند آموزنده باشد. در داخل کره، $E = 0$ است و در بیرون سطح کره میدان طوری اُفت می‌کند که گویی بار در مرکز کره قرار دارد.



۴۸•• ذره‌ی باردار مثبتی در مرکز یک پوسته کروی قرار گرفته است. شکل ۲۳-۵۳ بزرگی E ی میدان الکتریکی را برحسب فاصله‌ی شعاعی r نشان می‌دهد. تقریباً چه بار خالصی روی پوسته قرار دارد؟



شکل ۲۳-۵۳ مسئله‌ی ۴۸

حل E_A را بزرگی میدان در $r = 2.5\text{cm}$ بگیرید. بنابراین از نمودار درمی‌یابیم که $E_A = 2.0\times10^7\,\text{N/C}$ است که کلاً ناشی از ذره‌ی باردار است. چون $E_{\text{ذره}} = q/4\pi\varepsilon_0 r^2$ است، میدان ناشی از ذره در هر نقطه‌ی دیگر با مربع نسبت فاصله‌ها به E_A مربوط می‌شود. حال توجه کنید که در $r = 3.0\text{cm}$ سهم کلّ میدان (ناشی از ذره و پوسته) برابر با $8.0\times10^7\,\text{N/C}$ است. بنابراین داریم:

$$E_{\text{پوسته}} + E_{\text{ذره}} = E_{\text{پوسته}} + \left(\frac{2.5}{3.0}\right)^2 E_A = 8.0\times10^7\,\text{N/C}$$

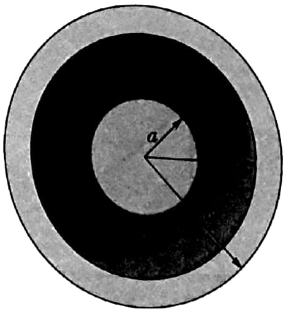
با استفاده از مقدار E_A به $E_{\text{پوسته}} = 6.6\times10^7\,\text{N/C}$ می‌رسیم. بنابراین به‌ازای $r = 0.030\text{m}$، بار Q با استفاده از $E_{\text{پوسته}} = Q/4\pi\varepsilon_0 r^2$ چنین به‌دست می‌آید:

$$Q = (4\pi\varepsilon_0)(E_{\text{پوسته}})r^2 = \frac{(6.6\times10^7)(0.030\text{m})^2}{8.99\times10^9\,\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2}$$

$$= 6.61\times10^{-6}\,\text{C}$$

۴۹•• در شکل ۲۳-۵۴، یک کره‌ی توپُر به شعاع $a = 2.00\text{cm}$ با یک پوسته‌ی رسانای کروی به شعاع داخلی $b = 2.00a$ و شعاع خارجی $c = 2.40a$ هم‌مرکز است. کره دارای بار خالص یکنواخت $q_1 = +5.00\text{fC}$ و پوسته دارای بار خالص $q_2 = -q_1$ است. بزرگی میدان الکتریکی در فاصله‌ی شعاعی (الف) $r = 0$، (ب) $r = a/2.00$،

(پ) $r=a$، (ت) $r=1.50a$، (ث) $r=2.30a$ و (ج) $r=3.50a$ چقدر است؟ چه بار خالصی روی (چ) سطح داخلی و (ح) سطح خارجی پوسته قرار دارد؟



شکل ۲۳-۵۴ مسئلهٔ ۴۹

حل در تمامی نقاطی که میدان الکتریکی وجود دارد، میدان به‌طور شعاعی رو به بیرون است. برای هر قسمت مسئله از یک سطح گاؤسی به شکل کره استفاده می‌کنیم، که با کرهٔ باردار هم‌مرکز است، و به شعاع نقطه‌ای است که قرار است در آنجا میدان الکتریکی به‌دست آید. میدان یکنواخت است و بنابراین می‌توانیم $\oint \vec{E}\cdot d\vec{A}=E(4\pi r^2)$ قرار دهیم، که r شعاع سطح گاؤسی است. برای $r<a$، بار محصور شده در سطح گاؤسی از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$q_{enc}=\frac{q_1(4\pi r^3/3)}{4\pi a^3/3}=q_1\frac{r^3}{a^3}$$

در نتیجه، قانون گاؤس چنین به‌دست می‌دهد:

$$E(4\pi r^2)=q_1\frac{r^3}{a^3}\ \Rightarrow\ E=\frac{q_1 r}{4\pi\varepsilon_0 a^3}$$

(الف) به‌ازای $r=0$، معادلهٔ بالا $E=0$ به‌دست می‌دهد.

(ب) به‌ازای $r=a/2$ داریم:

$$E=\frac{q_1(a/2)}{4\pi\varepsilon_0 a^3}=\frac{(8.99\times10^{9}\,\mathrm{N\cdot m^2/C^2})(5.00\times10^{-15}\,\mathrm{C})}{(2.00\times10^{-2}\,\mathrm{m})^2}$$
$$=5.62\times10^{-2}\,\mathrm{N/C}$$

(پ) به‌ازای $r=a$، داریم

$$E=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 a^2}=\frac{(8.99\times10^{9}\,\mathrm{N\cdot m^2/C^2})(5.00\times10^{-15}\,\mathrm{C})}{(2.00\times10^{-2}\,\mathrm{m})^3}$$
$$=0.112\,\mathrm{N/C}$$

(ت) در ناحیهٔ $a<r<b$، سطح گاؤسی کروی از فضای میان کره و پوستهٔ رسانا می‌گذرد. چون در فضای میان آنها باری وجود دارد، بنابراین $q_{enc}=q_1$ و آنگاه از قانون گاؤس $E=q_1/4\pi\varepsilon_0 r^2$ می‌شود. پس، به‌ازای $r=1.50a$ خواهیم داشت:

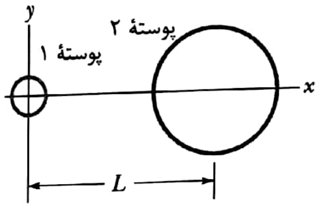
$$E=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{(8.99\times10^{9}\,\mathrm{N\cdot m^2/C^2})(5.00\times10^{-15}\,\mathrm{C})}{(1.50\times2.00\times10^{-2}\,\mathrm{m})^3}$$
$$=0.0499\,\mathrm{N/C}$$

(ث) این دفعه سطح گاؤسی کروی از میان پوستهٔ رسانا می‌گذرد. چون پوسته رسانا است، میدان داخل آن باید صفر باشد؛ پس پاسخ $E=0$ است. اگر بخواهیم با قانون گاؤس توجیه کنیم این‌گونه می‌شود که بار $+q_1$، بار $-q_1$ را در سطح درونی پوسته القا می‌کند تا $q_{enc}=0$ و در نتیجه $E=0$ شود.

(ج) سطح گاؤسی کروی را در فضای خارج پوسته $(r>C)$ اختیار می‌کنیم و قانون گاؤس را به‌کار می‌بندیم. توجه شود پس از آنکه بار $-q_1$ در سطح داخلی پوسته القا شد، برای آنکه پایستگی بار برقرار بماند باید بار $+q_1$ روی سطح پوسته القا شود. چون خود پوسته دارای بار $-q_1$ بود، پس بار خالص محصورشده برابر صفر می‌ماند و بنابراین $E=0$ است.

(چ) و (ح) به این قسمت در حل قسمت‌های ث و ج پاسخ دادیم. در قسمت ث با اختیار یک سطح گاؤسی که از فضای میان پوسته می‌گذرد نشان دادیم که بار $-q_1=-5.00\,\mathrm{fC}$ روی سطح درونی پوسته القا می‌شود. طبق قانون پایستگی بار، بار $+q_1$ روی پوسته القا می‌شود که جمع آن با بار $-q_1$ که قبلاً روی پوسته وجود داشت، بار $-q_1+q_1=0$ را به‌دست می‌دهد

۵۰۰۰ GO شکل ۲۳-۵۵ دو پوستهٔ کروی نارسانا را نشان می‌دهد که در مکان‌های خود روی محور x ثابت شده‌اند. پوستهٔ ۱ دارای چگالی سطحی بار یکنواخت $+4.0\,\mu\mathrm{C/m^2}$ روی سطح خارجی خود و شعاع $0.50\,\mathrm{cm}$، و پوستهٔ ۲ دارای چگالی سطحی بار یکنواخت $-2.0\,\mu\mathrm{C/m^2}$ روی سطح خارجی خود و شعاع $2.0\,\mathrm{cm}$ است؛ مرکز این کره‌ها به فاصلهٔ $L=6.0\,\mathrm{cm}$ از هم قرار گرفته‌اند. به‌جز در $x=\infty$، میدان الکتریکی خالص در کجای محور x برابر صفر می‌شود؟



شکل ۲۳-۵۵ مسئلهٔ ۵۰

حل چون پوسته‌ها دارای بارهایی با علامت مخالف‌اند، نقطه‌ای که در آنجا میدان‌ها همدیگر را خنثی می‌کنند نمی‌تواند در فضای میان پوسته‌ها باشد. همچنین این نقطه نمی‌تواند داخل شعاع R یکی از پوسته‌ها باشد، زیرا در آنجا فقط یک میدان سهم دارد و بنابراین نمی‌تواند با سهم میدان دیگر خنثی و میدان خالص [برایند] صفر شود. توجه کنید که پوستهٔ ۲ دارای مقدار بار (حاصل‌ضرب $|\sigma_2|4\pi R_2^2$) بیشتری از پوستهٔ ۱ (با مقدار بار $\sigma_1 4\pi R_1^2$) است و بنابراین نتیجه می‌گیریم نقطه‌ای که در آنجا میدان‌ها همدیگر را خنثی می‌کنند، نمی‌تواند در طرف راست پوستهٔ ۲ باشد. پس، این نقطه باید در ناحیهٔ سمت چپ پوستهٔ ۱ (در فاصلهٔ $r>R_1$ از مرکز آن) باشد؛ در این نقطه شرط زیر برقرار است:

$$E_1=E_2\ \Rightarrow\ \frac{|q_1|}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{|q_2|}{4\pi\varepsilon_0 (r+L)^2}$$

یا

Scanned by CamScanner

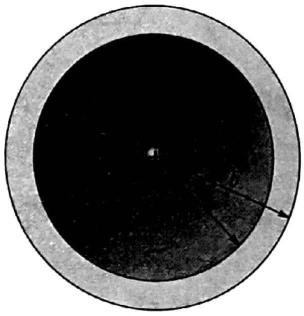
$$\frac{\sigma_1 A_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{|\sigma_2| A_2}{4\pi\varepsilon_0 (r+L)^2}$$

با استفاده از این واقعیت که مساحت کره $A=4\pi R^2$ است، این شرط به رابطه‌ی زیر می‌انجامد:

$$r=\frac{L}{1-(R_2/R_1)\sqrt{|\sigma_2|/\sigma_1}}$$

که با گذاشتن مقادیر شعاع‌ها و چگالی‌های بار از صورت مسئله، $r=3.3\,\text{cm}$ را به‌دست می‌دهد. (توجه کنید که این مقدار همان‌طور که انتظار داشتیم با شرط $r>R_1$ سازگار است.) در نتیجه، میدان خالص در $x=-r=-3.3\,\text{cm}$ صفر می‌شود.

۵۱●● WWW در شکل ۲۳-۵۶، یک پوسته‌ی کروی نارسانا به شعاع داخلی $a=2.00\,\text{cm}$ شعاع خارجی $b=2.40\,\text{cm}$ دارای چگالی حجمی بار $\rho=A/r$ (در داخل ضخامتش) است که در آن A یک ثابت و r فاصله از مرکز پوسته است. همچنین، یک گوی کوچک به بار $q=45.0\,\text{fC}$ در مرکز آن قرار گرفته است. برای آنکه میدان الکتریکی در پوسته $(a\le r<b)$ یکنواخت باشد، مقدار A باید چقدر باشد؟



شکل ۲۳-۵۶ مسئله‌ی ۵۱

حل سطح گاؤسی کروی هم‌مرکز با پوسته‌ی کروی و در دل آن به شعاع $a<r<b$ اختیار می‌کنیم و قانون گاؤس را به کار می‌بندیم. بار محصور در این سطح گاؤس شامل دو جمله است، یکی بار $+q$ و دیگری آن قسمت از بار پوسته که داخل سطح گاؤس قرار گرفته است.

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A}=q_{\text{enc}}/\varepsilon_0=\left(q+\int_a^r \rho\, dV\right)\Big/\varepsilon_0$$

$$=\left(q+\int_a^r \frac{A}{r}4\pi r^2 dr\right)\Big/\varepsilon_0=\left(q+4\pi A\int_a^r r\,dr\right)\Big/\varepsilon_0$$

$$=\left((q+2\pi A(r^2-a^2)\right)\Big/\varepsilon_0$$

با توجه به اینکه طرف چپ برابر $E(4\pi r^2)$ است، از آنجا خواهیم داشت:

$$(E)(4\pi r^2)=(q+2\pi A(r^2-a^2))/\varepsilon_0$$

یا

$$E=\frac{q}{4\pi r^2\varepsilon_0}+\frac{A}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)$$

برای آنکه میدان الکتریکی در داخل پوسته یکنواخت باشد باید $dE/dr=0$ باشد:

$$\frac{dE}{dr}=-\frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}+\frac{A}{2\varepsilon_0}\left(\frac{2a^2}{r^3}\right)=0$$

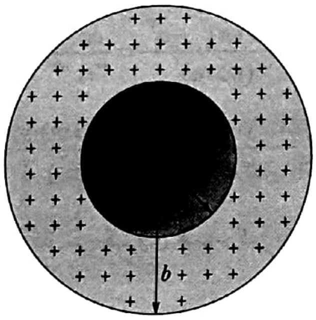
که به $q=2\pi A a^2$ و یا $A=q/2\pi a^2$ می‌انجامد. به‌ازای $a=2.00\times10^{-2}\,\text{m}$ و $q=45.0\times10^{-15}\,\text{C}$ به $A=1.79\times10^{-11}\,\text{C/m}^2$ می‌رسیم.

نکته: می‌توانیم به روش دیگری نیز شرط یکنواخت بودن میدان را به‌دست آوریم. به این منظور میدان الکتریکی‌ای را که در بالا به‌دست آمد به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r^2}+2\pi A-\frac{2\pi A a^2}{r^2}\right)$$

از اینجا نتیجه می‌گیریم که اگر میدان بخواهد یکنواخت باشد باید جمله‌های اول و سوم داخل پرانتز همدیگر را خنثی کنند. از برابر قرار دادن این دو جمله به همان نتیجه‌ی $A=q/2\pi a^2$ می‌رسیم.

۵۲●● GO شکل ۲۳-۵۷ یک پوسته‌ی کروی با چگالی حجمی بار یکنواخت $\rho=1.84\,\text{nC/m}^3$، شعاع داخلی $a=10.0\,\text{cm}$، و شعاع خارجی $b=2.00a$ را نشان می‌دهد. بزرگی میدان الکتریکی در فاصله‌ی شعاعی (الف) $r=0$، (ب) $r=a/2.00$، (پ) $r=a$، (ت) $r=1.50a$، (ث) $r=b$، و (ج) $r=3.00b$ چقدر است؟

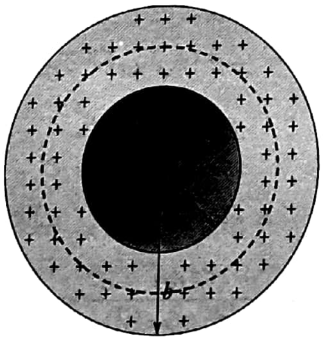


شکل ۲۳-۵۷ مسئله‌ی ۵۲

حل (الف) تا (پ) در ناحیه‌ی $r\le a$، هیچ باری نهفته نیست و در نتیجه $q_{\text{enc}}=0$ است. بنابراین برای محاسبه‌ی میدان الکتریکی در هر نقطه‌ای از این ناحیه اگر سطح گاؤسی کروی هم‌مرکز با پوسته‌ی کروی به شعاع نقطه‌ی مورد نظر اختیار کنیم از قانون گاؤس نتیجه می‌گیریم که $E=0$ است.

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A}=q_{\text{enc}}=0 \quad\Rightarrow\quad E=0$$

(ت) و (ث) سطح گاؤسی کروی هم‌مرکز با پوسته در نظر می‌گیریم، طوری که از داخل پوسته‌ی نارسانا بگذرد.



بار محصورشده در این سطح گاؤسی، تنها ناشی از آن بخشی است که در پوسته‌ی نارسانا قرار دارد.

Scanned by CamScanner

$$q_{enc}=\int_a^r \rho\, dV=\int_a^r \rho(۴\pi r^۲)dr=\rho\frac{۴}{۳}\pi(r^۳-a^۳)$$

و در نتیجه قانون گاؤس، میدان الکتریکی را چنین به‌دست می‌دهد:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A}=q_{enc}/\varepsilon_۰ \;\Rightarrow\; (E)(۴\pi r^۲)=q_{enc}/\varepsilon_۰$$

و از آنجا

$$E=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{q_{enc}}{r^۲}=\frac{\rho}{۴\pi\varepsilon_۰ r^۲}\left(\frac{۴\pi r^۳}{۳}-\frac{۴\pi a^۳}{۳}\right)$$
$$=\frac{\rho}{۳\varepsilon_۰}\frac{r^۳-a^۳}{r^۲}$$

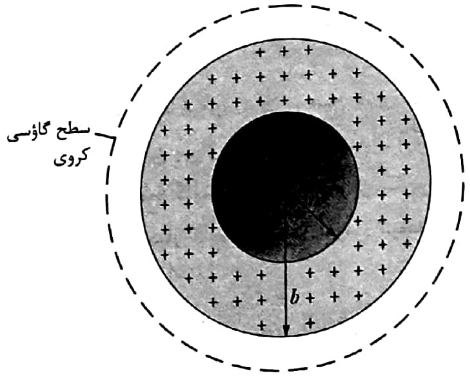
که به‌ازای $r=۱{,}۵۰a$ چنین می‌شود:

$$E=\frac{\rho}{۳\varepsilon_۰}\frac{(۱{,}۵۰a)^۳-a^۳}{(۱{,}۵۰a)^۲}=\frac{\rho a}{۳\varepsilon_۰}\frac{۲{,}۳۷۵}{۲{,}۲۵}$$
$$=\frac{(۱{,}۸۴\times۱۰^{-۹}\,C/m^۳)(۰{,}۱۰۰\,m)}{۳(۸{,}۸۵\times۱۰^{-۱۲}\,C^۲/N\cdot m^۲)}\frac{۲{,}۳۷۵}{۲{,}۲۵}$$
$$=۷{,}۳۲\,N/C$$

و به‌ازای $r=b=۲{,}۰۰a$ خواهیم داشت:

$$E=\frac{\rho}{۳\varepsilon_۰}\frac{(۲{,}۰۰a)^۳-a^۳}{(۱{,}۵۰a)^۲}=\frac{\rho a}{۳\varepsilon_۰}\frac{۷}{۴}$$
$$=\frac{(۱{,}۸۴\times۱۰^{-۹}\,C/m^۳)(۰{,}۱۰۰\,m)}{۳(۸{,}۸۵\times۱۰^{-۱۲}\,C^۲/N\cdot m^۲)}\frac{۷}{۴}=۱۲{,}۱\,N/C$$

(ج) برای $r\geq b$، سطح گاؤسی کروی هم‌مرکز با پوسته‌ی کروی در $r>b$ در نظر می‌گیریم.



در این صورت بار محصورشده در سطح گاؤسی چنین می‌شود:

$$q_{enc}=\int_a^b \rho\, dV=\int_a^b \rho(۴\pi r^۲)dr=\rho\frac{۴}{۳}\pi(b^۳-a^۳)$$

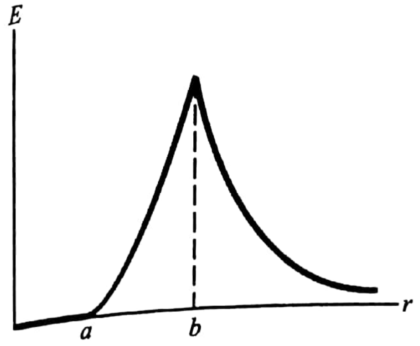
و از آنجا قانون گاؤس، میدان الکتریکی را چنین به‌دست می‌دهد:

$$E=\frac{\rho}{۳\varepsilon_۰}\frac{b^۳-a^۳}{r^۲}$$

که به‌ازای $r=۳{,}۰۰b=۶{,}۰۰a$ چنین می‌شود:

$$E=\frac{\rho}{۳\varepsilon_۰}\frac{(۲{,}۰۰a)^۳-a^۳}{(۶{,}۰۰a)^۲}=\frac{\rho a}{۳\varepsilon_۰}\frac{۷}{۳۶}$$
$$=\frac{(۱{,}۸۴\times۱۰^{-۹}C/m^۳)(۰{,}۱۰۰\,m)}{۳(۸{,}۸۵\times۱۰^{-۱۲}C^۲/N\cdot m^۲)}\frac{۷}{۳۶}=۱{,}۳۵\,N/C$$

تبصره. بد نیست براساس نتایج بالا، به‌طور کیفی میدان الکتریکی را برحسب فاصله رسم کنیم:



۵۳۰۰۰ ILW یک کره‌ی نارسانا به شعاع $R=۵{,}۶۰cm$ دارای توزیع بار ناییکنواختی به چگالی حجمی $\rho=(۱۴{,}۱pC/m^۳)r/R$ است، که r فاصله‌ی شعاعی از مرکز کره است. (الف) بار کلّ کره چقدر است؟ بزرگی E ی میدان الکتریکی در (ب) $r=۰$، (پ) $r=R/۲{,}۰۰$، و (ت) $r=R$ چقدر است؟ (ث) نمودار E برحسب r را رسم کنید.

حل

(الف) برای محاسبه‌ی بار کل، از چگالی بار حجمی روی کل حجم انتگرال می‌گیریم:

$$Q=\int \rho\, dV=۴\pi\int_۰^R \rho r^۲ dr=۴\pi\int_۰^R\left(\frac{\rho_s T}{R}\right)r^۲dr$$
$$=\frac{۴\pi\rho_s}{R}\int_۰^R r^۳dr=\pi\rho_s R^۳$$
$$=\rho(۱۴{,}۱\times۱۰^{-۱۲}C/m^۳)(۰{,}۰۵۶۰m^۳)=۷{,}۷۸\times۱۰^{-۱۵}C$$

(ب) در $r=۰$، چون بار محصورشده برابر صفر است، میدان الکتریکی برابر با صفر می‌شود.

(پ) میدان الکتریکی داخل کره به فاصله‌ی r از مرکز آن با قانون گاؤس به‌دست می‌آید. سطح گاؤسی کروی به شعاع r در نظر می‌گیریم و از آنجا از قانون گاؤس خواهیم داشت:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A}=q_{enc}/\varepsilon_۰ \;\Rightarrow\; E=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{q_{enc}}{r^۲}$$

که در آن q_{enc} برابر است با

$$q_{enc}=۴\pi\int_۰^r \rho r^۲dr=۴\pi\left(\frac{\rho_s}{R}\right)\left(\frac{r^۴}{۴}\right)$$

بنابراین E چنین می‌شود:

$$E=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{\pi\rho_s r^۴}{Rr^۲}=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{\pi\rho_s r^۲}{R}$$

که به‌ازای $r=R/۲{,}۰۰$ که در آن $R=۵{,}۶۰cm$ است، چنین به‌دست می‌دهد:

Scanned by CamScanner

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\pi\rho_s(R/2{,}00)^2}{R}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\pi\rho_s R}{4{,}00}$$

$$=\frac{(8{,}99\times10^9\,\mathrm{N\cdot m^2/C^2})\pi(14{,}1\times10^{-12}\,\mathrm{C/m^3})(0{,}0560\,\mathrm{m})}{4{,}00}$$

$$=5{,}58\times10^{-3}\,\mathrm{N/C}$$

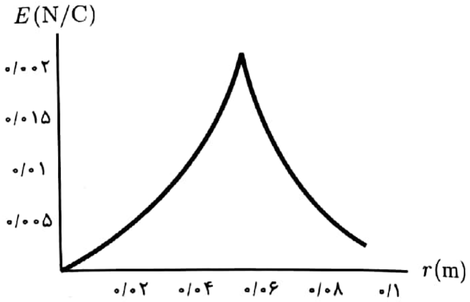
(ت) به‌ازای $r=R$، میدان الکتریکی با استفاده از نتیجه‌ی بالا چنین می‌شود:

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\pi\rho_s R^2}{R}=\frac{\pi\rho_s R}{4\pi\varepsilon_0}$$

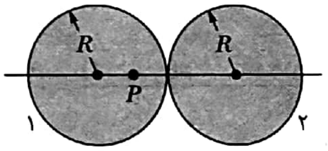
$$=(8{,}99\times10^9)\pi(14{,}1\times10^{-12})(0{,}0560)$$

$$=2{,}23\times10^{-2}\,\mathrm{N/C}$$

(ث) شکل میدان الکتریکی برحسب تابعی از r در پایین رسم شده است:



۵۴●●● شکل ۲۹–۵۸ مقطع دو کره‌ی توپُر را نشان می‌دهد که در سرتاسر حجم آنها بار به‌طور یکنواخت توزیع شده است. شعاع هر یک از کره‌ها برابر با R است. نقطه‌ی P روی خطّ واصل مرکز کره‌ها، به فاصله‌ی شعاعی $R/2{,}00$ از مرکز کره ۱ قرار دارد. اگر میدان الکتریکی خالص در نقطه‌ی P برابر با صفر باشد، نسبت q_2/q_1 بار کلّ q_2ی کره ۲ به بار کلّ q_1 کره ۱ چقدر است؟



شکل ۲۳–۵۸ مسئله‌ی ۵۴

حل میدان الکتریکی داخل یک کره‌ی نارسانا که به‌طور یکنواخت باردار شده است از معادله‌ی ۲۳–۲۰ به‌دست می‌آید (و نیز حل مسئله‌ی ۴۹ را ببینید). بنابراین E_1 چنین می‌شود:

$$E_1=\frac{|q_1|}{4\pi\varepsilon_0 R^3}r_1=\frac{|q_1|}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\left(\frac{R}{2}\right)=\frac{|q_1|}{8\pi\varepsilon_0 R^2}$$

همچنین در بیرون کره‌ی ۲ داریم:

$$E_2=\frac{|q_2|}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{|q_2|}{4\pi\varepsilon_0(1{,}5R)^2}=\frac{|q_2|}{9\pi\varepsilon_0 R^2}$$

با برابر قرار دادن این دو معادله، نسبت بارها را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{q_2}{q_1}=\frac{|9|}{|8|}=1{,}12$$

۵۵●●● یک توزیع بار که دارای تقارنی کروی است ولی به‌طور شعاعی نایکنواخت است، میدانی الکتریکی به بزرگی $E=Kr^4$ را ایجاد می‌کند که جهت آن به‌طور شعاعی از مرکز کره رو به سمت بیرون است. در اینجا r فاصله‌ی شعاعی از مرکز کره، و K یک ثابت است. چگالی حجمی ρی این توزیع بار چقدر است؟

حل سطح گاؤسی کروی هم‌مرکز با توزیع بار به شعاع r در نظر می‌گیریم. آنگاه از قانون گاؤس خواهیم داشت:

$$\varepsilon_0\oint\vec{E}\cdot d\vec{A}=q_{\text{enc}}=\int\rho\,dV$$

$$(\varepsilon_0 Kr^4)(4\pi r^2)=\int_0^r\rho(r)4\pi r^2dr$$

$$\Rightarrow\quad Kr^6\varepsilon_0=\int_0^r\rho(r)r^2dr$$

برای آنکه $\rho(r)$ را به‌دست آوریم باید از طرفین مشتق بگیریم:

$$6Kr^5\varepsilon_0=\rho(r)r^2$$

و از آنجا $\rho(r)$ چنین می‌شود:

$$\rho(r)=6K\varepsilon_0 r^3$$

نکته! خوب است در حالت کلی فرمول مشهوری برای محاسبه‌ی مسائلی از این دست را به‌دست آوریم. در حالت کلی داریم:

$$E(r)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\int_0^r\rho(r)4\pi r^2dr$$

و از آنجا $\rho(r)$ چنین می‌شود:

$$\rho(r)=\frac{\varepsilon_0}{r^2}\frac{d}{dr}\left[r^2E(r)\right]$$

حال اگر هر شکل $E(r)$ را در این رابطه قرار دهیم، $\rho(r)$ مربوط به آن به‌دست می‌آید. البته توجه کنید که این رابطه برای مسائلی با تقارن کروی برقرار است. اگر تقارن مسئله استوانه‌ای باشد با روش مشابهی به $\rho(r)$ زیر می‌رسیم:

$$\rho(r)=\frac{\varepsilon_0}{r}\frac{d}{dr}\left[rE(r)\right]$$

این روابط را می‌توان در حالت کلی‌تر از شکل دیفرانسیلی قانون گاؤس به‌صورت $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\rho/\varepsilon_0$ استنتاج کرد که در آن نماد $\vec{\nabla}$ واگرایی (یا دیورژانس) نام دارد. برای بحث بیشتر و آشنایی با قوانین ماکسول به کتاب‌های الکترومغناطیس از جمله «ریتز ـ میلفورد»، یا «نایفه» رجوع کنید.

مسئله‌های تکمیلی

۵۶ میدان الکتریکی در فضای خاصی $\vec{E}=(x+2)\hat{\mathrm{i}}\,\mathrm{N/C}$ است، که در آن x برحسب متر است. یک سطح گاؤسی استوانه‌ای به شعاع $20\,\mathrm{cm}$ را در نظر بگیرید که هم‌محور با محور x است. یک سر استوانه در $x=0$ قرار دارد. (الف) بزرگی شار الکتریکی عبوری از سرِ دیگر استوانه واقع در $x=2{,}0\,\mathrm{m}$ چقدر است؟ (ب) بار خالص محصورشده در داخل این استوانه چقدر است؟

Scanned by CamScanner

حل (الف) در قاعده‌ی واقع در $x = 2.0\,m$، سوی بردارهای عمود بر سطح و میدان الکتریکی در یک جهت‌اند و بنابراین شار عبوری برابر است با

$$\Phi_2 = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \int E dA\cos 0° = E(x = 2.0\,m)A = [(2.0+2.0)N/C]\pi(0.20\,m)^2 = 0.50\,N\cdot m^2/C$$

(ب) برای محاسبه‌ی بار خالص محصورشده، به شار کلّ عبوری از سطح گاؤسی استوانه‌ای نیاز داریم. بدیهی است که شار عبوری از سطح جانبی استوانه برابر با صفر است، زیرا میدان الکتریکی بر این سطح عمود است. شار عبوری از قاعده‌ی واقع در $x=2.0\,m$ را هم در قسمت الف به‌دست آوردیم. می‌ماند شار عبوری از قاعده‌ی واقع در $x=0$ که به همان ترتیب قسمت الف محاسبه می‌شود. منتها توجه کنید که در اینجا بردار عمود بر سطح در خلاف جهت میدان است ($\theta=180°$) و بنابراین شار عبوری منفی می‌شود و داریم:

$$\Phi_0 = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \int E dA\cos(180°) = -E(x=0)A = -[(0+2.0)N/C]\pi(0.20\,m)^2 \approx -0.25\,N\cdot m^2/C$$

پس شار خالص عبوری از سطح گاؤسی

$$\Phi = \Phi_2 + \Phi_0 \approx 0.25\,N\cdot m^2/C$$

می‌شود. آنگاه از قانون گاؤس، برابر محصور خواهیم داشت:

$$q_{enc} = \varepsilon_0\Phi = (8.85\times10^{-12}\,C^2/N\cdot m^2)(0.25\,N\cdot m^2/C) = 2.2\times10^{-12}\,C = 2.2\,pC$$

۵۷ یک پوسته‌ی کروی فلزی نازک دارای شعاع $25.0\,cm$ و بار $2.00\times10^{-7}\,C$ است. E را در نقطه‌ای (الف) داخل این پوسته، (ب) درست بیرون آن، و (پ) به فاصله‌ی $3.00\,m$ از مرکز به‌دست آورید.

حل (الف) به‌ازای $r<R$ باری در پوسته‌ی کروی محصور نیست و از قانون گاؤس نتیجه می‌گیریم $E=0$ است.

(ب) به‌ازای r کمی بزرگ‌تر از R می‌توانیم به‌طور تقریبی میدان را برابر همان میدان در $r=R$ در نظر بگیریم و با اختیار یک سطح گاؤسی کروی هم‌مرکز با پوسته‌ی کروی به رابطه‌ی زیر برسیم:

$$E_R = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{(8.99\times10^9\,N\cdot m^2/C^2)(2.00\times10^{-7}\,C)}{(0.250\,m)^2} = 2.88\times10^4\,N/C$$

(پ) به‌ازای $r>R$ با اختیار یک سطح گاؤسی کروی هم‌مرکز با پوسته‌ی کروی به شعاع r خواهیم داشت:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} = E_R\left(\frac{R}{r}\right)^2 = (2.88\times10^4\,N/C)\left(\frac{0.250\,m}{3.00\,m}\right)^2 = 200\,N/C$$

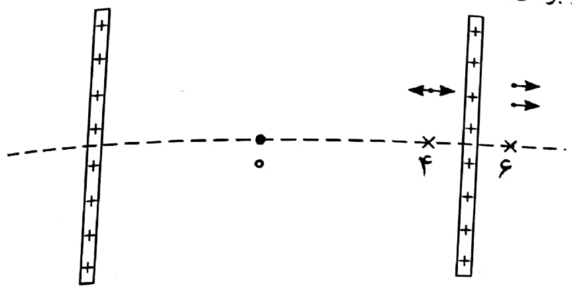
۵۸ روی کلّ صفحه‌ی xy، چگالی بار سطحی یکنواخت $8.0\,nC/m^2$ توزیع شده است. شار الکتریکی عبوری از یک سطح گاؤسی کروی به مرکز مبداء دستگاه مختصات و به شعاع $5.0\,cm$ چقدر است؟

حل از قانون گاؤس داریم

$$\Phi = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma\pi r^2}{\varepsilon_0} = \frac{(8.0\times10^{-9}\,C/m^2)\pi(0.050\,m)^2}{(8.85\times10^{-12}\,C^2/N\cdot m^2)} = 7.1\,N\cdot m^2/C$$

۵۹ بُره‌ای نامتناهی که بین $x=-5.0\,cm$ و $x=+5.0\,cm$ واقع است با باری با چگالی حجمی یکنواخت $\rho=1.2\,nC/m^3$ پر شده است. بزرگی میدان الکتریکی در نقطه‌ای با مختصه‌ی (الف) $x=4.0\,cm$ و (ب) $x=6.0\,cm$ چقدر است؟

حل (الف) در $x=0.040\,m$، میدان الکتریکی خالص [برایند] یک سهم رو به سمت راست $(+x)$ دارد که ناشی از بُره‌ای است که در $x=-0.050\,m$ قرار گرفته، و یک سهم رو به سمت چپ $(-x)$ دارد که ناشی از بُره‌ای است که در $x=0.050\,m$ قرار گرفته است.



میدان الکتریکی حاصل از یک بُرۀ نارسانا با معادله‌ی ۲۳-۱۳ $(E=\sigma/2\varepsilon_0)$ داده می‌شود، که در اینجا $\sigma=q/A=\rho V/A=\rho\Delta x$ است. در نتیجه داریم:

$$E = \frac{\rho(0.090\,m)}{2\varepsilon_0} - \frac{\rho(0.010\,m)}{2\varepsilon_0} = \frac{\rho(0.040\,m)}{\varepsilon_0} = \frac{(1.2\times10^{-9}\,C/m^3)(0.040\,m)}{8.85\times10^{-12}\,C^2/N\cdot m^2} = 5.4\,N/C$$

(ب) در این حالت سهم‌های میدان حاصل از همه‌ی بُره‌ها رو به سمت راست است و بنابراین داریم:

$$E = \frac{\rho(0.090\,m)}{2\varepsilon_0} + \frac{\rho(0.010\,m)}{2\varepsilon_0} = \frac{\rho(0.10\,m)}{2\varepsilon_0} = \frac{(1.2\times10^{-9}\,C/m^3)(0.10\,m)}{2(8.85\times10^{-12}\,C^2/N\cdot m^2)} = 6.8\,N/C$$

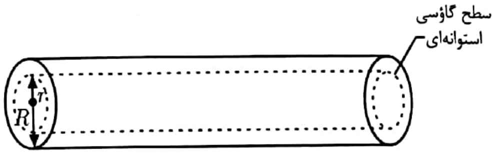
۶۰ *معمای خرده‌های شکلات*. انفجارهای حاصل از تخلیه‌ی بارهای الکتروستاتیکی (جرقه‌ها) موجب خطرهایی جدی در وسایلی می‌شوند که با ریزدانه‌ها و گردها کار می‌کنند. یک‌چنین انفجاری در گرد خرده‌های شکلات یک کارخانه‌ی بیسکویت‌سازی در سال ۱۹۷۰ رخ داد. طبق معمول، کارگران کیسه‌های گردی را که تحویل گرفتند به داخل یک سطلِ بارگیری خالی کردند، و از آنجا نیز گردها از طریق لوله‌های

Scanned by CamScanner

پلاستیکی‌ای که متصل به زمین بودند به یک سیلو، جهت نگهداری و انبار دمیده شدند. در جایی از این مسیر، دو شرط برای وقوع انفجار محقق شد: (۱) بزرگی میدان الکتریکی برابر با 3.0×10^{6} N/C یا بیشتر از آن شد، طوری که فروریزش الکتریکی و در نتیجه تخلیه‌ی جرقه‌ای می‌توانست رخ دهد. (۲) انرژی یک جرقه برابر با ۱۵۰mJ یا بزرگتر از آن شد که این می‌توانست موجب انفجار گرد شود. در اینجا می‌خواهیم نخستین شرط وقوع انفجار در گردهای عبوری از لوله‌های پلاستیکی را بررسی کنیم.

جریانی از گردهای *باردار منفی* را در نظر بگیرید که به داخل یک لوله‌ی استوانه‌ای به شعاع $R=5.0$ cm دمیده شدند. فرض کنید که گرد و بار آن به‌طور یکنواخت در سرتاسر لوله با چگالی حجمی بار ρ پخش شدند. (الف) با استفاده از قانون گاؤس، رابطه‌ای برای بزرگی میدان الکتریکی $\vec{E}$ در لوله برحسب تابعی از فاصله‌ی شعاعی r از مرکز لوله به‌دست آورید. (ب) آیا E با افزایش r، افزایش می‌یابد یا کاهش؟ (پ) آیا جهت $\vec{E}$ به‌طور شعاعی رو به داخل است یا رو به خارج؟ (ت) به‌ازای $\rho=1.1\times10^{-3}$ C/m^3 (یک مقدار نوعی در کارخانه)، بیشینه‌ی E را به‌دست آورید و تعیین کنید که این مقدار بیشینه در کجا رخ می‌دهد. (ث) آیا جرقه می‌توانست رخ دهد و اگر بله، در کجا؟ (این داستان با مسئله‌ی ۷۰ فصل ۲۴ ادامه می‌یابد.)

حل (الف) توجه کنید که لوله‌ی پلاستیکی نارسانا است و بارهای منفی در داخل این لوله‌ی نارسانا توزیع می‌شوند و جهت میدان رو به داخل است. با استفاده از یک سطح گاؤس استوانه‌ای در داخل استوانه و هم‌مرکز با آن خواهیم داشت:



$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = -q_{enc}/\varepsilon_0$$

$$E(2\pi rL) = -\frac{\rho\pi r^2 L}{\varepsilon_0}$$

که در آن r شعاع سطح گاؤس، L ارتفاع لوله و ρ چگالی حجمی بار است. از آنجا E چنین می‌شود:

$$E=-\frac{\rho r}{2\varepsilon_0}$$

علامت منفی سوی رو به داخل میدان را نشان می‌دهد. بزرگی E را می‌توان به‌صورت $|\rho|r/2\varepsilon_0$ نشان داد.

(ب) از رابطه‌ی بالا نتیجه می‌گیریم که بزرگی میدان با افزایش r، افزایش می‌یابد و بیشینه‌اش روی سطح استوانه است.

(پ) همان‌طور که پیشتر خاطرنشان کردیم، چون گردهای باردار منفی هستند، سوی میدان رو به داخل است.

(ت) بیشترین مقدار r که ماده‌ی باردار را دربردارد $r_{max}=R$ می‌شود. بنابراین به‌ازای $|\rho|=0.0011$ C/m^3 و $R=0.050$ m خواهیم داشت:

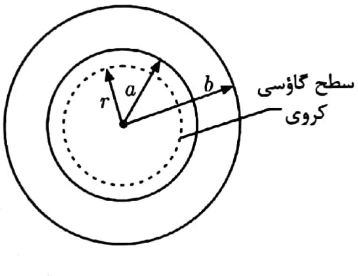
$$|E_{max}|=\frac{|\rho|R}{2\varepsilon_0}=\frac{(1.1\times10^{-3}\,\text{C/m}^3)(5.0\times10^{-2}\,\text{m})}{2(8.85\times10^{-12}\,\text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)}$$

$$=3.1\times10^{6}\ \text{N/C}$$

(ث) همان‌طور که در شرط اول وقوع انفجار در صورت مسئله آمده است، هرگاه بزرگی میدان الکتریکی برابر یا بزرگ‌تر از 3.0×10^{6} N/C باشد، تخلیه‌ی الکتریکی صورت می‌پذیرد. چون بیشینه‌ی میدان الکتریکی بزرگ‌تر از 3.0×10^{6} N/C شده است، بنابراین جرقه می‌تواند رخ دهد.

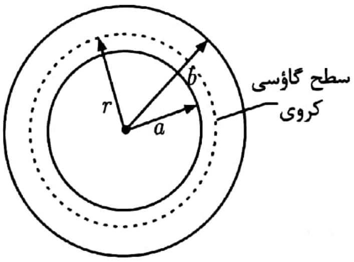
۶۱ یک پوسته‌ی فلزی نازک کروی به شعاع a دارای بار q_a است. هم‌مرکز با این کره، پوسته‌ی فلزی نازک کروی دیگری به شعاع $b>a$ و بار q_a قرار دارد. میدان الکتریکی را در نقاط به فاصله‌ی r از مرکز مشترک آنها به‌دست آورید، به‌طوری که (الف) $r<a$، (ب) $a<r<b$، و (پ) $r>b$ باشد. (ت) قاعده‌ای را شرح دهید که از آن برای تعیین نحوه‌ی توزیع بار روی سطوح داخلی و خارجی پوسته استفاده می‌کنید.

حل (الف) یک سطح گاؤسی کروی در داخل کره‌ی داخلی اختیار می‌کنیم و قانون گاؤس را به‌کار می‌بندیم. چون باری در داخل این سطح محصور نشده است، داریم:



$$\varepsilon_0\oint \vec{E}\cdot d\vec{A}=q_{enc}=0 \quad\Rightarrow\quad E=0$$

(ب) یک سطح گاؤسی کروی در فضای میان دو کره اختیار می‌کنیم و قانون گاؤس را به‌کار می‌بندیم. این دفعه در داخل سطح گاؤس بار q_a قرار گرفته است و بنابراین داریم:

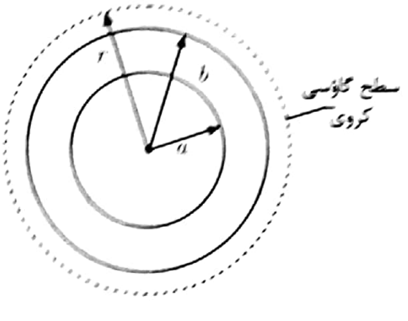


$$\varepsilon_0\oint \vec{E}\cdot d\vec{A}=q_{enc}=q_a$$

$$\varepsilon_0 E(4\pi r^2)=q_a \quad\Rightarrow\quad E=\frac{q_a}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

(پ) یک سطح گاؤسی کروی در فضای خارج دو کره اختیار می‌کنیم و قانون گاؤس را به کار می‌بندیم. این‌بار در داخل سطح گاؤسی بار q_a+q_b قرار گرفته است و بنابراین داریم:

Scanned by CamScanner



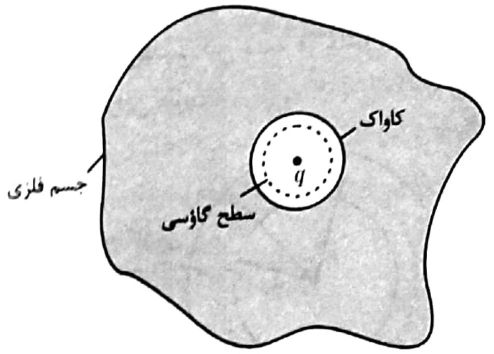
$$\varepsilon_\circ \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = q_{enc} = q_a + q_b$$

$$\varepsilon_\circ E(۴\pi r^۲) = q_a + q_b \Rightarrow E = \frac{q_a + q_b}{۴\pi\varepsilon_\circ r^۲}$$

(ت) بار روی سطح داخلی پوسته‌ی a برابر صفر است، چرا که بار همواره روی سطح خارجی رسانا قرار می‌گیرد. ولی q_a روی پوسته‌ی b اثر می‌گذارد، زیرا اگر سطحی گاؤسی را در دل پوسته‌ی b رسم کنید، از آنجا که میدان داخل پوسته‌ی b باید صفر باشد و بار q_a این صفر بودن میدان را بر هم می‌زند، بنابراین در سطح داخلی پوسته‌ی b باید بار $-q_a$ القأ شود تا مجموع بار خالص موجود در سطح گاؤسی برابر صفر و در نتیجه میدان داخل پوسته‌ی b صفر شود. از طرفی، چون پایستگی بار باید برقرار بماند، روی سطح خارجی پوسته‌ی b بار q_a القاء می‌شود و بنابراین بار کلّ روی پوسته‌ی b برابر $q_a + q_b$ می‌شود که این در هم‌خوانی کامل با نتیجه‌ای است که در قسمت (پ) به‌دست آوردیم.

۶۲ بار نقطه‌ای $q = ۱{,}۰ \times ۱۰^{-۷}\,C$ در مرکز یک کاواک کروی به شعاع $۳{,}۰\,cm$ در یک قطعه‌ی ضخیم فلزی قرار دارد. با استفاده از قانون گاؤس، میدان الکتریکی را در (الف) فاصله‌ی $۱{,}۵\,cm$ از مرکز کاواک و (ب) هر نقطه‌ای داخل فلز، به‌دست آورید.

حل (الف) سطح گاؤسی کروی به شعاع $۱{,}۵\,cm$ به دور بار q واقع در مرکز کاواک در نظر می‌گیریم و قانون گاؤس را به‌کار می‌بندیم.



$$\varepsilon_\circ \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = q_{enc}$$

$$\varepsilon_\circ E(۴\pi r^۲) = q \Rightarrow E = \frac{q}{۴\pi\varepsilon_\circ r^۲}$$

و از آنجا

$$E = \frac{۱{,}۰\times ۱۰^{-۷}\,C}{۴\pi(۸{,}۸۵\times ۱۰^{-۱۲}\,C^۲/N\cdot m^۲)(۱{,}۵\times ۱۰^{-۲}\,m)^۲}$$

$$= ۴{,}۰\times ۱۰^{۶}\,N/C$$

(ب) این‌بار باید سطحی گاؤسی به شکل دلخواه را در دل جسم فلزی (بیرون کاواک) در نظر می‌گیریم. چون پیرامون این سطح در داخل رساناست و میدان داخل رسانا برابر صفر است، بنابراین بدیهی است که باید میدان صفر شود.

ولی اگر بخواهیم مسئله را توجیه کنیم این‌گونه می‌شود که وقتی بار را در داخل کاواک می‌گذاریم، میدانی شعاعی و رو به خارج حاصل از این بار داریم. بر روی دیواره‌ی کاواک آنقدر بار $-q$ القأ می‌شود تا با میدان داخل کاواک برابری کند و در نتیجه بار خالص داخل رسانا صفر، و به تبع آن میدان هم صفر می‌شود. البته در این لحظه برای اینکه پایستگی بار برقرار بماند، بار $+q$ نیز روی سطح خارجی رسانا القأ می‌شود. در هر حال، سطح یک رسانا سطحی هم‌پتانسیل است و میدان روی سطح هم صفر می‌ماند.

۶۳ پروتونی با تندی $v = ۳{,}۰۰\times ۱۰^{۵}\,m/s$ درست بیرون یک کره باردار به شعاع $r = ۱{,}۰۰\,cm$ می‌چرخد. بار روی این کره چقدر است؟

حل نیروی الکتریکی وارد از کره‌ی باردار بر پروتون، نیروی مرکزگرایی را تدارک می‌بینند که موجب حرکت دایره‌ای یکنواخت پروتون می‌شود. طبق قانون دوم نیوتون $F = mv^۲/r$ است که در آن F بزرگی این نیرو، v تندی پروتون و r شعاع چرخش آن است (که همان شعاع کره است). بزرگی نیروی وارد بر پروتون $F = eq/۴\pi\varepsilon_\circ r^۲$ است که در آن q بزرگی بار روی کره است. بنابراین داریم:

$$\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_\circ}\frac{eq}{r^۲} = \frac{mv^۲}{r}$$

و از آنجا q را محاسبه می‌کنیم:

$$q = \frac{۴\pi\varepsilon_\circ mv^۲ r}{e}$$

$$= \frac{(۱{,}۶۷\times ۱۰^{-۲۷}\,kg)(۳{,}۰۰\times ۱۰^{۵}\,m/s)^۲(۰{,}۰۱۰۰\,m)}{(۸{,}۹۹\times ۱۰^{۹}\,N\cdot m^۲/C^۲)(۱{,}۶۰\times ۱۰^{-۹}\,C)}$$

$$= ۱{,}۰۴\times ۱۰^{-۹}\,C$$

نیرو، مرکزگراست و باید رو به داخل، به سمت مرکز کره، باشد و چون پروتون باردار مثبت است، میدان الکتریکی نیز باید رو به داخل باشد. پس بدیهی است که بار روی کره باید منفی باشد: $q = -۱{,}۰۴\times ۱۰^{-۹}\,C = -۱{,}۰۴\,nC$.

۶۴ معادله‌ی ۲۳-۱۱ $(E = \sigma/\varepsilon_\circ)$ میدان الکتریکی را در نقاطی به‌دست می‌دهد که در نزدیکی سطح یک رسانای باردار باشند. این معادله را برای کره رسانایی به شعاع r و بار q به‌کار گیرید، و نشان دهید که میدان الکتریکی در بیرون این کره همان میدان حاصل از یک بار نقطه‌ای است که در مرکز کره قرار گرفته است.

حل پرسش را این‌گونه تعبیر می‌کنیم که میدان "درست" بیرون کره (یعنی مکان‌هایی که تقریباً به شعاع r کره هستند) موردنظر است. چون مساحت کره $A = ۴\pi r^۲$ و چگالی بار سطحی $\sigma = q/A$ (q را مثبت فرض کرده‌ایم) است، خواهیم داشت:

Scanned by CamScanner

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}=\frac{۱}{\varepsilon_0}\left(\frac{q}{۴\pi r^۲}\right)=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^۲}$$

که مانند میدان یک بار نقطه‌ای است.

۶۵ بار Q به‌طور یکنواخت در داخل کره‌ای به شعاع R توزیع شده است. (الف) چه کسری از این بار در داخل شعاع $r=R/۲٫۰۰$ قرار گرفته است؟ (ب) نسبت بزرگی میدان الکتریکی در $r=R/۲٫۰۰$ به مقدار آن در سطح کره چقدر است؟

حل (الف) چون حجم داخل کره‌ی به شعاع $R/۲$ برابر با $\frac{۱}{۸}$ حجم داخل کره‌ی به شعاع R است، بنابراین بار محصور در $۰<r<R/۲$ برابر با $Q/۸$ می‌شود. کسر $\frac{۱}{۸}$ را می‌توان به صورت ۰٫۱۲۵ نیز نشان داد.

(ب) در $r=R/۲$، بزرگی میدان برابر است با

$$E=\frac{Q/۸}{۴\pi\varepsilon_0(R/۲)^۲}=\frac{Q}{۸\pi\varepsilon_0 R^۲}$$

که این برابر با نصف میدان روی سطح کره است. بنابراین نسبت مورد نظر برابر ۰٫۵۰۰ می‌شود.

۶۶ یک بار نقطه‌ای موجب عبور شار الکتریکی $-۷۵۰\,\mathrm{N\cdot m^۲/C}$ از یک سطح گاؤسی به شعاع $۱۰٫۰\,\mathrm{cm}$ می‌شود. (الف) اگر شعاع این سطح گاؤسی دو برابر شود، چقدر شار از این سطح عبور خواهد کرد؟ (ب) مقدار بار نقطه‌ای چقدر است؟

حل (الف) طبق قانون گاؤس، شار عبوری فقط به مقدار بار محصورشده بستگی دارد و بنابراین شار عبوری از سطح تغییری نخواهد کرد و همان $-۷۵۰\,\mathrm{N\cdot m^۲/C}$ می‌شود.

(ب) از $\Phi=q/\varepsilon_0$ برای یافتن q استفاده می‌کنیم:

$$q=\varepsilon_0\Phi=(۸٫۸۵\times۱۰^{-۱۲}\,\mathrm{C^۲/N\cdot m^۲})(-۷۵۰\,\mathrm{N\cdot m^۲/C})$$
$$=-۶٫۶۴\times۱۰^{-۹}\,\mathrm{C}=-۶٫۶۴\,\mathrm{nC}$$

۶۷ میدان الکتریکی در نقطه‌ی P درست بیرون سطح خارجی یک رسانای کروی توخالی به شعاع داخلی $۱۰\,\mathrm{cm}$ و شعاع خارجی $۲۰\,\mathrm{cm}$، دارای بزرگی $۴۵۰\,\mathrm{N/C}$ است و جهت آن رو به بیرون است. وقتی بار نقطه‌ای نامعلوم Q در مرکز این کره قرار داده شود، میدان الکتریکی در نقطه‌ی P همچنان رو به بیرون است ولی اکنون بزرگی آن $۱۸۰\,\mathrm{N/C}$ است. (الف) پیش از قرار دادن Q، چه بار خالصی توسط سطح خارجی کره محصور شده بود؟ (ب) بار Q چقدر است؟ پس از قرار دادن Q، بار روی سطوح (الف) داخلی و (ب) خارجی رسانا چقدر می‌شود؟

حل میدان اولیه (که "درست بیرون سطح خارجی" محاسبه شده است) با معادله‌ی ۲۳-۱۵ $(E=q/۴\pi\varepsilon_0 r^۲)$ به بار q روی رسانای توخالی مربوط می‌شود. پس از آنکه بار Q در مرکز هندسی رسانای توخالی قرار داده شد، میدان نهایی در آن نقطه، طبق اصل برهم‌نهی، ترکیبی از میدان اولیه و میدان ناشی از بار Q می‌شود.

(الف)

$$q=۴\pi\varepsilon_0 r^۲E_i$$
$$=۴\pi(۸٫۸۵\times۱۰^{-۱۲}\,\mathrm{C^۲/N\cdot m^۲})(۰٫۲۰\,\mathrm{m})^۲(۴۵۰\,\mathrm{N/C})$$
$$=+۲٫۰\times۱۰^{-۹}\,\mathrm{C}=+۲٫۰\,\mathrm{nC}$$

(ب)

$$Q=۴\pi\varepsilon_0 r^۲(E_f-E_i)$$
$$=۴\pi(۸٫۸۵\times۱۰^{-۱۲}\,\mathrm{C^۲/N\cdot m^۲})\times(۰٫۲۰\,\mathrm{m})^۲(۱۸۰\,\mathrm{N/C}-۴۵۰\,\mathrm{N/C})$$
$$=-۱٫۲\times۱۰^{-۹}\,\mathrm{C}=-۱٫۲\,\mathrm{nC}$$

(پ) برای آنکه میدان (ناشی از Q) در داخل ماده‌ی رسانا حذف شود، باید بار $-Q$ به‌طور یکنواخت روی سطح داخلی آن توزیع شود. بنابراین پاسخ $+۱٫۲\times۱۰^{-۹}\,\mathrm{C}=+۱٫۲\,\mathrm{nC}$ می‌شود.

(ت) چون بار اضافی کلّ روی رسانا برابر q است و این بار روی سطوح داخلی و خارجی توزیع شده است، بنابراین بار سطح خارجی باید برابر با تفاضل بار کل از بار سطح داخلی باشد. بنابراین پاسخ چنین می‌شود:

$$۲٫۰\times۱۰^{-۹}\,\mathrm{C}-۱٫۲\times۱۰^{-۹}\,\mathrm{C}=+۰٫۸۰\times۱۰^{-۹}\,\mathrm{C}$$

۶۸ شار خالص عبوری از هر وجه یک تاس دارای مقداری از مضرب $۱۰^۳\,\mathrm{N\cdot m^۲/C}$ است که این مضرب دقیقاً برابر با تعداد نقاط N روی هر وجه (۱ تا ۶) است. اگر N فرد باشد، شار به سمت داخل و اگر N زوج باشد، شار به سمت خارج است. بار خالص درون این تاس چقدر است؟

حل $\Phi_0=۱۰^۳\,\mathrm{N\cdot m^۲/C}$ در نظر بگیرید. آنگاه شار خالصی که از کلّ سطح تاس می‌گذرد با رابطه‌ی زیر داده می‌شود:

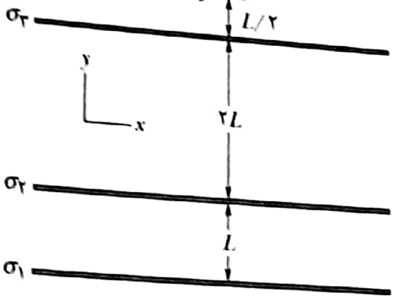
$$\Phi=\sum_{n=۱}^{۶}\Phi_n$$
$$=\sum_{n=۱}^{۶}(-۱)^n n\Phi_0=\Phi_0(-۱+۲-۳+۴-۵+۶)=۳\Phi_0$$

بنابراین بار خالص محصورشده برابر است با

$$q_{\mathrm{enc}}=\varepsilon_0\Phi=۳\varepsilon_0\Phi_0$$
$$=۳(۸٫۸۵\times۱۰^{-۱۲}\,\mathrm{C^۲/N\cdot m^۲})(۱۰^۳\,\mathrm{N\cdot m^۲/C})\hat{\mathbf{j}}$$
$$=(۲٫۶۶\times۱۰^۴\,\mathrm{N/C})\hat{\mathbf{j}}$$

۶۹ شکل ۲۳-۵۹ مقطع سه ورقه‌ی نارسانای بزرگ و نامتناهی را نشان می‌دهد که روی آنها بار به‌طور یکنواخت توزیع شده است. چگالی‌های سطحی بار عبارت‌اند از $\sigma_1=+۲٫۰۰\,\mu\mathrm{C/m^۲}$، $\sigma_۲=+۴٫۰۰\,\mu\mathrm{C/m^۲}$ و $\sigma_۳=-۵٫۰۰\,\mu\mathrm{C/m^۲}$، و فاصله‌ی L برابر با $L=۱٫۵۰\,\mathrm{cm}$ است. برحسب نمادگذاری بردارهای یکه، میدان الکتریکی خالص در نقطه‌ی P چیست؟

Scanned by CamScanner



شکل ۲۳-۵۹ مسئله‌ی ۶۹

حل نکته‌ی مسئله این است که چون میدان‌ها یکنواخت‌اند، محلّ دقیق P هیچ تأثیری در پاسخ ندارد. یعنی فاصله‌ی $L/2$ داده شده در صورت مسئله، نقشی در حلّ آن بازی نمی‌کند. صفحه‌های با بار مثبت، میدان‌های الکتریکی رو به بالا و صفحه‌ی با بار منفی، میدان الکتریکی رو به پایین در بالای صفحه‌ها ایجاد می‌کنند. آنگاه با اختیار سوی مثبت در جهت بالا $(+\hat{j})$ خواهیم داشت:

$$\vec{E} = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}\hat{j} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}\hat{j} + \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}\hat{j}$$

$$= \frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{2\varepsilon_0}\hat{j} = \frac{(2.00+4.00-5.00)(10^{-6}\,\mathrm{C/m^2})}{2(8.85\times10^{-12}\,\mathrm{C^2/N\cdot m^2})}\hat{j}$$

$$= (5.65\times10^{4}\,\mathrm{N/C})\hat{j}$$

۷۰ باری با چگالی حجمی یکنواخت $\rho = 3.2\,\mu\mathrm{C/m^3}$ کره توپُر نارسانایی به شعاع $5.0\,\mathrm{cm}$ را پر کرده است. بزرگی میدان الکتریکی در فاصله‌ی (الف) $3.5\,\mathrm{cm}$ و (ب) $8.0\,\mathrm{cm}$ از مرکز کره چقدر است؟

حل چون توزیع بار یکنواخت است، بار کلّ q را می‌توان از حاصل‌ضرب چگالی حجمی بار ρ در حجم کره $(4\pi r^3/3)$ و به‌ازای $r = R = 0.050\,\mathrm{m}$ به‌دست آوریم.

$$q = \rho V = (3.2\times10^{-6}\,\mathrm{C/m^3})\left(\frac{4\pi}{3}\right)(0.050\,\mathrm{m})^3$$

$$= 1.68\times10^{-9}\,\mathrm{C}$$

(الف) با به‌کار بردن معادله‌ی ۲۳-۲۰ کتاب (یا حل مسئله ۴۹ را ببینید) به‌ازای $r = 0.035\,\mathrm{m}$ داریم:

$$E_{\text{داخل}} = \frac{|q|}{4\pi\varepsilon_0 R^3}r$$

$$= \frac{(8.99\times10^{9}\,\mathrm{N\cdot m^2/C^2})(1.68\times10^{-9}\,\mathrm{C})}{(0.050\,\mathrm{m})^3}(0.035\,\mathrm{m})$$

$$= 4.2\times10^{3}\,\mathrm{N/C}$$

(ب) در بیرون کره (به‌ازای $(r = 0.080\,\mathrm{m})$) داریم:

$$E_{\text{خارج}} = \frac{|q|}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{(8.99\times10^{9}\,\mathrm{N\cdot m^2/C^2})(1.68\times10^{-9}\,\mathrm{C})}{(0.080\,\mathrm{m})^2}$$

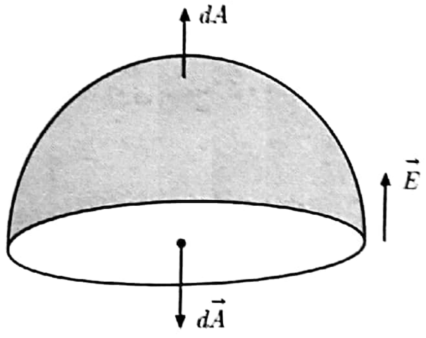
$$= 2.4\times10^{3}\,\mathrm{N/C}$$

سطح، هیچ بار خالصی را محصور نکرده است. در قاعده‌ی (تخت) این سطح، میدان عمود بر این سطح، و به سمت آن است. شار عبوری از (الف) قاعده و (ب) بخش خمیده‌ی سطح چقدر است؟

حل این سطح گاؤسی از دو سطح باز، یکی قاعده (تخت) و دیگری سطح جانبی (خمیده) تشکیل شده است. چون هیچ باری در این سطح گاؤسی محصور نشده است، طبق قانون گاؤس داریم:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \oint_{\text{تخت}} \vec{E}\cdot d\vec{A} + \oint_{\text{خمیده}} \vec{E}\cdot d\vec{A} = q_{\text{enc}} = 0$$

بردارهای عمود بر سطح بخش‌های تخت و خمیده در خلاف جهت هم است و بنابراین همان‌طور که انتظار داریم شار عبوری از این دو سطح از لحاظ بزرگی برابر و از لحاظ جهت در خلاف یکدیگر است.



بنابراین برای بزرگی شارها داریم:

$$|\Phi_E| = EA = E(\pi R^2) = (2.50\,\mathrm{N/C})\pi(5.68\times10^{-2}\,\mathrm{m})^2$$

$$= 2.53\times10^{-2}\,\mathrm{N\cdot m^2/C}$$

توجه کنید که از مساحت قاعده‌ی تخت استفاده کردیم، ولی چون شار خالص برابر صفر است، بزرگی شار عبوری از قسمت خمیده هم همین مقدار می‌شود. حال با توجه به شکل بالا، پاسخ‌ها به ترتیب چنین می‌شوند:

(الف) $\vec{E}$ و $d\vec{A}$ در خلاف جهت هم هستند و بنابراین $\Phi_E = -2.53\times10^{-2}\,\mathrm{N\cdot m^2/C^2}$ می‌شود.

(ب) $\vec{E}$ و $d\vec{A}$ در جهت یکدیگرند و بنابراین $\Phi_E = +2.53\times10^{-2}\,\mathrm{N\cdot m^2/C^2}$ می‌شود.

۷۲ چه بار خالصی توسط مکعب گاؤسی مسئله‌ی ۲ محصور شده است.

حل شار کل عبوری را $\Phi_E = -48\,\mathrm{N\cdot m^2/C^2}$ به‌دست آوردیم. حال از قانون گاؤس خواهیم داشت:

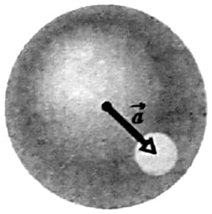
$$q = \varepsilon_0\Phi_E = (8.85\times10^{-12}\,\mathrm{C^2/N\cdot m^2})(-48\,\mathrm{N\cdot m^2/C^2})$$

$$= -4.24\times10^{-10}\,\mathrm{C}$$

۷۳ یک کره‌ی توپُر نارسانا دارای چگالی حجمی بار یکنواخت ρ است. $\vec{r}$ را برداری در نظر بگیرید که از مرکز کره به سمت نقطه‌ی

Scanned by CamScanner

دلخواه P درداخل کره است. (الف) نشان دهید میدان الکتریکی در نقطه‌ی P با $\vec{E}=\rho\vec{r}/3\varepsilon_0$ داده می‌شود. (توجه کنید که این نتیجه مستقل از شعاع کره است.) (ب) یک کاواک کروی، مانند شکل ۲۳-۶۰ در داخل این کره ایجاد شده است. با استفاده از مفاهیم برهم‌نهی نشان دهید که میدان الکتریکی در همه‌ی نقاط داخل این کاواک، یکنواخت و برابر با $\vec{E}=\rho\vec{a}/3\varepsilon_0$ است، که در آن $\vec{a}$ بردار مکان از مرکز کره به سمت مرکز کاواک است.



شکل ۲۳-۶۰ مسئله‌ی ۷۳

حل (الف) یک سطح گاؤسی کروی هم‌مرکز با کره‌ی نارسانا و به شعاع r اختیار می‌کنیم و قانون گاؤس را به‌کار می‌بندیم:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A}=q_{enc}/\varepsilon_0$$

$$E(4\pi r^2)=\left(\rho\int_0^r 4\pi r^2 dr\right)/\varepsilon_0$$

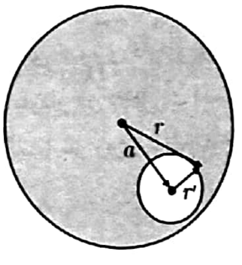
$$E(4\pi r^2)=\frac{\rho\pi}{3\varepsilon_0}r^3$$

و از آنجا $E=\rho r/3\varepsilon_0$ می‌شود. این میدان در راستای شعاع و بردار یکه‌ی $\hat{\mathbf{r}}$ است. بنابراین داریم:

$$\vec{E}=\frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\hat{\mathbf{r}}=\left(\frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\right)\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)=\frac{\rho\vec{r}}{3\varepsilon_0}$$

(ب) در اینجا باید از اصل برهم‌نهی استفاده کنیم. به عبارتی دیگر داریم:

میدان حفره‌ی توپر − میدان کره = میدان داخل حفره



براساس نتیجه‌ای که در قسمت الف به‌دست آوردیم، میدان داخل کره به فاصله‌ی r چنین می‌شود:

$$\vec{E}_1=\frac{\rho\vec{r}}{3\varepsilon_0}$$

چون حفره‌ی توپُر هم یک کره‌ی نارساناست، میدان داخل حفره‌ای به شعاع $\vec{r}'$، در همان نقطه چنین می‌شود:

$$\vec{E}_2=\frac{\rho\vec{r}'}{3\varepsilon_0}$$

پس برای میدان داخل حفره داریم:

$$\vec{E}=\vec{E}_1-\vec{E}_2=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\vec{r}-\vec{r}')=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{a}$$

که در آن از جمع از برداری شکل استفاده کردیم.

۷۴ چگالی بار یکنواخت $500\,\mathrm{nC/m^3}$ در سرتاسر یک حجم کروی به شعاع $6{,}00\,\mathrm{cm}$ توزیع شده است. یک سطح گاؤسی مکعبی را در نظر بگیرید که مرکز آن بر مرکز این کره قرار دارد. شار الکتریکی عبوری از این سطح مکعبی چقدر است، در صورتی که طول هر ضلع آن (الف) $4{,}00\,\mathrm{cm}$ و (ب) $14{,}0\,\mathrm{cm}$ باشد؟

حل (الف) مکعب کاملاً داخل حجم کروی است و بنابراین بار محصور شده برابر است با

$$q_{enc}=\rho V_{مکعب}=(500\times10^{-9}\,\mathrm{C/m^3})(0{,}0400\,\mathrm{m})^3$$
$$=3{,}20\times10^{-11}\,\mathrm{C}$$

آنگاه با استفاده از قانون گاؤس درمی‌یابیم:

$$\Phi=\frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}=\frac{3{,}20\times10^{-11}\,\mathrm{C}}{8{,}85\times10^{-12}\,\mathrm{C^2/N\cdot m^2}}=3{,}62\,\mathrm{N\cdot m^2/C}$$

(ب) اکنون کره کاملاً داخل مکعب قرار گرفته است (توجه کنید شعاع کره کوچک‌تر از نصف طول جانبی مکعب است). بنابراین بار کل برابر است با

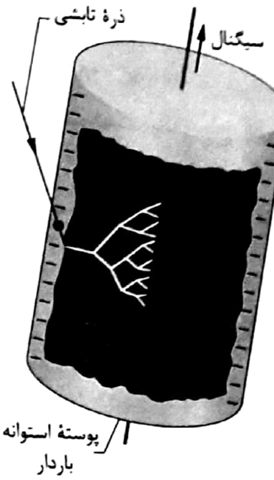
$$q_{enc}=\rho V_{کره}=(500\times10^{-9}\,\mathrm{C/m^3})4\pi(0{,}0600\,\mathrm{m})^3/3$$
$$=4{,}52\times10^{-10}\,\mathrm{C}$$

آنگاه با استفاده از قانون گاؤس درمی‌یابیم:

$$\Phi=\frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}=\frac{4{,}52\times10^{-10}\,\mathrm{C}}{8{,}85\times10^{-12}\,\mathrm{C^2/N\cdot m^2}}=51{,}1\,\mathrm{N\cdot m^2/C}$$

۷۵ شکل ۲۳-۶۱ یک شمارنده‌ی *گایگر*[1] را نشان می دهد که وسیله‌ای برای آشکارسازی تابش‌های یونیده‌ای است که موجب یونیده شدن اتم‌ها می‌شوند. یک سیم مرکزی باردار مثبتِ نازک توسط یک پوسته‌ی استوانه‌ای رسانا و هم‌مرکز که دارای باری مساوی ولی با علامت منفی است در بر گرفته شده است، و این موجب یک میدان الکتریکی شعاعی قوی می‌شود. پوسته حاوی یک گاز خنثای کم‌فشار است. وقتی یک ذره‌ی تابشی از طریق دیواره‌ی پوسته وارد این وسیله شود، تعدادی از اتم‌های گاز را یونیده می‌کند. در نتیجه، الکترون‌های آزاد (e) به سمت سیم مثبت کشیده می‌شوند. ولی، میدان الکتریکی به حدّی قوی است که الکترون‌های آزاد در بین برخورد با اتم‌های گاز، انرژی‌ای کافی برای یونیده کردن اتم‌های دیگر نیز به‌دست می‌آورند. بنابراین الکترون‌های آزاد بیشتری ایجاد می‌شوند و این فرایند تا هنگام رسیدن الکترون‌ها به سیم ادامه می‌یابد. این "بهمن" حاصل از الکترون‌های آزاد توسط سیم جمع‌آوری می‌شود و سیگنالی به وجود می‌آورد که برای ثبت عبور ذره‌ی اولیه‌ی تابش به‌کار می‌رود. فرض کنید که شعاع سیم مرکزی $25\,\mu\mathrm{m}$، شعاع داخلی پوسته $1{,}4\,\mathrm{cm}$، و بلندی پوسته $16\,\mathrm{cm}$ باشد. اگر میدان الکتریکی روی دیواره‌ی داخل پوسته $2{,}9\times10^4\,\mathrm{N/C}$ باشد، بار مثبت کلّ روی سیم مرکزی چقدر است؟

[1] Geiger



شکل ۲۳-۶۱ مسئله‌ی ۷۵

حل سطح گاؤسی استوانه‌ای به دور سیم مرکزی و هم‌محور با آن در نظر می‌گیریم و قانون گاؤس را به کار می‌بندیم. چون بزرگی میدان روی دیواره‌ی استوانه معلوم است، شعاع سطح گاؤسی را دقیقاً برابر با شعاع R استوانه می‌گیریم. جداره‌ی داخلی استوانه بدون بار است و بنابراین بار محصور شده در این سطح گاؤسی، همان بار سیم مرکزی می‌شود. آنگاه از قانون گاؤس خواهیم داشت:

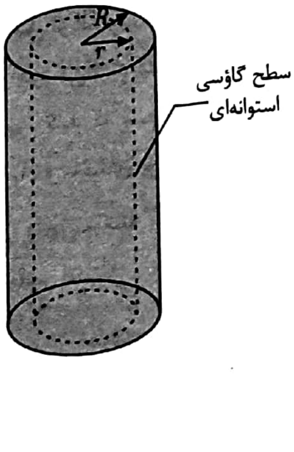
$$q_{enc} = \varepsilon_\circ \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \varepsilon_\circ (E)(۲\pi RL) = ۲\pi\varepsilon_\circ RLE$$
$$= ۲\pi(۸{,}۸۵\times۱۰^{-۱۲}\,C^۲/N\cdot m^۲)(۰{,}۰۱۴m)(۰{,}۱۶m)(۲{,}۹\times۱۰^۴\,N/C)$$
$$= ۳{,}۶\times۱۰^{-۹}\,C = ۳{,}۶nC$$

۷۶ باری به‌طور یکنواخت در سرتاسر حجم یک استوانه‌ی توپُر به طول نامتناهی و شعاع R پخش شده است. (الف) نشان دهید که در فاصله‌ی $r<R$ از محور استوانه

$$E = \frac{\rho r}{۲\varepsilon_\circ}$$

است که ρ چگالی حجمی بار است. (ب) رابطه‌ای برای E به‌ازای $r>R$ بنویسید.

حل (الف) سطح گاؤسی استوانه‌ای هم‌مرکز با استوانه و به شعاع r در داخل استوانه در نظر می‌گیریم و قانون گاؤس را به‌کار می‌بندیم. چگالی بار مثبت و بنابراین میدان به‌طور شعاعی رو به بیرون است و هیچ شاری از دو قاعده نمی‌گذرد.



اکنون از قانون گاؤس داریم:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = q_{enc}/\varepsilon_\circ$$

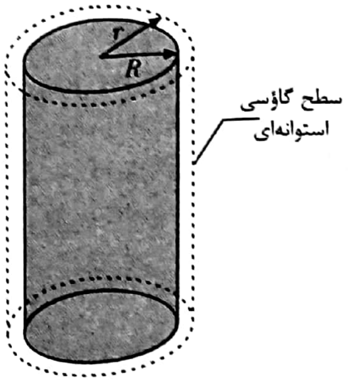
که در آن q_{enc} بار محصور شده در سطح گاؤسی است. از طرفی

$$q_{enc} = \int \rho dV = \rho\int dV = \rho V = \rho\pi r^۲ L$$

در نتیجه قانون گاؤس چنین به‌دست می‌دهد:

$$(E_{\text{داخل}})(۲\pi rL) = (\rho\pi r^۲ h)/\varepsilon_\circ \quad\Rightarrow\quad E_{\text{داخل}} = \frac{\rho r}{۲\varepsilon_\circ}$$

(ب) این بار سطح گاؤسی را بیرون استوانه‌ی باردار در نظر می‌گیریم.



توجه کنید که بار محصورشده در سطح گاؤسی برابر با بار داخل استوانه است و بنابراین داریم:

$$q_{enc} = \rho V = \rho\pi R^۲ L$$

و بنابراین قانون گاؤس چنین به‌دست می‌دهد:

$$(E_{\text{خارج}})(۲\pi rh) = (\rho\pi R^۲ L)/\varepsilon_\circ$$

و از آنجا

$$E_{\text{خارج}} = \frac{\rho R^۲}{۲\varepsilon_\circ r}$$

۷۷ یک پوسته‌ی رسانای کروی دارای بار $-۱۴\mu C$ روی سطح خارجی خود و یک ذره‌ی باردار در داخل آن است. اگر بار خالص روی پوسته $-۱۰\mu C$ باشد، (الف) بار روی سطح داخلی پوسته و (ب) بار ذره چقدر است؟

حل (الف) برای آنکه بار خالص $-۱۰\mu C$ را داشته باشیم هنگامی که بار $-۱۴\mu C$ روی سطح خارجی توزیع شده است، باید بار $+۴{,}۰\mu C$ روی سطح داخلی توزیع شده باشد، زیرا در حالت تعادل الکتروستاتیکی، بارها روی سطوح یک رسانا قرار می‌گیرند.

(ب) برای آنکه میدان الکتریکی داخل ماده‌ی رسانا صفر بماند، باید میدان ناشی از بار $+۴\mu C$ روی سطح داخلی توسط میدان حاصل از ذره‌ی باردار داخل حفره خنثی شود. بنابراین بار ذره $-۴{,}۰\mu C$ است.

۷۸ بار $۶{,}۰۰pC$ به‌طور یکنواختی در سرتاسر حجم کره‌ای به شعاع $r = ۴{,}۰۰cm$ پخش شده است. بزرگی میدان الکتریکی در فاصله‌ی شعاعی (الف) $۶{,}۰۰cm$ و (ب) $۳{,}۰۰cm$ چقدر است؟

Scanned by CamScanner

حل (الف) در بیرون کره با اختیار یک سطح گاؤسی کروی هم‌مرکز با کره خواهیم داشت:

$$E=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{q}{r^۲}=(۸/۹۹\times۱۰^۹ \mathrm{N\cdot m^۲/C^۲})\frac{(۶/۰۰\times۱۰^{-۱۲}\mathrm{C})}{(۰/۰۶۰۰\mathrm{m})^۲}$$
$$=۱۵/۰\mathrm{N/C}$$

(ب) در داخل کره‌ی رسانا با اختیار یک سطح گاؤسی کروی هم‌مرکز با کره در داخل آن به معادله‌ی ۲۳-۲۰ می‌رسیم (و نیز حل مسئله ۴۹ را ببینید). آنگاه به‌ازای $R=۴/۰۰\mathrm{cm}$ خواهیم داشت:

$$E=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{qr}{R^۳}$$
$$=(۸/۹۹\times۱۰^۹\mathrm{N\cdot m^۲/C^۲})\frac{(۶/۰۰\times۱۰^{-۱۲}\mathrm{C})(۰/۰۳۰۰\mathrm{m})}{(۰/۰۴۰۰\mathrm{m})^۳}$$
$$=۲۵/۳\mathrm{N/C}$$

۷۹ آبی در یک نهر آبیاری به پهنای $w=۳/۲۲\mathrm{m}$ و عمق $d=۱/۰۴\mathrm{m}$، با تندی $۰/۲۰۷\mathrm{m/s}$ در جریان است. *شار جرمی* آب عبوری از یک سطح مجازی برابر با حاصلضرب چگالی آب ($۱۰۰۰\mathrm{kg/m^۳}$) در شار حجمی عبوری از آن سطح است. شار جرمی عبوری از سطح‌های مجازی زیر را تعیین کنید: (الف) سطحی به مساحت wd که کاملاً در داخل آب قرار دارد و عمود بر جریان آن است؛ (ب) سطحی به مساحت $۳wd/۲$ که به اندازه‌ی wd در داخل آب قرار دارد و عمود بر جریان آن است؛ (پ) سطحی به مساحت $wd/۲$، که کاملاً در داخل آب قرار دارد و عمود بر جریان آن است؛ (ت) سطحی به مساحت wd، که نیمی از آن داخل آب و نیم دیگر آن در خارج آب قرار دارد و عمود بر جریان آن است؛ (ث) سطحی به مساحت wd که کاملاً داخل آب قرار دارد و بردار عمود بر سطح آن با جهت جریان آب زاویه‌ی $۳۴/۰^\circ$ می‌سازد.

حل (الف) شار جرمی برابر است با

$$wd\rho v=(۳/۲۲\mathrm{m})(۱/۰۴\mathrm{m})(۱۰۰۰\mathrm{kg/m^۳})(۰/۲۰۷\mathrm{m/s})$$
$$=۶۹۳\mathrm{kg/s}$$

(ب) چون آب فقط از سطح wd شارش می‌یابد، شار عبوری از سطح بزرگ‌تر همچنان $۶۹۳\mathrm{kg/s}$ است.

(پ) اکنون شار جرمی برابر است با

$$(wd/۲)\rho v=(۶۹۳\mathrm{kg/s})/۲=۳۴۷\mathrm{kg/s}$$

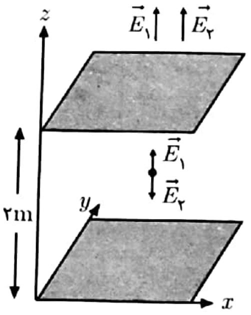
(ت) چون آب از سطح $wd/۲$ شارش می‌یابد، شار جرمی برابر با $۳۴۷\mathrm{kg/s}$ است.

(ث) اکنون شار جرمی برابر است با

$$(wd\cos\theta)\rho v=(۶۹۳\mathrm{kg/s})(\cos ۳۴/۰^\circ)=۵۷۵\mathrm{kg/s}$$

۸۰ باری با چگالی سطحی یکنواخت $۸/۰۰\mathrm{nC/m^۲}$ روی کل صفحه‌ی xy توزیع شده است؛ باری با چگالی سطحی یکنواخت $۳/۰۰\mathrm{nC/m^۲}$ روی صفحه‌ای موازی که با $z=۲/۰۰\mathrm{m}$ تعریف شده، توزیع شده است. بزرگی میدان الکتریکی را در هر نقطه‌ای با مختصه‌ی z (الف) $۱/۰۰\mathrm{m}$ و (ب) $۳/۰۰\mathrm{m}$ تعیین کنید.

حل شکل تقریبی مسئله (ابعاد صفحه‌ی xy را برای رسم، محدود گرفته‌ایم) چنین می‌شود:



توجه کنید که سطوح نامحدودند و بنابراین فاصله‌های داده شده در مسئله فقط داخل یا خارج صفحات بودن را نشان می‌دهد. بنابراین به‌ازای $z=۱/۰۰\mathrm{m}$ باید میدان داخل صفحه‌ها و به‌ازای $z=۳/۰۰\mathrm{m}$ باید میدان خارج صفحه‌ها را به‌دست آوریم. اگر میدان حاصل از صفحه‌ی پایینی را $\vec{E}_۱$ و میدان حاصل از صفحه‌ی بالایی را $\vec{E}_۲$ بنامیم، شکل خطوط میدان در فضای داخل صفحه‌ها و خارج آنها مطابق شکل بالا می‌شود. میدان حاصل از یک صفحه‌ی نارسانای نامتناهی را در متن درس به دست آورده‌ایم که برابر با $\sigma/۲\varepsilon_۰$ است. بنابراین از اصل برهم‌نهی خواهیم داشت:

(الف)

$$\vec{E}_{\text{داخل}}=\vec{E}_۱-\vec{E}_۲=\frac{\sigma_۱}{۲\varepsilon_۰}\hat{\mathbf{j}}-\frac{\sigma_۲}{۲\varepsilon_۰}\hat{\mathbf{j}}=\frac{\sigma_۱-\sigma_۲}{۲\varepsilon_۰}\hat{\mathbf{j}}$$

که بزرگی آن چنین می‌شود:

$$E_{\text{داخل}}=\frac{\sigma_۱-\sigma_۲}{۲\varepsilon_۰}=\frac{۸/۰۰\times۱۰^{-۹}\mathrm{C/m^۲}-۳/۰۰\times۱۰^{-۹}\mathrm{C/m^۲}}{۲(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲}\mathrm{C^۲/N\cdot m^۲})}$$
$$=۲/۸۲\times۱۰\mathrm{N/C}=۰/۲۸۲\mathrm{kN/C}$$

(ب)

$$\vec{E}_{\text{خارج}}=\vec{E}_۱+\vec{E}_۲=\frac{\sigma_۱}{۲\varepsilon_۰}\hat{\mathbf{j}}+\frac{\sigma_۲}{۲\varepsilon_۰}\hat{\mathbf{j}}=\frac{\sigma_۱+\sigma_۲}{۲\varepsilon_۰}\hat{\mathbf{j}}$$

که بزرگی آن چنین می‌شود:

$$E_{\text{خارج}}=\frac{\sigma_۱+\sigma_۲}{۲\varepsilon_۰}=\frac{۸/۰۰\times۱۰^{-۹}\mathrm{C/m^۲}+۳/۰۰\times۱۰^{-۹}\mathrm{C/m^۲}}{۲(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲}\mathrm{C^۲/N\cdot m^۲})}$$
$$=۶/۲۱\times۱۰^۲\mathrm{N/C}=۰/۶۲۱\mathrm{kN/C}$$

توجه **توجه کنید که اگر چگالی بار صفحه‌ها دارای علامت مخالف باشد، میدان الکتریکی در میان صفحه‌ها با هم جمع و در بیرون صفحه‌ها از هم کم می‌شود.**

۸۱ یک گوی کروی از ذرات باردار، چگالی بار یکنواختی دارد. بر حسب شعاع R گوی، در چه فاصله‌ی شعاعی (الف) در داخل و (ب) در

Scanned by CamScanner

خارج این گوی، بیشینه‌ی میدان الکتریکی برابر با $\frac{۱}{۴}$ بزرگی بیشینه‌ی آن میدان است؟

حل (الف) بیشینه‌ی میدان روی سطح خارجی کره حاصل می‌شود:

$$E_{\max}=\left(\frac{|q|}{۴\pi\varepsilon_\circ r^{۲}}\right)_{r=R}=\frac{|q|}{۴\pi\varepsilon_\circ R^{۲}}$$

از طرفی طبق معادله‌ی ۲۳-۲۰ (و نیز حل مسئله ۴۹ را ببینید) میدان داخل یک کره‌ی نارسانای باردرا یکنواخت برابر است با:

$$E_{\text{داخل}}=\frac{|q|}{۴\pi\varepsilon_\circ R^{۳}}r$$

برای آنکه $E_{\text{داخل}}=E_{\max}/۴$ باشد باید $r=R/۴=۰/۲۵R$ باشد.

(ب) در بیرون کره‌ی ۲ داریم:

$$E_{\text{خارج}}=\frac{|q|}{۴\pi\varepsilon_\circ r^{۲}}=\frac{۱}{۴}E_{\max}$$

و از آنجا $r=۲/۰R$ می‌شود.

Scanned by CamScanner

فصل بیست و چهارم

پتانسیل الکتریکی

بخش ۲۴-۱ پتانسیل الکتریکی

۱● یک باتری ۱۲V اتومبیل می‌تواند از طریق یک مدار، بار کلِ ۸۴A·h (۸۴ آمپر-ساعت) را از پایانه‌ای به پایانه‌ی دیگر باتری بفرستد. (الف) این بار نشان‌دهنده‌ی چند کولن است؟ (*راهنمایی:* معادله‌ی ۲۱-۳ را ببینید.) (ب) اگر کلِ این بار تحت اختلاف پتانسیل ۱۲V قرار گیرد، چقدر انرژی منتقل شده است؟

حل (الف) یک آمپر برابر با یک کولن بر ثانیه است. بنابراین داریم:

$$۸۴ = \left(۸۴\frac{C\cdot h}{s}\right)\left(۳۶۰۰\frac{s}{h}\right) = ۳٫۰\times۱۰^{۵}C$$

(ب) تغییر در انرژی پتانسیل برابر است با

$$\Delta U = q\Delta V = (۳٫۰\times۱۰^{۵}C)(۱۲V) = ۳٫۶\times۱۰^{۶}J$$

۲● اختلاف پتانسیل الکتریکی میان سطح زمین و ابر در یک توفان تندری خاص برابر با $۱٫۲\times۱۰^{۹}V$ است. برحسب الکترون-ولت، بزرگی تغییر در انرژی پتانسیل الکترونی که میان زمین و ابر حرکت کند، چقدر است؟

حل اختلاف پتانسیل الکتریکی ΔV بین هر دو نقطه در یک میدان الکتریکی برابر است با اختلاف انرژی پتانسیل بر واحد بار بین این دو نقطه. بنابراین داریم:

$$\Delta U = q\Delta V = (۱e)(۱٫۲\times۱۰^{۹}V) = ۱٫۲\times۱۰^{۹}eV = ۱٫۲GeV$$

۳● فرض کنید در یک آذرخش اختلاف پتانسیل بین ابر و سطح زمین $۱٫۰\times۱۰^{۹}V$ و مقدار بار منتقل شده ۳۰C است. (الف) تغییر انرژی حاصل از این انتقال بار چقدر است؟ (ب) اگر همه‌ی این انرژی آزاد شده را بتوان برای شتاب دادن یک اتومبیل ۱۰۰۰ کیلوگرمی ساکن به کار برد، تندی نهایی آن چقدر خواهد شد؟

حل (الف) تغییر انرژی حاصل از انتقال بار برابر است با

$$\Delta U = q\Delta V = (۳۰C)(۱٫۰\times۱۰^{۹}V) = ۳٫۰\times۱۰^{۱۰}J$$

(ب) اگر همه‌ی این انرژی را بتوان برای شتاب دادن به یک اتومبیل ۱۰۰۰ کیلوگرمی در حال سکون به کار برد، آنگاه پایستگی انرژی حکم می‌کند که $\Delta U = K = \frac{۱}{۲}mv^{۲}$ باشد و بنابراین تندی نهایی اتومبیل چنین می‌شود:

$$v = \sqrt{\frac{۲K}{m}} = \sqrt{\frac{۲\Delta U}{m}} = \sqrt{\frac{۲(۳٫۰\times۱۰^{۱۰}J)}{۱٫۰\times۱۰^{۳}kg}}$$
$$= ۷٫۷\times۱۰^{۳}m/s$$

بخش ۲۴-۲ سطوح هم‌پتانسیل و میدان الکتریکی

۴● دو صفحه‌ی رسانای موازی و بزرگ که به فاصله‌ی ۱۲cm از هم قرار دارند، دارای بارهایی با بزرگی مساوی و علامت مخالف روی سطح‌های مقابل هم‌اند. یک نیروی الکتروستاتیکی به بزرگی $۳٫۹\times۱۰^{-۱۵}N$ بر الکترونی وارد می‌شود که در جایی بین این دو صفحه قرار گرفته است. (از اثر لبه‌ها چشم‌پوشی کنید.) (الف) میدان الکتریکی را در مکان الکترون پیدا کنید. (ب) اختلاف پتانسیل میان صفحه‌ها چقدر است؟

حل (الف) طبق تعریف میدان الکتریکی داریم:

$$E = \frac{F}{e} = \frac{۳٫۹\times۱۰^{-۱۵}N}{۱٫۶۰\times۱۰^{-۱۹}C} = ۲٫۴\times۱۰^{۳}N/C$$

(ب) اختلاف پتانسیل دو صفحه چنین می‌شود:

$$\Delta V = E\Delta s = (۲٫۴\times۱۰^{۳}N/C)(۰٫۱۲m) = ۲٫۹\times۱۰^{۳}V$$

۵● یک ورقه‌ی نارسانای نامتناهی دارای باری با چگالی سطحی $\sigma = ۰٫۱۰\mu C/m^{۲}$ روی یک طرف خود است. سطوح هم‌پتانسیلی که به اندازه‌ی ۵۰V اختلاف پتانسیل دارند، در چه فاصله‌ای از هم قرار گرفته‌اند؟

حل میدان الکتریکی ایجاد شده توسط یک ورقه‌ی نارسانای نامتناهی دارای بار بزرگی $E = \sigma/۲\varepsilon_{۰}$ است که σ چگالی سطحی بار است. این میدان عمود بر ورقه و یکنواخت است. مبدأ دستگاه مختصات را روی ورقه قرار دهید و محور x را موازی و سوی مثبت آن را در جهت میدان اختیار کنید. آنگاه پتانسیل الکتریکی چنین می‌شود:

$$V = V_{۰} - \int_{۰}^{x} E\,dx = V_{۰} - Ex$$

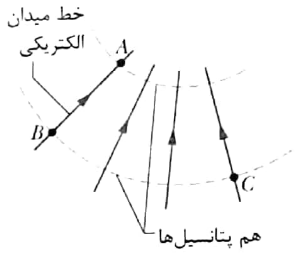
Scanned by CamScanner

که $V_۰$ پتانسیل روی ورقه است. سطوح هم‌پتانسیل، سطوحی با x ثابت‌اند. یعنی آنها صفحه‌هایی موازی صفحه‌ی بار هستند. اگر فاصله‌ی دو سطح هم‌پتانسیل Δx باشد، آنگاه اختلاف پتانسیل آنها با رابطه‌ی $\Delta V = E\Delta x = (\sigma/۲\varepsilon_۰)\Delta x$ داده می‌شود و از آنجا خواهیم داشت:

$$\Delta x = \frac{۲\varepsilon_۰ \Delta V}{\sigma} = \frac{۲(۸{,}۸۵\times۱۰^{-۱۲}\, C^۲/N\cdot m^۲)(۵۰V)}{۰{,}۱۰\times۱۰^{-۶}\, C/m^۲}$$

$$\approx ۸{,}۸\times۱۰^{-۳} m = ۸{,}۸ mm$$

۶• وقتی یک الکترون در راستای یکی از خطوط میدان شکل ۲۴-۳۴ از A به B حرکت کند، میدان الکتریکی کاری برابر $۳{,}۹۴\times۱۰^{-۱۹} J$ روی آن انجام می‌دهد. اختلاف پتانسیل الکتریکی (الف) $V_B - V_A$، (ب) $V_C - V_A$، و (پ) $V_C - V_B$ چقدر است؟



شکل ۲۴-۳۴ مسئله‌ی ۶

حل (الف)

$$V_B - V_A = \frac{\Delta U}{q} = \frac{-W}{(-e)} = \frac{-۳{,}۹۴\times۱۰^{-۱۹}J}{-۱{,}۶۰\times۱۰^{-۱۹}J} = ۲{,}۴۶V$$

(ب)

$$V_C - V_A = V_B - V_A = ۲{,}۴۶V$$

(پ) چون C و B روی یک سطح هم‌پتانسیل‌اند، داریم:

$$V_C - V_B = ۰$$

۷•• میدان الکتریکی در ناحیه‌ای از فضا دارای مؤلفه‌های $E_y = E_z = ۰$ و $E_x = (۴{,}۰۰ N/C)x$ است. نقطه‌ی A روی محور y در $y = ۳{,}۰۰m$، و نقطه‌ی B روی محور x در $x = ۴{,}۰۰m$ قرار دارد. اختلاف پتانسیل $V_B - V_A$ چقدر است؟

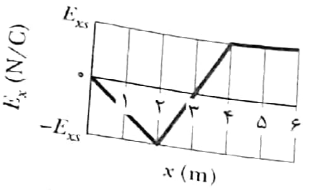
حل چون $E_y = ۰$ است، اختلاف پتانسیل نقطه‌ی A نسبت به مبدأ، طبق معادله‌ی ۲۴-۱۸، برابر با صفر می‌شود. از طرفی، اختلاف پتانسیل نقطه‌ی B نسبت به مبدأ برابر است با

$$\Delta V = -\int_۰^{x=۴{,}۰۰} \vec{E}\cdot d\vec{s} = -۴{,}۰۰\int_۰^{۴{,}۰۰} x\,dx = (-۴{,}۰۰)\left(\frac{۴{,}۰۰^۲}{۲}\right)$$

$$= -۳۲{,}۰V$$

بنابراین $V_B - V_A = ۳۲{,}۰V$ می‌شود.

۸•• نمودار مؤلفه‌ی x میدان الکتریکی برحسب تابعی از x در ناحیه‌ای از فضا، در شکل ۲۴-۳۵ نشان داده شده است. محور قائم با $E_{xs} = ۲۰{,}۰ N/C$ مقیاس‌بندی شده است. مؤلفه‌های y و z میدان الکتریکی در این ناحیه برابر با صفرند. اگر پتانسیل الکتریکی در مبدأ برابر ۱۰V باشد، (الف) پتانسیل الکتریکی در $x = ۲{,}۰m$ چقدر است؟ (ب) بزرگترین مقدار مثبت پتانسیل الکتریکی برای نقاط روی محور x در گستره‌ی $۰ \le x \le ۶{,}۰m$ چقدر است؟ و (پ) به‌ازای چه مقداری از x، پتانسیل الکتریکی برابر با صفر می‌شود؟



شکل ۲۴-۳۵ مسئله‌ی ۸

حل (الف) طبق معادله‌ی ۲۴-۱۸ کتاب، تغییر پتانسیل برابر با منفی مساحت سطح زیر منحنی می‌شود. بنابراین با استفاده از فرمول مساحت مثلث داریم:

$$V - ۱۰ = -\int_۰^{x=۲{,}۰} \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{۱}{۲}(۲{,}۰)(۲۰{,}۰)$$

که به $V = ۳۰V$ می‌انجامد.

(ب) $-\int \vec{E}\cdot d\vec{s}$ برای هر ناحیه‌ای داخل $۰ < x < ۳{,}۰m$ مثبت و برای هر ناحیه‌ای که برای آن $x > ۳{,}۰m$ است، منفی است. پس $V = V_{max}$ د $x = ۳{,}۰m$ رخ می‌دهد. بنابراین داریم:

$$V - ۱۰ = -\int_۰^{x=۳{,}۰} \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{۱}{۲}(۳{,}۰)(۲۰{,}۰)$$

که به $V_{max} = ۴۰V$ می‌انجامد.

(پ) از قسمت ب دریافتیم که در $x = ۳{,}۰m$، $V_{max} = ۴۰V$ می‌شود. آن را به‌عنوان مبدأ پتانسیل اختیار می‌کنیم و به دنبال می‌گردیم که به‌ازای آن، $V = ۰$ می‌شود.

$$۰ - ۴۰ = -\int_{x=۳{,}۰}^{x} \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\left[\frac{۱}{۲}(۱{,}۰)(۲۰{,}۰) + (x - ۴{,}۰)(۲۰{,}۰)\right]$$

عبارت‌های داخل کروشه، به‌ترتیب مساحت زیر مثلث و مس زیرمستطیلی هستند که طول آن، x، مورد نظر است. از آنجا ۵m به‌دست می‌آید.

۹•• یک ورقه‌ی نارسانای نامتناهی دارای چگالی سطح $\sigma = +۵{,}۸۰ pC/m^۲$ است. (الف) اگر ذره‌ای ب $q = +۱{,}۶۰\times۱۰^{-۱۹}C$ از روی این ورقه به نقطه‌ی P به $d = ۳{,}۵۶cm$ از آن جابه‌جا شود، میدان الکتریکی حاصل چقدر کار انجام داده است؟ (ب) اگر پتانسیل الکتریکی V روی صفر اختیار شود، پتانسیل V در نقطه‌ی P چقدر است؟

حل (الف) کار انجام شده توسط میدان الکتریکی چنین

Scanned by CamScanner

$$W=\int_i^f q_\circ\vec{E}\cdot d\vec{s}=\frac{q_\circ\sigma}{۲\varepsilon_\circ}\int_\circ^d dz=\frac{q_\circ\sigma d}{۲\varepsilon_\circ}$$

$$=\frac{(۱٫۶۰\times ۱۰^{-۱۹}\,\mathrm{C})(۵٫۸\times ۱۰^{-۱۲}\,\mathrm{C/m^۲})(۰٫۰۳۵۶\,\mathrm{m})}{۲(۸٫۸۵\times ۱۰^{-۱۲}\,\mathrm{C^۲/N\cdot m^۲})}$$

$$=۱٫۸۷\times ۱۰^{-۲۱}\,\mathrm{J}$$

(ب) چون $V-V_\circ=-W/q_\circ=-\sigma z/۲\varepsilon_\circ$ است، به‌ازای $V_\circ=۰$ روی ورقه، پتانسیل الکتریکی در P چنین می‌شود:

$$V=\frac{\sigma z}{۲\varepsilon_\circ}=\frac{(۵٫۸۰\times ۱۰^{-۱۲}\,\mathrm{C})(۰٫۰۳۵۶\,\mathrm{m})}{۲(۸٫۸۵\times ۱۰^{-۱۲}\,\mathrm{C^۲/N\cdot m^۲})}=۱٫۱۷\times ۱۰^{-۲}\,\mathrm{V}$$

$$=-۱۱٫۷\,\mathrm{mV}$$

۱۰•••• GO دو صفحه‌ی نارسانای نامتناهی و باردار یکنواخت موازی صفحه‌ی xy و در مکان‌های $x=-۵۰\,\mathrm{cm}$ و $x=+۵۰\,\mathrm{cm}$ قرار گرفته‌اند. چگالی بار روی این صفحه‌ها به‌ترتیب عبارت‌اند از $-۵۰\,\mathrm{nC/m^۲}$ و $+۲۵\,\mathrm{nC/m^۲}$. بزرگی اختلاف پتانسیل بین این ناحیه و نقطه‌ای روی محور x در $x=+۸۰\,\mathrm{cm}$ چقدر است؟ (*راهنمایی:* از قانون گاؤس استفاده کنید.)

حل در فضای میان صفحه‌ها، میدان‌های مجزا (که طبق معادله‌ی ۱۳-۱۹ برابر $\sigma/۲\varepsilon_\circ$ است) هم‌جهت و در جهت $-\hat{\mathbf{i}}$ هستند:

$$\vec{E}_{\text{داخل}}=-\left(\frac{\sigma_۱}{۲\varepsilon_\circ}+\frac{\sigma_۲}{۲\varepsilon_\circ}\right)\hat{\mathbf{i}}=\frac{۱}{۲\varepsilon_\circ}(\sigma_۱+\sigma_۲)\hat{\mathbf{i}}$$

$$=\frac{-۱}{۲(۸٫۸۵\times ۱۰^{-۱۲}\,\mathrm{C^۲/N\cdot m^۲})}(۵۰\times ۱۰^{-۹}\,\mathrm{C/m^۲}+۲۵\times ۱۰^{-۹}\,\mathrm{C/m^۲})\hat{\mathbf{i}}$$

$$=-(۴٫۲\times ۱۰^۳\,\mathrm{N/C})\hat{\mathbf{i}}$$

و در فضای بیرون صفحه‌ها در جایی که $x>۰٫۵۰\,\mathrm{m}$ است، نیروهای مجزا در خلاف جهت‌اند و داریم:

$$\vec{E}_{\text{خارج}}=\left(\frac{-\sigma_۱}{۲\varepsilon_\circ}+\frac{\sigma_۲}{۲\varepsilon_\circ}\right)\hat{\mathbf{i}}=\frac{۱}{۲\varepsilon_\circ}(\sigma_۲-\sigma_۱)\hat{\mathbf{i}}$$

$$=\frac{۱}{۲(۸٫۸۵\times ۱۰^{-۱۲}\,\mathrm{C^۲/N\cdot m^۲})}(۲۵\times ۱۰^{-۹}\,\mathrm{C/m^۲}-۵۰\times ۱۰^{-۹}\,\mathrm{C/m^۲})\hat{\mathbf{i}}$$

$$=-(۱٫۴\times ۱۰^۳\,\mathrm{N/C})\hat{\mathbf{i}}$$

در نتیجه اختلاف پتانسیل، طبق معادله‌ی ۲۴-۱۸، چنین می‌شود:

$$\Delta V=-\int_\circ^{۰٫۸۰}\vec{E}\cdot d\vec{s}=-\int_\circ^{۰٫۵۰}\left|\vec{E}_{\text{داخل}}\right|dx-\int_{۰٫۵۰}^{۰٫۸۰}\left|\vec{E}_{\text{خارج}}\right|dx$$

$$=-(۴٫۲\times ۱۰^۳\,\mathrm{N/C})(۰٫۵\,\mathrm{m})-(۱٫۴\times ۱۰^۳\,\mathrm{N/C})(۰٫۳\,\mathrm{m})$$

$$=۲٫۵\times ۱۰^۳\,\mathrm{V}$$

۱۱••• یک کره‌ی نارسانا دارای شعاع $R=۲٫۳۱\,\mathrm{cm}$ و بار $q=+۳٫۵۰\,\mathrm{fC}$ است که به‌طور یکنواختی توزیع شده است. پتانسیل الکتریکی را در مرکز کره $V_\circ=۰$ اختیار کنید. مقدار V در فاصله‌ی شعاعی (الف) $r=۱٫۴۵\,\mathrm{cm}$ و (ب) $r=R$ چقدر است؟ (راهنمایی: بخش ۲۳-۶ را ببینید.)

حل (الف) با اختیار یک سطح گاؤسی کروی هم‌مرکز با پوسته‌ی کروی، میدان الکتریکی در داخل کره‌ی باردار برابر با $E=qr/۴\pi\varepsilon_\circ R^۳$ می‌شود (حل مسئله‌ی ۴۹ فصل ۲۳ را ببینید). آنگاه پتانسیل الکتریکی بر حسب تابعی از r چنین می‌شود:

$$V(r)-V(۰)=-\int_\circ^r E(r)dr=۰-\int_\circ^r\frac{qr}{۴\pi\varepsilon_\circ R^۳}dr$$

$$=-\frac{qr^۲}{۸\pi\varepsilon_\circ R^۳}$$

$$=-\frac{(۸٫۹۹\times ۱۰^۹\,\mathrm{N\cdot m^۲/C^۲})(۳٫۵۰\times ۱۰^{-۱۵}\,\mathrm{C})}{۲(۰٫۰۲۳۱\,\mathrm{m})^۳}$$

$$=-۲٫۶۸\times ۱۰^{-۴}\,\mathrm{V}$$

(ب) میدان الکتریکی در $r=R$ به $E=q/۴\pi\varepsilon_\circ R^۲$ می‌انجامد و با توجه به اینکه $\Delta V=V(۰)-V(R)$ و $V(۰)=۰$ است، خواهیم داشت:

$$V(R)=-\frac{q}{۸\pi\varepsilon_\circ R}$$

$$=-\frac{(۸٫۹۹\times ۱۰^۹\,\mathrm{N\cdot m^۲/C^۲})(۳٫۵۰\times ۱۰^{-۱۵}\,\mathrm{C})}{۲(۰٫۰۲۳۱\,\mathrm{m})^۳}$$

$$=-۶٫۸۱\times ۱۰^{-۴}\,\mathrm{V}$$

بخش ۲۴-۳ پتانسیل حاصل از یک بار نقطه‌ای

۱۲• وقتی یک شاتل فضایی از میان یک گاز یونیده‌ی رقیق در جوّ زمین عبور می‌کند، در حین یک دور گردش، پتانسیل آن نوعاً به اندازه‌ی $-۱٫۰\,\mathrm{V}$ تغییر می‌کند. با فرض اینکه شاتل کره‌ای به شعاع $۱۰\,\mathrm{m}$ است، مقدار باری را که روی آن جمع می‌شود، تخمین بزنید.

حل با توجه به اینکه پتانسیل اطراف یک کره‌ی باردار $V=q/۴\pi\varepsilon_\circ R$ است، خواهیم داشت:

$$q=۴\pi\varepsilon_\circ RV=\frac{RV}{k}$$

$$=\frac{(۱۰\,\mathrm{m})(-۱٫۰\,\mathrm{V})}{۸٫۹۹\times ۱۰^۹\,\mathrm{N\cdot m^۲/C^۲}}=-۱٫۱۱\times ۱۰^{-۹}\,\mathrm{C}$$

۱۳• (الف) بار و (ب) چگالی بار روی سطح یک کره‌ی رسانا به شعاع $۰٫۱۵\,\mathrm{m}$ که پتانسیل آن (با $V=۰$ در فاصله‌ی نامتناهی) $۲۰۰\,\mathrm{V}$ است، چقدر است؟

حل (الف) بار روی کره چنین می‌شود:

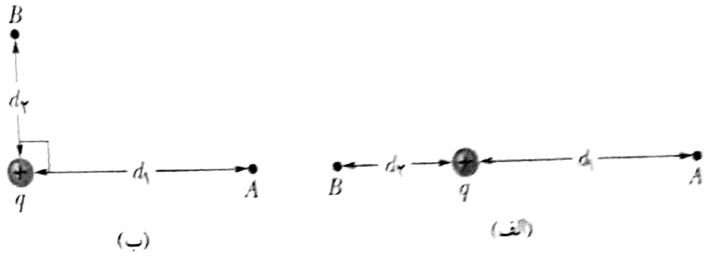
$$q=\frac{RV}{k}=\frac{(۰٫۱۵\,\mathrm{m})(۲۰۰\,\mathrm{V})}{۸٫۹۹\times ۱۰^۹\,\mathrm{N\cdot m^۲/C^۲}}=۳٫۳\times ۱۰^{-۹}\,\mathrm{C}=۳٫۳\,\mathrm{nC}$$

(ب) چگالی سطحی بار (یکنواخت) کره برابر است با

$$\sigma=\frac{q}{۴\pi R^۲}=\frac{۳٫۳\times ۱۰^{-۹}\,\mathrm{C}}{۴\pi(۰٫۱۵\,\mathrm{m})^۲}=۱٫۲\times ۱۰^{-۸}\,\mathrm{C/m^۲}=۱۲\,\mathrm{nC/m^۲}$$

۱۴• بار نقطه‌ای $q=۱٫۰\,\mu\mathrm{C}$، نقطه‌ی A به فاصله‌ی $d_۱=۲٫۰\,\mathrm{m}$ از q، و نقطه‌ی B به فاصله‌ی $d_۲=۱٫۰\,\mathrm{m}$ را در نظر بگیرید. (الف) اگر A

و B، مانند شکل ۲۴-۳۶ الف، به طور قطری در مقابل هم قرار گرفته باشند اختلاف پتانسیل الکتریکی $V_A - V_B$ چقدر است؟ (ب) اگر A و B در مکان‌هایی مطابق شکل ۲۴-۳۶ قرار گرفته باشند، آن اختلاف پتانسیل الکتریکی چقدر می‌شود؟



شکل ۲۴-۳۶ مسئله‌ی ۱۴

حل (الف) اختلاف پتانسیل برابر است با

$$V_A - V_B = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_A} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_B} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

$$= (1.0\times10^{-6}\,\mathrm{C})(8.99\times10^{9}\,\mathrm{N\cdot m^2/C^2})\left(\frac{1}{2.0\,\mathrm{m}} - \frac{1}{1.0\,\mathrm{m}}\right)$$

$$= -4.5\times10^{3}\,\mathrm{V}$$

(ب) چون $V(r)$ کمیتی نرده‌ای است و تنها به بزرگی r بستگی دارد، نتیجه‌ی قسمت الف تغییر نمی‌کند.

۱۵•• ILW یک قطره‌ی کروی آب که حامل ۳۰pC بار است دارای پتانسیل ۵۰۰V (به‌ازای $V = 0$ در فاصله‌ی نامتناهی) روی سطح خود است. (الف) شعاع این قطره چقدر است؟ (ب) اگر دو قطره با همین بار و همین شعاع، تشکیل قطره‌ی کروی واحدی را بدهند، پتانسیل روی سطح این قطره‌ی جدید چقدر می‌شود؟

حل (الف) پتانسیل الکتریکی روی سطح قطره به بار q و شعاع R با $V = q/4\pi\varepsilon_0 R$ داده می‌شود. بنابراین برای شعاع R قطره داریم:

$$R = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 V} = \frac{(8.99\times10^{9}\,\mathrm{N\cdot m^2/C^2})(30\times10^{-12}\,\mathrm{C})}{500\,\mathrm{V}}$$

$$= 5.4\times10^{-4}\,\mathrm{m} = 0.54\,\mathrm{mm}$$

(ب) پس از اینکه قطره‌ها ترکیب شوند، حجم قطره‌ی جدید دو برابر حجم قطره‌ی اولیه می‌شود و داریم:

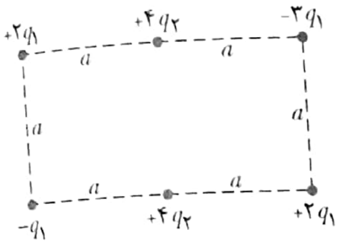
$$\left(\frac{4}{3}\pi\right)(R')^3 = 2\left(\frac{4}{3}\pi\right)(R)^3$$

و از آنجا $R' = 2^{\frac{1}{3}}R$ می‌شود. بار قطره‌ی جدید دو برابر بار قطره‌ی اولیه $q' = 2q$ است و در نتیجه داریم:

$$V' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q'}{R'} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q}{2^{1/3}R} = 2^{2/3}V = 2^{2/3}(500\,\mathrm{V})$$

$$= 793\,\mathrm{V}$$

۱۶•• GO شکل ۲۴-۳۷ آرایه‌ای مستطیلی از چند ذره‌ی باردار را نشان می‌دهد که در مکان‌های خود، به فاصله‌های $a = 39.0\,\mathrm{cm}$، ثابت شده‌اند و بارهای نشان داده در شکل مضرب‌های درستی از $q_1 = 3.40\,\mathrm{pC}$ و $q_2 = 6.00\,\mathrm{pC}$ هستند. به‌ازای $V = 0$ در فاصله‌ی نامتناهی الکتریکی خالص در مرکز مستطیل چقدر است؟ (راهنمایی: یک ذهنی می‌تواند از میزان محاسبات بکاهد.)



شکل ۲۴-۳۷ مسئله‌ی ۱۶

حل اگر توجه کنید درمی‌یابید که مجموع چهار بار واق گوشه‌های مستطیل برابر با صفر است:

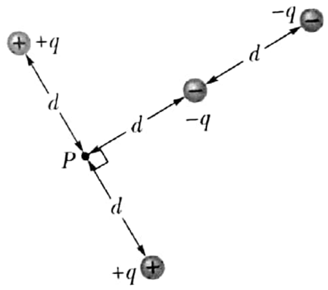
$$2q_1 - 3q_1 + 2q_1 - q_1 = 0$$

و چون این چهار بار به فاصله‌ی یکسانی از مرکز مستطیل قرار دا بنابراین سهم آنها در پتانسیل الکتریکی در مرکز مستطیل برابر صفر ا پس، فقط می‌ماند دو بار $+4q_2$ که به فاصله‌ی $a/2$ از مرکز مستطیل گرفته‌اند. در نتیجه، داریم:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4q_2}{a/2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4q_2}{a/2} = \frac{16q_2}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

$$= \frac{16(8.99\times10^{9}\,\mathrm{N\cdot m^2/C^2})(6.00\times10^{-12}\,\mathrm{C})}{0.390\,\mathrm{m}} = 2.21\,\mathrm{V}$$

۱۷•• GO در شکل ۲۴-۳۸ پتانسیل الکتریکی خالص حاصل از چهار در نقطه‌ی P چقدر است، درصورتی‌که $q = 5.00\,\mathrm{fC}$، $d = 4.00\,\mathrm{cm}$ و در فاصله‌ی نامتناهی $V = 0$ باشد؟



شکل ۲۴-۳۸ مسئله‌ی ۱۷

حل یکی از بارهای $-5q$ به فاصله‌ی $2d$ از P، بار $-5q$ دیگر به فاصله‌ی d از P، و دو بار $+5q$ هر یک به فاصله‌ی d از P قرار دارند. بنابراین پتانسیل الکتریکی در نقطه‌ی P چنین می‌شود:

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{2d} - \frac{1}{d} + \frac{1}{d} + \frac{1}{d}\right] = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 d}$$

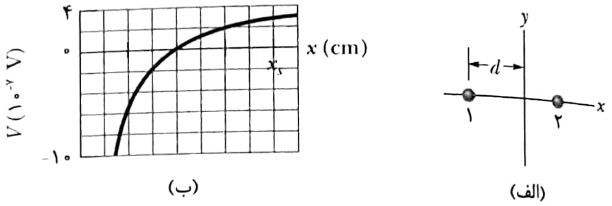
$$= \frac{(8.99\times10^{9}\,\mathrm{N\cdot m^2/C^2})(5.00\times10^{-15}\,\mathrm{C})}{2(4.00\times10^{-2}\,\mathrm{m})}$$

$$= 5.62\times10^{-4}\,\mathrm{V} = 0.562\,\mathrm{mV}$$

توجه کنید صفرِ پتانسیل الکتریکی در بی‌نهایت در نظر گرفته شده است.

Scanned by CamScanner

۱۸●● (GO) دو ذره‌ی باردار در شکل ۲۴-۳۹ الف نشان داده شده است. ذره‌ی ۱، با بار q_1، در مکان خود به فاصله‌ی d ثابت شده است. ذره‌ی ۲، با بار q_2 می‌تواند روی محور x حرکت کند. شکل ۲۴-۳۹ ب پتانسیل الکتریکی خالص V ی ناشی از این دو ذره را برحسب تابعی از مختصه‌ی x ذره‌ی ۲ نشان می‌دهد. محور x با $x_s = 16.0\text{ cm}$ مقیاس‌بندی شده است. در $x \to \infty$، منحنی دارای مجانب $V = 5.76\times10^{-7}\text{ V}$ است. q_2 برحسب e چقدر است؟



(الف) (ب)

شکل ۲۴-۳۹ مسئله‌ی ۱۸

حل توجه کنید که فقط بار q_2 حرکت می‌کند و وقتی بار q_2 در فاصله‌ی بی‌نهایت است، پتانسیل در مبدأ فقط ناشی از بار q_1 است. از رفتار مجانبی منحنی پتانسیل درمی‌یابیم:

$$V_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 d} = 5.76\times10^{-7}\text{ V}$$

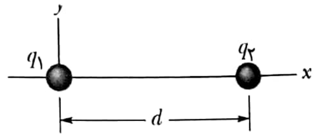
از آنجا با گذاشتن $1/4\pi\varepsilon_0 = 8.99\times10^9\text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2$ به $q_1/d = 6.41\times10^{-7}\text{ C/m}$ می‌رسیم. همچنین از روی منحنی پتانسیل درمی‌یابیم که وقتی q_2 در $x = 0.0800\text{ m}$ قرار دارد، پتانسیل خالص برابر با صفر می‌شود $(V_1 + V_2 = 0)$. بنابراین داریم:

$$0 = \frac{kq_2}{0.0800\text{ m}} + \frac{kq_1}{d}$$

و از آنجا q_2 چنین می‌شود:

$$q_2 = -\left(\frac{q_1}{d}\right)(0.0800\text{ m}) = -(6.41\times10^{-7}\text{ C/m})(0.0800\text{ m})$$
$$= -5.13\times10^{-18}\text{ C} = -32.0e$$

۱۹●● در شکل ۲۴-۴۰، ذره‌های $q_1 = +5e$ و $q_2 = -15e$ در مکان‌های خود به فاصله‌ی $d = 24.0\text{ cm}$ ثابت شده‌اند. به‌ازای $V = 0$ در فاصله‌ی نامتناهی، مقدار متناهی (الف) مثبت و (ب) منفی x که در آن پتانسیل الکتریکی خالص روی محور x برابر صفر است، چیست؟



شکل ۲۴-۴۰ مسئله‌های ۱۹ و ۲۰

حل توجه کنید $V(x)$ نمی‌تواند برای $x > d$ برابر صفر شود. در واقع $V(x)$ برای $x > d$ همواره منفی است. می‌ماند دو ناحیه‌ی باقی‌مانده روی محور x: $x < 0$ و $0 < x < d$.

(الف) برای $0 < x < d$، فاصله‌ی بارهای q_1 و q_2 تا نقطه‌ای با مختصه‌ی x روی محور x به‌ترتیب با $d_1 = x$ و $d_2 = d - x$ داده می‌شود. در نتیجه داریم:

$$V(x) = k\left(\frac{q_1}{d_1} + \frac{q_2}{d_2}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{-x} + \frac{-3}{d-x}\right) = 0$$

از آنجا $x = d/4$ به‌دست می‌آید که به‌ازای $d = 24.0\text{ cm}$ به $x = 6.00\text{ cm}$ می‌انجامد.

(ب) به همین ترتیب، برای $x < 0$ فاصله‌ی جدایی q_1 و نقطه‌ای روی محور x که مختصه‌ی آن x است با $d_1 = -x$ و فاصله‌ی جدایی q_2 تا این نقطه با $d_2 = d - x$ داده می‌شود. در نتیجه داریم:

$$V(x) = k\left(\frac{q_1}{d_1} + \frac{q_2}{d_2}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{-x} + \frac{-3}{d-x}\right) = 0$$

از آنجا $x = d/4$ به‌دست می‌آید که به‌ازای $d = 24.0\text{ cm}$ به $x = 12.0\text{ cm}$ می‌انجامد.

۲۰●● دو ذره‌ی باردار q_1 و q_2 در شکل ۲۴-۴۰ به فاصله‌ی d از هم قرار گرفته‌اند. میدان الکتریکی خالص حاصل این ذره‌ها در $x = d/4$ برابر با صفر است. به‌ازای $V = 0$ در فاصله‌ی نامتناهی، (برحسب d) نقطه‌ای روی محور x (غیر از فاصله‌ی نامتناهی) را بیابید که در آن پتانسیل الکتریکی حاصل از این دو ذره صفر باشد.

حل چون طبق صورت مسئله، نقطه‌ای میان دو بار روی محور x وجود دارد که در آنجا میدان الکتریکی خالص [برایند] برابر صفر است، جهت میدان‌های الکتریکی ناشی از q_1 و q_2 باید در خلاف یکدیگر باشند. این بدین معنی است که علامت بارهای q_1 و q_2 باید یکسان باشد (یعنی یا هر دو مثبت و یا هر دو منفی باشد). بنابراین، پتانسیل‌های ناشی از هر یک از بارها باید هم‌علامت باشند. در نتیجه، پتانسیل الکتریکی خالص نمی‌تواند در هیچ نقطه‌ای به جز بی‌نهایت، صفر باشد.

بخش ۲۴-۴ پتانسیل حاصل از یک دوقطبی الکتریکی

۲۱● ILW مولکول آمونیاک NH_3 دارای گشتاور دوقطبی الکتریکی دائمی‌ای برابر با 1.47 D است، که در آن $1\text{ D} = 3.34\times10^{-30}\text{ C.m}$ یکای دبی $= 1\text{D}$. پتانسیل الکتریکی حاصل از یک مولکول آمونیاک را در نقطه‌ای به فاصله‌ی 52.0 nm روی محور دوقطبی محاسبه کنید. (در فاصله‌ی نامتناهی $V = 0$ اختیار کنید.)

حل خوب است نخست فاصله‌ی دو بار دوقطبی الکتریکی را به‌دست آوریم. از تعریف بزرگی گشتاور دوقطبی الکتریکی داریم:

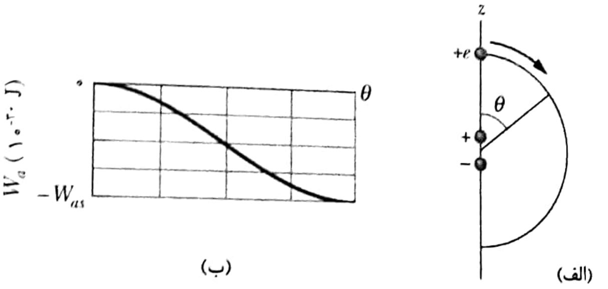
$$p = qd = (1.60\times10^{-19}\text{ C})d = (1.47)(3.34\times10^{-30}\text{ C}\cdot\text{m})$$

و از آنجا $d \approx 3.1\times10^{-11}\text{ m} = 0.031\text{ nm}$ می‌شود. چون $r \gg d$ است بنابراین می‌توانیم از فرمول تقریبی ۲۴-۳۰ کتاب به‌ازای $\theta = 0$ استفاده کنیم:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^2}$$
$$= \frac{(8.99\times10^9\text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(1.47\times3.34\times10^{-3}\text{ C}\cdot\text{m})}{(52.0\times10^{-9}\text{ m})^2}$$
$$= 1.63\times10^{-5}\text{ V} = 16.3\ \mu\text{V}$$

Scanned by CamScanner

۲۲• در شکل ۲۴-۴۱ الف، ذره‌ای با بار $+e$ ابتدا در مختصه‌ی $z=۲۰nm$ روی محور عبوری از یک دوقطبی و در طرف مثبت آن قرار دارد. (مبداء z در مرکز دوقطبی واقع است.) سپس ذره روی مسیری دایره‌ای، دور مرکز دوقطبی می‌چرخد تا اینکه به مختصه‌ی $z=-۲۰nm$ برسد. شکل ۲۴-۴۱ ب کار W_aی انجام شده توسط نیرویی که ذره را حرکت می‌دهد بر حسب زاویه‌ی θی مکان ذره نسبت به سوی مثبت محور z نشان می‌دهد. محور قائم با $W_{as}=۴٫۰\times۱۰^{-۳۰}J$ مقیاس‌بندی شده است. بزرگی گشتاور دوقطبی چقدر است؟



شکل ۲۴-۴۱ مسئله‌ی ۲۲

حل با استفاده از معادله‌های ۲۴-۳۰ و ۲۴-۱۴ کتاب داریم:

$$W_a=q\Delta V=e\left(\frac{p\cos\theta}{۴\pi\varepsilon_۰ r^۲}-\frac{p\cos\theta_i}{۴\pi\varepsilon_۰ r^۲}\right)$$

که در آن θ و θ_i به‌ترتیب زاویه‌ی بار $+e$ در یک لحظه‌ی خاص و زاویه‌ی اولیه‌ی بار $+e$ هستند. با توجه به اینکه $\theta_i=۰$ است، خواهیم داشت:

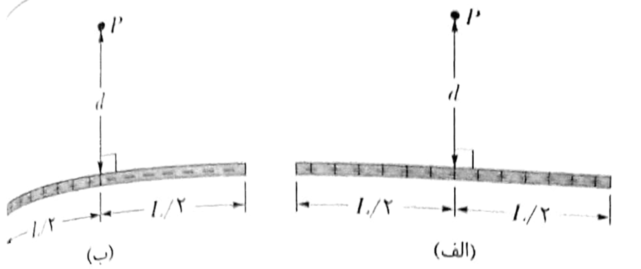
$$W_a=\frac{ep}{۴\pi\varepsilon_۰ r^۲}(\cos\theta-۱)$$

از روی منحنی (ب) درمی‌یابیم که به‌ازای $\theta=۱۸۰^\circ$، $W_a=-۴٫۰\times۱۰^{-۳۰}J$ می‌شود. بنابراین از آنجا می‌توانیم بزرگی گشتاور دوقطبی را به‌دست آوریم:

$$p=\frac{۴\pi\varepsilon_۰ r^۲ W_a}{e(\cos۱۸۰^\circ-۱)}$$
$$=\frac{(۲۰\times۱۰^{-۹}m)^۲(-۴٫۰\times۱۰^{-۳۰}J)}{(۸٫۹۹\times۱۰^۹N\cdot m^۲/C^۲)(۱٫۶۰\times۱۰^{-۱۹}C)(-۲)}$$
$$=۵٫۶\times۱۰^{-۳۷}C\cdot m$$

بخش ۲۴-۵ پتانسیل حاصل از یک توزیع بار پیوسته

۲۳• (الف) شکل ۲۴-۴۲ الف یک میله‌ی نارسانا به طول $L=۶٫۰۰cm$ و چگالی خطی بار یکنواخت $\lambda=+۳٫۶۸pC/m$ را نشان می‌دهد. در فاصله‌ی نامتناهی $V=۰$ اختیار کنید. V در نقطه‌ی P به فاصله‌ی $d=۸٫۰۰\ cm$ روی عمود منصف این میله چقدر است؟ (ب) شکل ۲۴-۴۲ ب میله‌ی مشابهی را نشان می‌دهد، با این تفاوت که اکنون یک نیمه‌ی آن باردار منفی شده است. هر دو نیمه دارای چگالی خطی باری به بزرگی $۳٫۶۸pC/m$ هستند. به‌ازای $V=۰$ در فاصله‌ی نامتناهی، مقدار V در نقطه‌ی P چقدر می‌شود؟



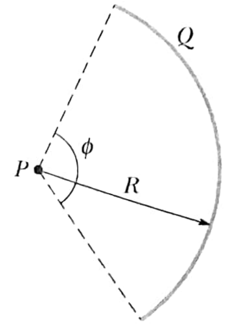
شکل ۲۴-۴۲ مسئله‌ی ۲۳

حل (الف) از اصل برهم‌نهی استفاده می‌کنیم. پتانسیل در نقطه‌ی P حاصل از جمع جبری پتانسیل حاصل از دو میله به طول $L/۲$ در نقطه‌ی P است. آنگاه با استفاده از معادله‌ی ۲۴-۳۵ در یکاهای SI خواهیم داشت:

$$V=۲\frac{\lambda}{۴\pi\varepsilon_۰}\ln\left[\frac{L/۲+\sqrt{(L^۲/۴)+d^۲}}{d}\right]$$
$$=۲(۸٫۹۹\times۱۰^۹)\times(۳٫۶۸\times۱۰^{-۱۲})\ln\left[\frac{(۰٫۰۶۰۰/۲)+\sqrt{(۰٫۰۶۰۰)^۲/۴+(۰٫۰۸۰۰)^۲}}{۰٫۰۸۰۰}\right]$$
$$=۲٫۴۳\times۱۰^{-۲}V=۲۴٫۳\ mV$$

(ب) با استفاده از اصل برهم‌نهی بی‌درنگ درمی‌یابیم که پتانسیل در نقطه‌ی P برابر صفر می‌شود. چرا که دو میله به طول $L/۲$ ولی با بار مخالف داریم.

۲۴• در شکل ۲۴-۴۳، یک میله‌ی پلاستیکی به شکل کمانی دایره‌ای، شعاع $R=۳٫۷۱cm$ و زاویه‌ی مرکزی $Q=۱۲۰^\circ$ در آمده است، دارای بار $Q=-۲۵٫۶pC$ است که به‌طور یکنواختی روی آن توزیع شده است. به‌ازای $V=۰$ در فاصله‌ی نامتناهی، پتانسیل الکتریکی نقطه‌ی P، واقع در مرکز خمیدگی میله، چقدر است؟



شکل ۲۴-۴۳ مسئله‌ی ۲۴

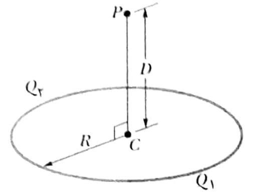
حل توجه کنید که طبق تعریف پتانسیل $V_P=k\int dq/r$ است که r فاصله‌ی یک عنصر دیفرانسیلی از کمان تا نقطه‌ی P است. ولی مقداری ثابت و برابر شعاع R کمان است. پس، عملاً مقدار زاویه‌ی مرکزی نقش بازی می‌کند و خواهیم داشت:

$$V_P=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\int\frac{dq}{R}=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰ R}\int dq=\frac{-Q}{۴\pi\varepsilon_۰ R}$$
$$=\frac{-(۸٫۹۹\times۱۰^۹N\cdot m^۲/C^۲)(۲٫۵۶\times۱۰^{-۱۲}C)}{۳٫۷۱\times۱۰^{-۲}m}=۶٫۲۰V$$

Scanned by CamScanner

توجه کنید که این نتیجه درست مانند پتانسیل حاصل از یک بار نقطه‌ای است و این انطباق به این واقعیت بازمی‌گردد که V یک کمیت نرده‌ای است.

۲۵● یک میله‌ی پلاستیکی به شکل دایره‌ای به شعاع $R = 8.20\,\text{cm}$ در آمده است. این میله دارای بار $Q_1 = +4.20\,\text{pC}$ روی یک‌ـ چهارم محیط خود و بار $Q_2 = -6Q_1$ روی بقیه‌ی آن است که به‌طور یکنواختی توزیع شده‌اند (شکل ۲۴-۴۴). به‌ازای $V = 0$ در فاصله‌ی نامتناهی، پتانسیل الکتریکی در (الف) مرکز Cی دایره و (ب) نقطه‌ی P که روی محور مرکزی دایره به فاصله‌ی $D = 6.71\,\text{cm}$ از این مرکز قرار دارد، چیست؟



شکل ۲۴-۴۴ مسئله‌ی ۲۵

حل (الف) از اصل برهم‌نهی استفاده می‌کنیم و سهم دو قسمت میله را به تفکیک در نقطه‌ی C به‌دست آورده و با هم جمع می‌کنیم. پتانسیل الکتریکی به زاویه‌ی کمان بستگی ندارد (مسئله‌ی ۲۴ را ببینید) و بنابراین داریم:

$$V_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q_1}{R} - \frac{6Q_1}{R}\right] = -\frac{5Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$= -\frac{5(8.99\times10^9\,\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(4.20\times10^{-12}\,\text{C})}{8.20\times10^{-2}\,\text{m}}$$

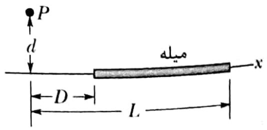
$$= -2.30\,\text{V}$$

(ب) تمام توزیع بارها به فاصله‌ی یکسان $\sqrt{R^2 + D^2}$ از نقطه‌ی P قرار دارند و بنابراین داریم:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q_1}{\sqrt{R^2+D^2}} - \frac{6Q_1}{\sqrt{R^2+D^2}}\right] = -\frac{5Q_1}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+D^2}}$$

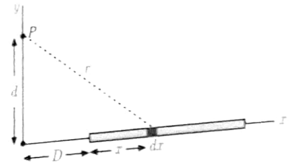
$$= -\frac{5(8.99\times10^9\,\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(4.20\times10^{-12}\,\text{C})}{\sqrt{(8.20\times10^{-2}\,\text{m})^2 + (6.71\times10^{-2}\,\text{m})^2}} = -1.78\,\text{V}$$

۲۶●● GO شکل ۲۴-۴۵ میله‌ی باریکی با چگالی بار یکنواخت $2.00\,\mu\text{C/m}$ را نشان می‌دهد. اگر $d = D = L/4.00$ باشد، پتانسیل الکتریکی را در نقطه‌ی P محاسبه کنید.



شکل ۲۴-۴۵ مسئله‌ی ۲۶

حل یک عنصر دیفرانسیلی dx از میله را مطابق شکل زیر در نظر می‌گیریم. در این عنصر، بار دیفرانسیلی $dq = \lambda dx$ نهفته است و این بار در نقطه‌ی P، پتانسیل dV را ایجاد می‌کند که در فاصله‌ی $r = \sqrt{(D+x)^2 + d^2}$ از نقطه‌ی P است.



بنابراین پتانسیل dV برابر است با

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dx}{\left[(D+x)^2 + d^2\right]^{1/2}}$$

و از آنجا V چنین می‌شود:

$$V = \int dV = \int_D^L \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dx}{\left[(D+x)^2 + d^2\right]^{1/2}}$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_D^L \frac{dx}{\left[(D+x)^2 + d^2\right]^{1/2}}$$

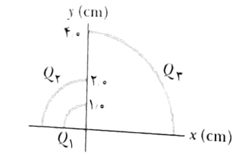
آنگاه به همان ترتیبی که در معادله‌ی ۲۴-۳۵ نشان دادیم، در یکاهای SI خواهیم داشت:

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{L+\sqrt{L^2+d^2}}{D+\sqrt{D^2+d^2}}\right)$$

$$= (8.99\times10^9)(2.00\times10^{-6})\ln\left(\frac{4+\sqrt{17}}{1+\sqrt{2}}\right)$$

$$= 2.18\times10^4\,\text{V}$$

۲۷●● در شکل ۲۴-۴۶، سه میله‌ی پلاستیکی نازک، ربع دایره‌هایی را تشکیل داده‌اند که مرکز مشترک خمیدگی آنها در مبدأ قرار دارد. بارهای یکنواخت روی میله‌ها عبارت‌اند از $Q_1 = +30\,\text{nC}$، $Q_2 = +3.0Q_1$ و $Q_3 = -8.0Q_1$. پتانسیل الکتریکی خالص حاصل از این میله‌ها در مبدأ چقدر است؟



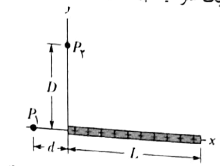
شکل ۲۴-۴۶ مسئله‌ی ۲۷

حل همان‌طور که پیشتر در مسئله ۲۴ نیز نشان داده‌ایم پتانسیل حاصل از کمان‌های دایره‌ای معادل با پتانسیل حاصل از باری نقطه‌ای می‌شود. بنابراین با اختیار $d = 0.010\,\text{m}$ خواهیم داشت:

Scanned by CamScanner

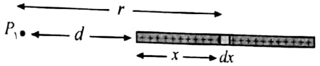
$$V=\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 d}+\frac{3Q_1}{8\pi\varepsilon_0 d}-\frac{8Q_1}{16\pi\varepsilon_0 d}=\frac{Q_1}{8\pi\varepsilon_0 d}$$
$$=\frac{(8{,}99\times10^9\,N\cdot m^2/C^2)(30\times10^{-9}C)}{2(0{,}010m)}=1{,}3\times10^4\,V$$

۲۸●● GO شکل ۲۴-۴۷ یک میله‌ی پلاستیکی نازک به طول $L=12{,}0cm$ و بار مثبت یکنواخت $Q=56{,}1fC$ را نشان می‌دهد که روی محور x قرار دارد. به‌ازای $V=0$ در فاصله‌ی نامتناهی، پتانسیل الکتریکی را در نقطه‌ی P_1 واقع بر این محور و به فاصله‌ی $d=2{,}50cm$ از یک سر میله پیدا کنید.



شکل ۲۴-۴۷ مسئله‌های ۲۸، ۳۳، ۳۸ و ۴۰

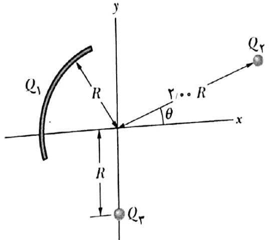
حل یک عنصر دیفرانسیلی به ضخامت dx از میله را در نظر می‌گیریم که در آن بار $dq=\lambda dx$ نهفته است. این عنصر دیفرانسیلی به فاصله‌ی متغیر x از یک سر میله و r از نقطه‌ی P_1 قرار دارد. پتانسیل حاصل از این عنصر دیفرانسیلی در نقطه‌ی P_1 چنین می‌شود:



برای یافتن پتانسیل کل در نقطه‌ی P_1 باید روی کلّ طول میله انتگرال بگیریم:

$$V=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^L\frac{dx}{d+x}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln(d+x)\Big|_0^L$$
$$=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}\ln\left(\frac{d+L}{d}\right)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}\ln\left(1+\frac{L}{d}\right)$$
$$=\frac{(8{,}99\times10^9\,N\cdot m^2/C^2)(56{,}1\times10^{-15}C)}{0{,}120m}\ln\left(1+\frac{L}{d}\right)$$
$$=7{,}39\times10^{-3}\,V$$

۲۹●● در شکل ۲۴-۴۸، پتانسیل الکتریکی خالص حاصل از یک کمان دایره‌ای با بار $Q_1=+7{,}21pC$ و دو ذره با بارهای $Q_2=+4{,}00Q_1$ و $Q_3=-2{,}00Q_1$ چقدر است؟ مرکز خمیدگی کمان در مبدأ قرار دارد، شعاع کمان $R=2{,}00m$، و زاویه‌ی نشان داده شده در شکل، $\theta=20{,}0°$ است؟



شکل ۲۴-۴۸ مسئله‌ی ۲۹

حل تمام نقاط کمان به فاصله‌ی یکسانی از مبدأ قرار دارند و همان‌طور که در حل مسئله ۲۴ دیدیم، پتانسیل حاصل از آن برابر با پتانسیل حاصل از یک بار نقطه‌ای با بار $+Q$ در فاصله‌ی R است. بنابراین داریم:

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{+Q_1}{R}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{+4Q_1}{2R}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-2Q}{R}$$
$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{R}$$
$$=\frac{(8{,}99\times10^9\,N\cdot m^2/C^2)(7{,}21\times10^{-12}C)}{2{,}00m}$$
$$=3{,}24\times10^{-2}\,V$$

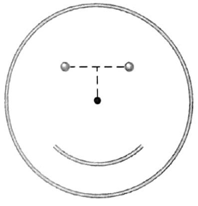
۳۰●● GO صورتک خندان شکل ۲۴-۴۹ از سه بخش تشکیل شده است:

۱. یک میله‌ی باریک به بار $-3{,}0\mu C$ که به شکل دایره‌ای به شعاع $6{,}0$ cm در آمده است.

۲. یک میله‌ی باریک دیگر به بار $2{,}0\mu C$ که به شکل کمانی دایره‌ای به شعاع $4{,}0$ cm در آمده است و زاویه‌ی $90°$ را حول مرکز دایره‌ی کامل شامل می‌شود.

۳. یک دوقطبی الکتریکی با گشتاور دوقطبی‌ای که عمود بر یک خط شعاعی و دارای بزرگی $1{,}28\times10^{-21}C\cdot m$ است.

پتانسیل الکتریکی خالص در مرکز این شکل چقدر است؟

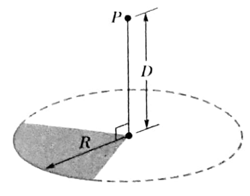


شکل ۲۴-۴۹ مسئله‌ی ۳۰

حل پتانسیل حاصل از دوقطبی در مبدأ برابر با صفر می‌شود. زیرا طبق معادله‌ی ۲۴-۳۰ پتانسیل حاصل از دوقطبی برابر با $V=p\cos\theta/4\pi\varepsilon_0 r^2$ است، که در اینجا $\theta=90°$ است. چون $\cos(90°)=0$ است، $V=0$ می‌شود. همان‌طور که پیشتر در حل مسئله‌ی ۲۴ دیدیم، پتانسیل حاصل از کمان به زاویه‌ی کمان بستگی ندارد و بنابراین پتانسیل ناشی از کمان‌های کوتاه و بلند به‌ترتیب برابر با $q_1/4\pi\varepsilon_0 r_1$ و $q_2/4\pi\varepsilon_0 r_2$ می‌شوند. چون $q_1=+2{,}0\mu C$، $r_1=4{,}0cm$، $q_2=-3{,}0\mu C$، و $r_2=6{,}0cm$ است، این دو پتانسیل همدیگر را در مبدأ خنثی می‌کنند و بنابراین پتانسیل خالص در مبدأ برابر صفر می‌شود.

۳۱●● WWW یک طرف قرصی پلاستیکی به شعاع $R=64{,}0cm$ با چگالی سطحی بار یکنواخت $\sigma=7{,}73\,fC/m^2$ باردار شده، و سپس سه ربع آن برداشته می‌شود. ربع قرص برجای مانده، در شکل ۲۴-۵۰ نشان داده شده است. به‌ازای $V=0$ در فاصله‌ی نامتناهی، پتانسیل حاصل از ربع بر جای مانده در نقطه‌ی P، که بر محور مرکزی قرص اولیه و به فاصله‌ی $D=25{,}9cm$ از مرکز آن قرار دارد، چیست؟

Scanned by CamScanner



شکل ۲۴-۵۰ مسئله‌ی ۳۱

حل چون پتانسیل کمیتی نرده‌ای است می‌توانیم نخست پتانسیل حاصل از یک قرص کامل را روی محور مرکزی قرص به‌دست آورده و سپس نتیجه‌ی آن را بر عدد ۴ تقسیم کنیم. در این صورت می‌توانیم یک حلقه‌ی دایره‌ای به شعاع r و ضخامت dr را از قرص انتخاب کنیم. مساحت این حلقه برابر با $2\pi r\,dr$ است و از آنجا بار موجود در این حلقه $dq = 2\pi\sigma r\,dr$ می‌شود. تمام حلقه‌های دیفرانسیلی باری که قرص را تشکیل می‌دهند به فاصله‌ی $\sqrt{r^2+D^2}$ از نقطه‌ی P هستند و بنابراین پتانسیل حاصل از یک حلقه‌ی بار دیفرانسیلی در نقطه‌ی P چنین می‌شود:

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\pi\sigma r\,dr}{\sqrt{r^2+D^2}} = \frac{\sigma r\,dr}{2\varepsilon_0\sqrt{r^2+D^2}}$$

آنگاه پتانسیل کل در نقطه‌ی P با انتگرال‌گیری از این رابطه حاصل می‌شود:

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^R \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2+D^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\sqrt{r^2+D^2}\Big|_0^R$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{R^2+D^2} - D\right]$$

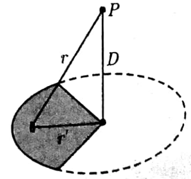
که در محاسبه‌ی آن از تغییر متغیر $r^2+D^2=u$ استفاده کرده‌ایم. پس، پتانسیل حاصل از یک ربع قرص باردار $V_P = V/4$ می‌شود و در یکاهای SI داریم:

$$V_P = \frac{V}{4} = \frac{\sigma}{8\varepsilon_0}\left[\sqrt{R^2+D^2} - D\right]$$

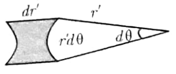
$$= \frac{(7/73\times10^{-15})}{8(8/85\times10^{-12})}\left[\sqrt{(0/640)^2+(0/259)^2} - 0/259\right]$$

$$= 4/71\times10^{-5}\,\text{V} = 47/1\,\mu\text{V}$$

با توجه به اینکه لزوماً همواره مسائلی از این دست نداریم که زاویه‌ی θ مشخص باشد و یا اینکه ممکن است با چنین مسائلی برای محاسبه‌ی میدان الکتریکی مواجه شویم، بهتر آن است که روش المان‌گیری را به‌طور کلی‌تر بیاموزیم. مثلاً در اینجا یک عنصر دیفرانسیلی سطحی از ربع قرص انتخاب می‌کنیم و فاصله‌ی آن را از مرکز r' و از نقطه‌ی P، r می‌نامیم.



اگر عنصر دیفرانسیلی سطحی را خیلی بزرگ کنیم، مثلاً چنین شکلی داریم



پس $dA = r'dr'd\theta$ می‌شود و از آنجا برای V_P خواهیم داشت:

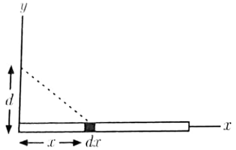
$$V_P = k\int\frac{dq}{r} = k\int\frac{\sigma dA}{r} = k\sigma\int_0^{\pi/2}\int_0^R \frac{r'dr'd\theta}{(r'^2+D^2)^{1/2}}$$

$$= k\sigma\frac{\pi}{2}\int_0^R \frac{r'dr'}{(r'^2+D^2)^{1/2}}$$

که r' همان r به‌کار رفته در روش حلّ اول است و این رابطه به همان پاسخ قبلی می‌انجامد.

۳۲••• GO یک توزیع خطی بار یکنواخت که با $\lambda = bx$ داده می‌شود و در آن b یک ثابت است، روی محور x از $x=0$ تا $x = 0/20\,\text{m}$ قرار دارد. اگر $b = 20\,\text{nC/m}^2$ و در فاصله‌ی نامتناهی $V=0$ باشد، پتانسیل الکتریکی در (الف) مبدأ و (ب) نقطه‌ی $y = 0/5\,\text{m}$ روی محور y چقدر است؟

حل یک عنصر دیفرانسیلی طولی به ضخامت dx از میله را در نظر می‌گیریم و پتانسیل را در دو نقطه‌ی مورد نظر به‌دست می‌آوریم.



(الف) پتانسیل حاصل از بار دیفرانسیلی $dq = \lambda dx$، در مبدأ چنین می‌شود:

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r}$$

$$\Rightarrow\quad V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{0/20}\frac{(bx)dx}{x} = \frac{bx}{4\pi\varepsilon_0}\Big|_0^{0/20} = 36\,\text{V}$$

که در آن از $b = 20\times10^{-9}\,\text{C/m}^2$ استفاده کردیم.

(ب) در این حالت $r = \sqrt{x^2+d^2}$ می‌شود که در آن $d = 0/15\,\text{m}$ است.

بنابراین داریم:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{0/20}\frac{(bx)dx}{\sqrt{x^2+d^2}} = \frac{b}{4\pi\varepsilon_0}(\sqrt{x^2+d^2})\Big|_0^{0/20}$$

$$= 18\,\text{V}$$

در محاسبه‌ی انتگرال بالا از تغییر متغیر $x^2+d^2=u$ استفاده کردیم.

۳۳••• GO میله‌ی پلاستیکی نازک نشان داده شده در شکل ۲۴-۴۷ دارای طول $L = 12/0\,\text{cm}$ و چگالی خطی بار یکنواخت $\lambda = cx$ است، که در آن $c = 28/9\,\text{pC/m}^2$. به‌ازای $V=0$ در فاصله‌ی نامتناهی، پتانسیل الکتریکی را در نقطه‌ی P_1 واقع بر محور، به فاصله‌ی $d = 3/00\,\text{cm}$ از یک سر میله به‌دست آورید.

Scanned by CamScanner

حل این مسئله، مشابه مسئله ۲۸ است و تنها تفاوتش با آن در این است که چگالی بار متغیر و برابر با $dq=\lambda dx = cx\,dx$ است. به همان ترتیب خواهیم داشت:

$$dV=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{cx\,dx}{d+x}$$

و از آنجا

$$V=\frac{c}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^L\frac{x\,dx}{d+x}$$

آنگاه با تغییر متغیر $d+x=u$ خواهیم داشت:

$$V=\frac{c}{4\pi\varepsilon_0}\int_d^{d+L}\frac{(u-d)du}{u}=\frac{c}{4\pi\varepsilon_0}\Big[u-d\ln u\Big]_d^{d+L}$$

$$=\frac{c}{4\pi\varepsilon_0}\left[L-d\ln\left(\frac{d+L}{d}\right)\right]=\frac{c}{4\pi\varepsilon_0}\left[L-d\ln\left(1+\frac{L}{d}\right)\right]$$

که در یکاهای SI چنین به‌دست می‌دهد:

$$V=(8{,}99\times10^{9})(28{,}9\times10^{-12})\left[0{,}120-(0{,}0300)\ln\left(1+\frac{0{,}120}{0{,}0300}\right)\right]$$

$$=1{,}86\times10^{-2}\text{V}=18{,}6\text{ mV}$$

بخش ۲۴-۶ محاسبه‌ی میدان الکتریکی از روی پتانسیل الکتریکی

۳۴• دو صفحه‌ی فلزی موازی و بزرگ به فاصله‌ی ۱٫۵cm از هم قرار دارند و دارای بارهایی با بزرگی یکسان ولی علامت‌های مخالف در سطوح مقابل‌اند. پتانسیل صفحه‌ی منفی را صفر اختیار کنید. اگر، در این صورت، پتانسیل در وسط صفحه‌ها ۵٫۰V+ باشد، میدان الکتریکی در ناحیه‌ی میان صفحه‌ها چقدر است؟

حل بزرگی میدان الکتریکی با رابطه‌ی زیر داده می‌شود:

$$|\vec{E}|=\left|-\frac{\Delta V}{\Delta x}\right|=\frac{2(5{,}0\text{V})}{0{,}015\text{m}}=6{,}7\times10^{2}\text{ V/m}$$

در هر نقطه‌ای در فضای میان صفحه‌ها، جهت $\vec{E}$ از سوی صفحه‌ی مثبت به سوی صفحه‌ی منفی است.

۳۵• پتانسیل الکتریکی در نقاط واقع در صفحه‌ی xy با $V=(2{,}0\text{V/m}^2)x^2-(3{,}0\text{V/m}^2)y^2$ داده شده است. برحسب نمادگذاری بردارهای یکه، میدان الکتریکی در نقطه‌ی $(3{,}0\text{m},2{,}0\text{m})$ چیست؟

حل با استفاده از معادله‌ی ۲۴-۴۱ داریم:

$$E_x(x,y)=-\frac{\partial V}{\partial x}=-\frac{\partial}{\partial x}\left((2{,}0\text{V/m}^2)x^2-(3{,}0\text{V/m}^2)y^2\right)$$
$$=-2(2{,}0\text{V/m}^2)x=-(4{,}0\text{V/m}^2)(3{,}0\text{m})$$
$$=-12\text{V/m}$$

و

$$E_y(x,y)=-\frac{\partial V}{\partial y}=-\frac{\partial}{\partial y}\left((2{,}0\text{V/m}^2)x^2-(3{,}0\text{V/m}^2)y^2\right)$$
$$=-2(3{,}0\text{V/m}^2)y=2(3{,}0\text{V/m}^2)(2{,}0\text{m})=12\text{V/m}$$

پس، میدان الکتریکی چنین می‌شود:

$$\vec{E}=E_x\hat{\mathbf{i}}+E_y\hat{\mathbf{j}}=(-12\text{V/m})\hat{\mathbf{i}}+(12\text{V/m})\hat{\mathbf{j}}$$

می‌توانیم جهت و بزرگی این میدان را نیز به‌دست آوریم. جهت آن با محور... است که ۴۵°− می‌شود و برای بزرگی آن داریم:

$$E=\sqrt{E_x^2+E_y^2}=\sqrt{2}(12\text{V/m})=17\text{V/m}$$

۳۶• پتانسیل الکتریکی V در فضای میان دو صفحه‌ی موازی تخت ۱ و ۲ با $V=1500x^2$ (برحسب ولت) داده شده است، که در آن x (برحسب متر) فاصله‌ی عمودی از صفحه‌ی ۱ است. در $x=1{,}3$cm (الف) بزرگی میدان الکتریکی چقدر است و (ب) آیا جهت این میدان به سمت صفحه‌ی ۱ است و یا از آن دور می‌شود؟

حل از معادله‌ی ۲۴-۴۱ استفاده می‌کنیم. چون در اینجا پتانسیل تابعی از فقط یک متغیر است، مشتق پاره‌ای به مشتق کامل تبدیل می‌شود و داریم:

$$\vec{E}=-\left(\frac{dV}{dx}\right)\hat{\mathbf{i}}=-\frac{d}{dx}(1500x^2)\hat{\mathbf{i}}=(-3000x)\hat{\mathbf{i}}$$
$$=(-3000\text{V/m}^2)(0{,}013\text{m})\hat{\mathbf{i}}=(-39\text{V/m})\hat{\mathbf{i}}$$

(الف) بنابراین بزرگی میدان الکتریکی $E=39\text{V/m}$ است.

(ب) $\vec{E}$ در جهت $-\hat{\mathbf{i}}$ و یا به سوی صفحه‌ی ۱ است.

۳۷•• اگر پتانسیل الکتریکی با $V=2{,}00\,xyz^2$ داده شده باشد، که در آن V برحسب ولت و x، y و z برحسب مترند، بزرگی میدان الکتریکی در نقطه‌ی $(3{,}00\hat{\mathbf{i}}-2{,}00\hat{\mathbf{j}}+4{,}00\hat{\mathbf{k}})$ چقدر می‌شود؟

حل از معادله‌ی ۲۴-۴۱ استفاده می‌کنیم:

$$E_x=-\frac{\partial V}{\partial x}=-2{,}00yz^2$$

$$E_y=-\frac{\partial V}{\partial y}=-2{,}00xz^2$$

$$E_z=-\frac{\partial V}{\partial z}=-4{,}00xyz$$

که در مختصات $(x,y,z)=(3{,}00,-2{,}00,4{,}00)$ به $(E_x,E_y,E_z)=(64{,}0,-96{,}0,96{,}0)$ در یکاهای SI می‌انجامد. بنابراین بزرگی میدان برابر است با

$$|\vec{E}|=\sqrt{E_x^2+E_y^2+E_z^2}=150\text{V/m}=150\text{N/C}$$

۳۸•• شکل ۲۴-۴۷ یک میله‌ی پلاستیکی نازک به طول $L=13{,}5$cm و بار یکنواخت ۴۳٫۶fC را نشان می‌دهد. (الف) برحسب فاصله‌ی d، رابطه‌ای برای پتانسیل الکتریکی در نقطه‌ی P_1 به‌دست آورید. (ب) سپس، متغیر x را با d جایگزین کنید و رابطه‌ای برای بزرگی مؤلفه‌ی E_x میدان الکتریکی در نقطه‌ی P_1 به‌دست آورید. (پ) جهت E_x نسبت به سوی مثبت محور x چگونه است؟ (ت) مقدار E_x در نقطه‌ی P_1 به‌ازای $x=d=6{,}20$cm چقدر است؟ (ث) از روی تقارن شکل ۲۴-۴۷، E_y را در نقطه‌ی P_1 تعیین کنید.

Scanned by CamScanner

حل (الف) این عبارت را قبلاً در حلّ مسئله‌ی ۲۸ به‌دست آوردیم:

$$V=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}\ln\left(1+\frac{L}{d}\right)$$

که در یکاهای SI چنین به‌دست می‌دهد:

$$V=\frac{(8{,}99\times10^{9})(43{,}6\times10^{-15})}{0{,}135}\ln\left(1+\frac{0{,}135}{d}\right)$$

$$=(2{,}90\times10^{-3}\,\mathrm{V})\ln\left(1+\frac{0{,}135}{d}\right)$$

(ب) برای یافتن مؤلفه‌ی x میدان الکتریکی (در یکاهای SI) از عبارت پتانسیل نسبت به x مشتق می‌گیریم:

$$E_x=-\frac{\partial V}{\partial x}=-\frac{dV}{dx}=-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}\frac{d}{dx}\ln\left(\frac{x-L}{x}\right)$$

$$=-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{x}{x-L}\right)\left(\frac{1}{x}-\frac{x-L}{x^2}\right)=-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x(x-L)}$$

$$=-\frac{(8{,}99\times10^{9})(43{,}6\times10^{-15})}{x(x+0{,}135)}=-\frac{(3{,}92\times10^{-4})}{x(x+0{,}135)}$$

و با

$$|E_x|=\frac{(3{,}92\times10^{-4})}{(x+0{,}135)}$$

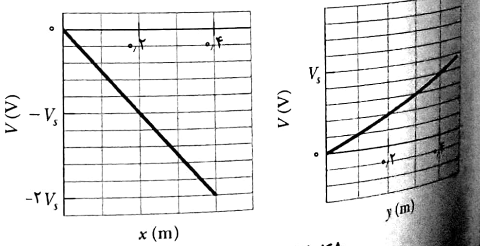
(پ) چون $E_x<0$، جهت آن نسبت به سوی مثبت محور x برابر 180° است.

(ت) در $x=-d$، در یکاهای SI به‌دست می‌آوریم:

$$|E_x|=\frac{(3{,}92\times10^{-4})}{(0{,}0620)(0{,}0620+0{,}135)}=0{,}032\,\mathrm{N/C}$$

(ث) دو نقطه با فاصله‌ی بسیار کوچک را در دو طرف P_1، روی خطی که عمود بر محور x است، در نظر بگیرید. اختلاف پتانسیل الکتریکی بخش بر فاصله‌ی جدایی آنها، بزرگی مؤلفه‌ی عرضی میدان الکتریکی را به‌دست می‌دهد. چون این دو نقطه به‌طور متقارنی نسبت به میله قرار گرفته‌اند، پتانسیل‌های آنها یکسان و بنابراین اختلاف پتانسیل‌شان برابر با صفر است و در نتیجه، مؤلفه‌ی عرضی میدان الکتریکی E_y برابر صفر است.

۳۹●● الکترونی در صفحه‌ی xy قرار دارد که در آنجا پتانسیل الکتریکی، همان طور که در شکل ۲۴-۵۱ نشان داده شده است، به x و y بستگی دارد (پتانسیل مستقل از z است). محور قائم با $V_s=500\,\mathrm{V}$ مقیاس‌بندی شده است. بر حسب نمادگذاری بردارهای یکه، نیروی الکتریکی وارد بر این الکترون چیست؟



شکل ۲۴-۵۱ مسئله‌ی ۳۹

حل طبق معادله‌ی ۲۴-۴۱، میدان الکتریکی در راستای یک محور برابر با منفیِ مشتق پتانسیل V نسبت به مختصه‌ی مربوط به آن محور است. در اینجا، مشتق‌ها را می‌توان از روی شیب منحنی‌های داده شده به‌دست آورد (زیرا این منحنی‌ها خط‌های مستقیمی هستند). بنابراین داریم:

$$E_x=-\frac{dV}{dx}=-\left(\frac{-500\,\mathrm{V}}{0{,}20\,\mathrm{m}}\right)=2500\,\mathrm{V/m}=2500\,\mathrm{N/C}$$

$$E_y=-\frac{dV}{dy}=-\left(\frac{300\,\mathrm{V}}{0{,}30\,\mathrm{m}}\right)=-1000\,\mathrm{V/m}=-1000\,\mathrm{N/C}$$

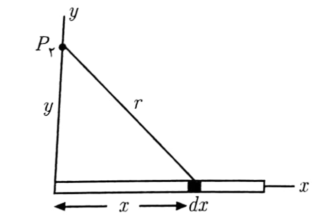
از اینجا می‌توانیم بزرگی میدان الکتریکی $E=\sqrt{E_x^2+E_y^2}=2693\,\mathrm{N/C}$ و جهت آن (نسبت به سوی مثبت محور x) $\theta=\tan^{-1}E_y/E_x=-21{,}80^\circ$ را به‌دست آوریم. ولی آنچه که موردنظر مسئله است، نیروی الکتریکی وارد بر الکترون، بر حسب بردارهای یکه است. نیروی الکتریکی از $\vec F=q\vec E$ به‌دست می‌آید که در اینجا $q=-e$ است. علامت منفی بار حاکی از آن است که سوی $\vec F$ در خلاف جهت میدان الکتریکی $\vec E$ است (یعنی زاویه‌ی آن با اضافه کردن 180° به جهت $\vec E$ به‌دست می‌آید). در هر حال، به‌ازای $e=1{,}60\times10^{-19}\,\mathrm{C}$ برای نیروی الکتریکی $\vec F$ خواهیم داشت:

$$\vec F=(1{,}60\times10^{-19}\,\mathrm{C})\left[(2500\,\mathrm{N/C})\hat{\mathbf i}-(1000\,\mathrm{N/C})\hat{\mathbf j}\right]$$

$$=(-4{,}0\times10^{-16}\,\mathrm{N})\hat{\mathbf i}+(1{,}60\times10^{-16}\,\mathrm{N})\hat{\mathbf j}$$

۴۰●●● GO میله‌ی پلاستیکی نازک شکل ۲۴-۴۷ دارای طول $L=10{,}0\,\mathrm{cm}$ و چگالی خطی بار $\lambda=cx$ است، که در آن $c=49{,}9\,\mathrm{pC/m^2}$. (الف) به‌ازای $V=0$ در فاصله‌ی نامتناهی، پتانسیل الکتریکی در نقطه‌ی P_2 روی محور y، واقع در $y=D=3{,}56\,\mathrm{cm}$ چقدر است؟ (ب) مؤلفه‌ی E_y میدان الکتریکی در نقطه‌ی P_2 چیست؟ (پ) چرا مؤلفه‌ی E_x میدان در نقطه‌ی P_2 را نمی‌توان با استفاده از نتیجه‌ی قسمت (الف) به‌دست آورد؟

حل (الف) یک عنصر دیفرانسیلی به طول dx از میله در نظر می‌گیریم و پتانسیل حاصل از آن را در نقطه‌ی P_2 به‌دست می‌آوریم.



$$dV=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dx}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{cx}{\sqrt{x^2+y^2}}dx$$

و از آنجا با انتگرال‌گیری روی کلّ میله، پتانسیل در نقطه‌ی P_2 (در یکاهای SI) به‌دست می‌آید:

$$V=\int dV=\frac{c}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^L \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx=\frac{c}{4\pi\varepsilon_0}\left[\sqrt{x^2+y^2}\right]_0^L$$

$$=\frac{c}{4\pi\varepsilon_0}\left(\sqrt{L^2+y^2}-y\right)$$

$$=(8{,}99\times10^{9})(49{,}9\times10^{-12})\times\sqrt{(0{,}100)^2+(0{,}0356)^2}-0{,}0356)$$

$$=3{,}16\times10^{-2}\,\mathrm{V}$$

(ب) مؤلفه‌ی y میدان الکتریکی از معادله‌ی ۲۴-۴۱ کتاب به‌دست می‌آید:

$$E_y=-\frac{\partial V}{\partial y}=-\frac{c}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d}{dy}\left(\sqrt{L^2+y^2}-y\right)$$

$$=\frac{c}{4\pi\varepsilon_0}\left(1-\frac{y}{\sqrt{L^2+y^2}}\right)$$

که در یکاهای SI چنین می‌شود:

$$E_y=(8{,}99\times10^{9})(49{,}9\times10^{-12})\left(1-\frac{0{,}0356}{\sqrt{(0{,}100)^2+(0{,}0356)^2}}\right)$$

$$=0{,}298\,\mathrm{N/C}$$

(پ) ما پتانسیل را بر روی محور مشخصی (محور y) به‌دست آوردیم و چون بر روی این محور، $x=0$ است، نمی‌توانیم از تغییرات x صحبت کنیم. به همین ترتیب اگر پتانسیل را بر روی محور x به‌دست می‌آوردیم، مؤلفه‌ی E_y را نمی‌توانستیم به‌دست آوریم. برای آنکه $E_x(x,y)$ و یا $E_y(x,y)$ را به‌دست آوریم لازم است که نخست $V(x,y)$، یعنی پتانسیل برای نقطه‌ی دلخواهی واقع در (x,y)، را به‌دست آوریم و آنگاه می‌توانیم با استفاده از رابطه‌های زیر، E_x یا E_y را محاسبه کنیم:

$$E_x(x,y)=-\frac{\partial V(x,y)}{\partial x}\quad,\quad E_y(x,y)=-\frac{\partial V(x,y)}{\partial y}$$

بخش ۲۴-۷ انرژی پتانسیل الکتریکی دستگاهی از بارهای نقطه‌ای

۴۱• ذره‌ای با بار $+7{,}5\mu C$ از حالت سکون در نقطه‌ی $x=60\,\mathrm{cm}$ روی محور x رها می‌شود. این ذره، تحت تأثیر بار Q که در مبدأ ثابت شده است، شروع به حرکت می‌کند. انرژی جنبشی ذره در لحظه‌ای که به اندازه‌ی ۴۰ cm حرکت کرده است، در صورتی که (الف) $Q=20\mu C$ و (ب) $Q=-20\,\mu C$ باشد، چقدر است؟

حل (الف) پایستگی انرژی را برای ذره‌ی به بار $q=7{,}5\times10^{-6}\,\mathrm{C}$ به‌کار می‌گیریم. با توجه به اینکه انرژی جنبشی اولیه صفر است، خواهیم داشت:

$$U_i=K_f+U_f$$

که در آن $U=qQ/4\pi\varepsilon_0 r$ است که مقادیر ابتدایی و انتهایی r، اولیه و نهایی بودن پتانسیل U را متمایز می‌کند.

(الف) مقدار اولیه‌ی r برابر با ۰٫۶۰m و مقدار نهایی آن $(0{,}60\mathrm{m}+0{,}40\mathrm{m})=1{,}0\mathrm{m}$ است. (توجه کنید مقادیر از آن‌رو با هم جمع شده‌اند که بارها هم‌علامت‌اند و همدیگر را دفع می‌کنند). بنابراین در یکاهای SI خواهیم داشت:

$$K_f=\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_i}-\frac{1}{r_f}\right)$$

$$=(8{,}99\times10^{9})(7{,}5\times10^{-6})(20\times10^{-6})\left(\frac{1}{0{,}60}-\frac{1}{1{,}0}\right)$$

$$=0{,}90\,\mathrm{J}$$

(ب) توجه کنید این دفعه علامت بارها مخالف‌اند و بنابراین مقدار نهایی r برابر با $r_f=0{,}60\mathrm{m}-0{,}40\mathrm{m}=0{,}20\mathrm{m}$ می‌شود که به‌ازای $K_f=4{,}5\mathrm{J}$ می‌انجامد.

۴۲• (الف) انرژی پتانسیل الکتریکی دو الکترون که به فاصله‌ی ۲٫۰ nm از هم قرار دارند، چقدر است؟ (ب) اگر این فاصله افزایش یابد آیا انرژی پتانسیل افزایش می‌یابد یا کاهش؟

حل (الف) الکترون‌ها را به‌ترتیب از بی‌نهایت آورده و در مکان‌هایشان قرار می‌دهیم:

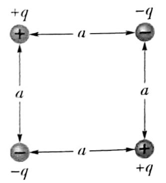
$$U=W_1+W_2=0+V_1q_2=k\frac{q_1q_2}{r}=k\frac{e^2}{r}$$

$$=\frac{(8{,}99\times10^{9}\mathrm{N\cdot m^2/C^2})(1{,}60\times10^{-19}\mathrm{C})^2}{2{,}0\times10^{-9}\mathrm{m}}$$

$$=1{,}5\times10^{-19}\,\mathrm{J}$$

(ب) چون $U>0$ و $U\propto 1/r$ است، انرژی پتانسیل U با افزایش r کاهش می‌یابد.

۴۳• ILW WWW برای تشکیل چیدمان بارهای شکل ۲۴-۵۲ چقدر کار لازم است، اگر $q=2{,}30\,\mathrm{pC}$، $a=64{,}0\,\mathrm{cm}$، و ذره‌ها ابتدا در فاصله‌ای نامتناهی از هم قرار داشته و ساکن باشند؟



شکل ۲۴-۵۲ مسئله‌ی ۴۳

حل انرژی پتانسیل الکتریکی برابر کاری است که باید انجام دهیم تا این چهار بار را از بی‌نهایت به نقاط مورد نظر بیاوریم. بارها را به‌ترتیب از بی‌نهایت می‌آوریم. فرقی ندارد که با کدام بار آغاز کنیم. مثلاً با بار $+q$ در گوشه‌ی بالایی شروع می‌کنیم و پس از آن $-q$، $+q$ و $-q$ را می‌آوریم.

$$W_1=0\,,\;W_2=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}\,,\;W_3=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}+\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{2}a}$$

$$W_4=-\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}-\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}+\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{2}a}$$

و در نتیجه در یکاهای SI خواهیم داشت:

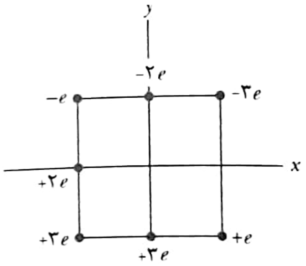
$$U = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left[0 - 1 - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

$$= \frac{2q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 2\right)$$

$$= \frac{2(8{,}99\times10^{9})(2{,}30\times10^{-12})^2}{(0{,}640)}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 2\right)$$

$$= -1{,}92\times10^{-13}\,\text{J} = 0{,}192\,\text{pJ}$$

۴۴● در شکل ۲۴-۵۳ هفت ذره‌ی باردار برای تشکیل مربعی به ضلع $4{,}0\,\text{cm}$ در جای خود ثابت شده‌اند. چقدر کار باید صورت پذیرد تا ذره‌ای با بار $+6e$ که در ابتدا ساکن است از فاصله‌ای نامتناهی به مرکز مربع آورده شود؟



شکل ۲۴-۵۳ مسئله‌ی ۴۴

حل کار برابر با تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی است. پتانسیل ذره در بی‌نهایت برابر صفر است، و پتانسیل در مرکز مربع به‌راحتی برابر با $V = 3e/4\pi\varepsilon_0 r$ می‌شود که در آن $r = 0{,}020\,\text{m}$ است. کار انجام شده برای آنکه بار $+6e$ از بی‌نهایت به مرکز مربع آورده شود برابر است با

$$W = (V)(6e) = \frac{(3e)(6e)}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$= \frac{18(8{,}99\times10^{9}\,\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(1{,}60\times10^{-19}\,\text{C})^2}{0{,}020\,\text{m}}$$

$$= 2{,}1\times10^{-25}\,\text{J}$$

۴۵●● ILW ذره‌ای با بار q در نقطه‌ی P ثابت شده است، و ذره‌ی دیگری به جرم m و همان بار q در ابتدا به فاصله‌ی r_1 از P نگه داشته شده است. سپس ذره‌ی دوم رها می‌شود. تندی این ذره را وقتی در فاصله‌ی r_2 از P قرار دارد، تعیین کنید. فرض کنید $q = 3{,}1\,\mu\text{C}$، $m = 20\,\text{mg}$، $r_1 = 0{,}90\,\text{mm}$، و $r_2 = 2{,}5\,\text{mm}$ است.

حل از اصل پایستگی انرژی استفاده می‌کنیم. انرژی پتانسیل الکتریکی دستگاه تنها ناشی از ذره‌ی دوم است و برای انرژی پتانسیل اولیه‌ی دستگاه داریم $U_i = q^2/4\pi\varepsilon_0 r_1$ و انرژی جنبشی اولیه‌ی دستگاه $K_i = 0$ است. انرژی پتانسیل نهایی دستگاه $U_f = q^2/4\pi\varepsilon_0 r_2$ و انرژی جنبشی نهایی دستگاه $K_f = \frac{1}{2}mv^2$ است که در آن v تندی ذره است. در نتیجه پایستگی انرژی چنین به‌دست می‌دهد:

$$E_i = E_f \quad\Rightarrow\quad \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1} = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2} + \frac{1}{2}mv^2$$

آن را برای v حل می‌کنیم:

$$v = \sqrt{\frac{2q^2}{4\pi\varepsilon_0 m}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{(8{,}99\times10^{9}\,\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(3{,}1\times10^{-6}\,\text{C})^2}{20\times10^{-6}\,\text{kg}}\left(\frac{1}{0{,}90\times10^{-3}\,\text{m}} - \frac{1}{2{,}5\times10^{-3}\,\text{m}}\right)}$$

$$= 2{,}5\times10^{3}\,\text{m/s} = 2{,}5\,\text{km/s}$$

۴۶●● بار $-9{,}0\,\text{nC}$ به‌طور یکنواخت روی حلقه‌ی پلاستیکی نازکی توزیع شده است که در صفحه‌ی yz واقع است و مرکز آن در مبدأ قرار دارد. بار نقطه‌ای $-6{,}0\,\text{pC}$ روی محور x در $x = 3{,}0\,\text{m}$ قرار دارد. برای حلقه‌ای به شعاع $1{,}5\,\text{m}$، یک نیروی خارجی باید چقدر کار روی بار نقطه‌ای انجام دهد تا آن را به مبدأ بیاورید؟

حل پتانسیل حاصل از یک حلقه‌ی باردار در نقطه‌ای روی محور حلقه واقع بر محور x از رابطه‌ی $V = kq_1/\sqrt{x^2 + a^2}$ به‌دست می‌آید که در آن a شعاع حلقه است. در نتیجه کار انجام شده توسط عامل خارجی چنین می‌شود:

$$W = \Delta U = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}\right)$$

$$= (-9{,}0\times10^{-9}\,\text{C})(-6{,}0\times10^{-12}\,\text{C})(8{,}99\times10^{9}\,\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)$$

$$\times\left[\frac{1}{1{,}5\,\text{m}} - \frac{1}{\sqrt{(1{,}5\,\text{m})^2 + (3{,}0\,\text{m})^2}}\right] = 1{,}8\times10^{-10}\,\text{J}$$

۴۷●● GO *تندی فرار* الکترونی که در ابتدا به حالت سکون روی سطح کره‌ای به شعاع $1{,}0\,\text{cm}$ و باری با توزیع یکنواخت $1{,}6\times10^{-15}\,\text{C}$ قرار دارد، چیست؟ یعنی، تندی اولیه‌ی الکترون باید چقدر باشد تا الکترون به فاصله‌ی نامتناهی از کره برسد و دارای انرژی جنبشی صفر در آنجا شود؟

حل توجه کنید که چون طبق تعریف تندی فرار، ذره (اینجا الکترون) در بی‌نهایت متوقف می‌شود، بنابراین انرژی نهایی الکترون برابر با صفر است و بنابراین از پایستگی انرژی خواهیم داشت:

$$\frac{1}{2}m_e v^2 + \frac{-eq}{4\pi\varepsilon_0 r} = 0$$

که به‌ازای $q = 10000e$، $e = 1{,}60\times10^{-19}\,\text{C}$، $m_e = 9{,}11\times10^{-31}\,\text{kg}$ و $r = 0{,}010\,\text{m}$ به $v \approx 2{,}2\times10^{4}\,\text{m/s} = 22\,\text{km/s}$ می‌انجامد.

۴۸●● یک پوسته‌ی نازک رسانای کروی به شعاع R روی پایه‌ی عایقی قرار گرفته است و تا پتانسیل $-125\,\text{V}$ باردار شده است. سپس الکترونی از نقطه‌ی P به فاصله‌ی r از مرکز پوسته $(r \gg R)$ مستقیماً به سمت مرکز پوسته شلیک می‌شود. تندی اولیه‌ی v_0 مورد نیاز برای آنکه الکترون پیش از تغییر جهت، درست به پوسته برسد چقدر است؟

حل از پایستگی انرژی استفاده می‌کنیم. تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی دستگاه الکترون ـ پوسته $\Delta U = (-e)(-V) = eV$ است و تغییر انرژی جنبشی دستگاه برابر با انرژی جنبشی اولیه الکترون $K = \frac{1}{2}m_e v_i^2$

است (زیرا سرعت الکترون در لحظه‌ی معکوس شدن جهت حرکتش برابر صفر است). بنابراین $eV = \frac{1}{2}m_e v_i^2$ است و از آنجا برای تندی اولیه‌ی الکترون خواهیم داشت:

$$v_i = \sqrt{\frac{2eV}{m_e}} = \sqrt{\frac{2(1{,}60\times10^{-19}\,C)(125\,V)}{9{,}11\times10^{-31}\,kg}}$$

$$= 6{,}63\times10^{6}\,m/s$$

۴۹•• دو الکترون در فاصله‌ی ۲٫۰ cm از یکدیگر ثابت شده‌اند. الکترون دیگری از فاصله‌ی نامتناهی شلیک و در وسط این دو الکترون متوقف می‌شود. تندی اولیه‌ی این الکترون چقدر بوده است؟

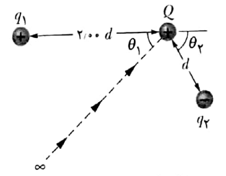
حل از پایستگی انرژی استفاده می‌کنیم. انرژی پتانسیل دستگاه ناشی از الکترون متحرک است. وقتی این الکترون در بی‌نهایت است، انرژی پتانسیل آن را صفر در نظر می‌گیریم و بنابراین انرژی پتانسیل اولیه‌ی دستگاه برابر صفر است. انرژی پتانسیل نهایی دستگاه $U_f = 2e^2/4\pi\varepsilon_0 d$ است که d "نصف فاصله" بین دو الکترون ثابت شده است. همچنین انرژی جنبشی اولیه‌ی دستگاه $K_i = \frac{1}{2}m_e v^2$ و انرژی جنبشی نهایی آن صفر است (زیرا الکترون سرانجام متوقف می‌شود). در نتیجه پایستگی انرژی $\frac{1}{2}m_e v^2 = 2e^2/4\pi\varepsilon_0 d$ را به‌دست می‌دهد و از آنجا v را به‌دست می‌آوریم:

$$v = \sqrt{\frac{4e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e d}}$$

$$= \sqrt{\frac{(8{,}99\times10^{9}\,N\cdot m^2/C^2)(4)(1{,}60\times10^{-19}\,C)^2}{(9{,}11\times10^{-31}\,kg)(0{,}010\,m)}}$$

$$= 3{,}2\times10^{2}\,m/s$$

۵۰••• در شکل ۲۴-۵۴، چقدر کار باید انجام گیرد تا ذره‌ای با بار $Q = +16e$ که در ابتدا ساکن است، در طول مسیر خط‌چین از فاصله‌ای نامتناهی به نقطه‌ی مشخص‌شده در نزدیکی بارهای ثابت‌شده‌ی $q_1 = +4e$ و $q_2 = -q_1/2$ آورده شود؟ فاصله $d = 1{,}40$ cm، $\theta_1 = 43°$ و $\theta_2 = 60°$ است.



شکل ۲۴-۵۴ مسئله‌ی ۵۰

حل کار انجام شده مستقل از مسیر است و بنابراین داریم:

$$W = \Delta U = (V_1 + V_2)Q = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1 Q}{2d} + \frac{q_2 Q}{d}\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1 Q}{2d} + \frac{(-q_1/2)Q}{d}\right] = 0$$

۵۱•• در مستطیل شکل ۲۴-۵۵، طول ضلع‌ها ۵٫۰ cm و ۱۵ cm، $q_1 = -5{,}0\,\mu C$ و $q_2 = +2{,}0\,\mu C$ است. به‌ازای $V = 0$ در فاصله‌ی نامتناهی، پتانسیل الکتریکی در (الف) گوشه‌ی A و (ب) گوشه‌ی B چقدر است؟ (پ) چقدر کار لازم است تا بار $q_3 = +3{,}0\,\mu C$ در طول قطر این مستطیل از B به A حرکت داده شود؟ (ت) آیا این کار انرژی پتانسیل الکتریکی این دستگاه سه‌ذره‌ای را افزایش می‌دهد یا کاهش؟ اگر q_3 در طول مسیری (ث) در داخل مستطیل، ولی نه روی یک قطر، و (ج) در بیرون مستطیل حرکت داده شود، آیا باید کار بیشتری انجام شود یا کمتر یا کاری مساوی آن؟

شکل ۲۴-۵۵ مسئله‌ی ۵۱

حل (الف) $l = 0{,}15$ m را طول و $w = 0{,}050$ m را عرض مستطیل در نظر بگیرید. بار q_1 به فاصله‌ی l و بار q_2 به فاصله‌ی w از نقطه‌ی A واقع‌اند و بنابراین پتانسیل الکتریکی در نقطه‌ی A چنین می‌شود:

$$V_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1}{l} + \frac{q_2}{w}\right]$$

$$= (8{,}99\times10^{9}\,N\cdot m^2/C^2)\left[\frac{-5{,}0\times10^{-6}\,C}{0{,}15\,m} + \frac{2{,}0\times10^{-6}\,C}{0{,}050\,m}\right]$$

$$= 6{,}0\times10^{4}\,V$$

(ب) بار q_1 به فاصله‌ی w و بار q_2 به فاصله‌ی l از نقطه‌ی B واقع‌اند و بنابراین پتانسیل الکتریکی در نقطه‌ی B چنین می‌شود:

$$V_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1}{w} + \frac{q_2}{l}\right]$$

$$= (8{,}99\times10^{9}\,N\cdot m^2/C^2)\left[\frac{-5{,}0\times10^{-6}\,C}{0{,}050\,m} + \frac{2{,}0\times10^{-6}\,C}{0{,}15\,m}\right]$$

$$= -7{,}8\times10^{5}\,V$$

(پ) حال که پتانسیل دو نقطه‌ی A و B را داریم، می‌توانیم به‌راحتی کار لازم برای حرکت بار سوم از B به A را به‌دست آوریم. در واقع بار سوم در اختلاف پتانسیل این دو نقطه حرکت می‌کند و داریم:

$$W = U_A - U_B = q_3(V_A - V_B)$$

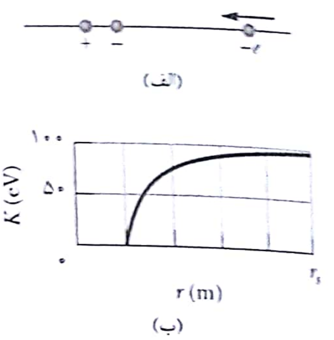
$$= (3{,}0\times10^{-6}\,C)(6{,}0\times10^{4}\,V + 7{,}8\times10^{5}\,V) = 2{,}5\,J$$

(ت) کار خارجی به انرژی پتانسیل الکتریکی دستگاه تبدیل می‌شود. چون پتانسیل A از پتانسیل B بیشتر و در نتیجه کار انجام شده مثبت است، بنابراین بر انرژی پتانسیل الکتریکی دستگاه افزوده می‌شود.

(ث) و (ج) نیروی الکتروستاتیکی پایستار است و بنابراین اختلاف پتانسیل و کار انجام شده مستقل از مسیر هستند. پس کار انجام شده همان کار قبلی است.

Scanned by CamScanner

۵۲۰۰ شکل ۲۴-۵۶ الف، الکترونی را نشان می‌دهد که روی محور یک دوقطبی الکتریکی به سمت طرف منفی این دوقطبی در حرکت است. دوقطبی در مکان خود ثابت شده است. الکترون در ابتدا، با انرژی جنبشی ۱۰۰eV در فاصله‌ای بسیار دور بوده است. شکل ۲۴-۵۶ ب انرژی جنبشی K ی این الکترون را برحسب فاصله‌ی r آن از مرکز دوقطبی نشان می‌دهد محور افقی با $r_s = ۰٫۱۰\,\text{m}$ مقیاس‌بندی شده است. بزرگی گشتاور دوقطبی چقدر است؟



شکل ۲۴-۵۶ مسئله‌ی ۵۲

حل با استفاده از معادله‌های ۲۴-۷ و ۲۴-۳۰ (به‌ازای $\theta = ۱۸۰^\circ$) خواهیم داشت:

$$U = qV = -e\left(\frac{p\cos\theta}{۴\pi\varepsilon_\circ r^۲}\right) = \frac{ep}{۴\pi\varepsilon_\circ r^۲}$$

که در آن p بزرگی گشتاور دوقطبی الکتریکی است. برای آنکه p را به دست آوریم به انرژی پتانسیل U نیاز داریم. U را با استفاده از پایستگی انرژی به‌دست می‌آوریم. در فاصله‌ی بسیار دور $U_i = ۰$ در نظر می‌گیریم و طبق فرض $K_i = ۱۰۰\text{eV}$ بوده است. از روی منحنی شکل (ب) درمی‌یابیم که در $r = ۰٫۰۲۰\text{m}$، انرژی جنبشی الکترون صفر می‌شود. پس پایستگی انرژی را بین نقطه‌ی ابتدایی و این نقطه می‌نویسیم و به‌ازای $r = ۰٫۰۲۰\text{m}$ داریم $K_f = ۰$. بنابراین انرژی پتانسیل در این نقطه برابر ۱۰۰V می‌شود و با قرار دادن این مقدار و $r = ۰٫۰۲۰\text{m}$ در رابطه‌ی بالا، p را به‌دست می‌آوریم:

$$p = \frac{۴\pi\varepsilon_\circ r^۲ U}{e} = \frac{(۰٫۰۲۰\text{m})^۲(۱۰۰\text{V})(e)}{(۸٫۹۹\times۱۰^۹\text{N}\cdot\text{m}^۲/\text{C}^۲)(e)}$$
$$\approx ۴٫۴\times۱۰^{-۱۲}\text{C}\cdot\text{m}$$

که در آن ۱۰۰eV را به‌صورت $(۱۰۰\text{V})(e)$ نوشتیم تا eها از صورت و مخرج حذف شوند و به‌علاوه $۱\text{V} = ۱\text{N/C}$ است.

۵۳۰۰ دو کره‌ی فلزی کوچک A و B به جرم‌های $m_A = ۵٫۰۰\text{g}$ و $m_B = ۱۰٫۰\text{g}$ دارای بار مثبت $q = ۵٫۰۰\mu\text{C}$ هستند. این کره‌ها با نخ نارسانای بدون جرمی به طول $a = ۱٫۰۰\text{ m}$ به هم وصل شده‌اند، که d بسیار بزرگتر از شعاع کره‌هاست. (الف) انرژی پتانسیل الکتریکی این دستگاه چقدر است؟ (ب) فرض کنید نخ را می‌بُرید. در لحظه‌ی بریدن، شتاب هر یک از کره‌ها چقدر می‌شود؟ (پ) مدتی طولانی پس از بریدن نخ، تندی هر یک از کره‌ها چقدر است؟

حل (الف) انرژی پتانسیل برابر است با

$$U = \frac{q^۲}{۴\pi\varepsilon_\circ d} = \frac{(۸٫۹۹\times۱۰^۹\text{N}\cdot\text{m}^۲/\text{C}^۲)(۵٫۰۰\times۱۰^{-۶}\text{C})^۲}{۱٫۰۰\text{m}}$$
$$= ۰٫۲۲۵\text{J}$$

که نسبت به انرژی پتانسیل آنها در فاصله‌ی جدایی نامتناهی است. همچنین توجه شود که در اینجا از شعاع کره‌ها به دلیل آنکه d در مقایسه با آن بسیار بزرگ است، چشم‌پوشی کرده‌ایم.

(ب) شتابی که کره‌ها می‌گیرند طبق قانون دوم نیوتون از $a = F/m$ به‌دست می‌آید که F نیرویی است که با آن کره‌ها همدیگر را دفع می‌کنند:

$$F = \frac{q^۲}{۴\pi\varepsilon_\circ d} = \frac{(۸٫۹۹\times۱۰^۹\text{N}\cdot\text{m}^۲/\text{C}^۲)(۵٫۰۰\times۱۰^{-۶}\text{C})^۲}{(۱٫۰۰\text{m})^۲}$$
$$= ۰٫۲۲۵\text{N}$$

بنابراین a_A و a_B به‌ترتیب چنین می‌شوند:

$$a_A = \frac{F}{m_A} = \frac{۰٫۲۲۵\text{N}}{۵٫۰۰\times۱۰^{-۳}\text{kg}} = ۴۵٫۰\text{m/s}^۲$$

و

$$a_B = \frac{F}{m_B} = \frac{۰٫۲۲۵\text{N}}{۱۰٫۰\times۱۰^{-۳}\text{kg}} = ۲۲٫۵\text{m/s}^۲$$

(پ) از پایستگی انرژی استفاده می‌کنیم. انرژی پتانسیل اولیه‌ی دستگاه $U = ۰٫۲۲۵\text{J}$ است که در قسمت الف محاسبه کردیم. انرژی جنبشی اولیه‌ی دستگاه برابر صفر است، زیرا کره‌ها از حالت سکون رها شده‌اند. انرژی پتانسیل نهایی نیز برابر صفر است؛ زیرا پس از زمانی طولانی، کره‌ها به فاصله‌ی نامتناهی از هم می‌رسند که در آنجا پتانسیل را صفر فرض کرده‌ایم. انرژی جنبشی نهایی $\frac{۱}{۲}m_A v_A^۲ + \frac{۱}{۲}m_B v_B^۲$ است که در آن v_A و v_B تندی‌های نهایی کره‌هاست. بنابراین داریم:

$$U = \frac{۱}{۲}m_A v_A^۲ + \frac{۱}{۲}m_B v_B^۲$$

از طرفی نیروی دافعه، نیرویی داخلی است و پایستگی تکانه‌ی خطی برقرار است:

$$۰ = m_A v_A + m_B v_B$$

این معادله را به‌طور هم‌زمان برای v_A و v_B حل می‌کنیم. با قراردادن $v_B = -(m_A/m_B)v_A$ از معادله‌ی دوم در رابطه‌ی پایستگی انرژی به $U = \frac{۱}{۲}(m_A/m_B)(m_A/m_B)v_A^۲$ می‌رسیم و از آنجا خواهیم داشت:

$$v_A = \sqrt{\frac{۲Um_B}{m_A(m_A+m_B)}}$$
$$= \sqrt{\frac{۲(۰٫۲۲۵\text{J})(۱۰٫۰\times۱۰^{-۳}\text{ kg})}{(۵٫۰۰\times۱۰^{-۳}\text{ kg})(۵٫۰۰\times۱۰^{-۳}\text{ kg}+۱۰٫۰\times۱۰^{-۳}\text{ kg})}}$$
$$= ۷٫۷۵\text{m/s}$$

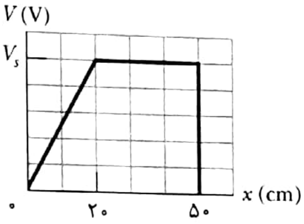
و آنگاه از پایستگی تکانه‌ی خطی، v_B را به‌دست می‌آوریم:

Scanned by CamScanner

$$v_B = -\frac{m_A}{m_b}v_A = -\left(\frac{۵٫۰۰\times ۱۰^{-۳}\,\mathrm{kg}}{۱۰٫۰\times ۱۰^{-۳}\,\mathrm{kg}}\right)(۷٫۷۵\,\mathrm{m/s})$$
$$= -۳٫۸۷\,\mathrm{m/s}$$

و یا $|v_B| = ۳٫۸۷\,\mathrm{m/s}$ می‌شود.

۵۴●● پوزیترونی (با بار $+e$ و جرمی برابر با جرم الکترون) که با تندی $۱٫۰\times ۱۰^{۷}\,\mathrm{m/s}$ در جهت مثبت محور x در حرکت است، وقتی به $x=۰$ می‌رسد با میدان الکتریکی‌ای مواجه می‌شود که در جهت مثبت محور x است. پتانسیل الکتریکی V ی مربوط به این میدان در شکل ۲۴-۵۷ نشان داده شده است. محور قائم با $V_s = ۵۰۰٫۰\,\mathrm{V}$ مقیاس‌بندی شده است. (الف) آیا پوزیترون در $x=۰$ از میدان خارج می‌شود (یعنی جهت حرکتش برمی‌گردد) یا در $x = ۰٫۵۰\,\mathrm{m}$ (یعنی جهت حرکتش برنمی‌گردد)؟ (ب) تندی پوزیترون به هنگام خروج از میدان چقدر است؟



شکل ۲۴-۵۷ مسئله‌ی ۵۴

حل (الف) با استفاده از $U = qV$ می‌توانیم منحنی پتانسیل را به منحنی انرژی پتانسیل (در یکاهای eV) تبدیل کنیم. براساس اطلاعات داده شده می‌توانیم انرژی پوزیترون را (که برابر انرژی کل آن در $x=۰$ است) در این یکاها محاسبه کنیم:

$$K_i = \frac{۱}{۲}m_e v_i^۲ = \frac{۱}{۲}(۹٫۱۱\times ۱۰^{-۳۱}\,\mathrm{kg})(۱٫۰\times ۱۰^{۷}\,\mathrm{m/s})^۲$$
$$= ۴٫۵۵\times ۱۰^{-۱۷}\,\mathrm{J}$$
$$= (۴٫۵۵\times ۱۰^{-۱۷}\,\mathrm{J})\left(\frac{۱\mathrm{eV}}{۱٫۶۰\times ۱۰^{-۱۹}\,\mathrm{J}}\right) = ۲۸۴\,\mathrm{eV} = E_i$$

که این از ارتفاع "سد" انرژی پتانسیل (که با تبدیل منحنی داده شده به انرژی پتانسیل برابر $۵۰۰\,\mathrm{eV}$ می‌شود) کوتاه‌تر است. بنابراین $x=۰$ یک نقطه‌ی بازگشت است و پوزیترون جهت حرکت خود را عوض می‌کند.

(ب) بنابراین سرعت پوزیترون در جهت $-x$ و با همان تندی سرعت اولیه می‌شود. یعنی تندی آن همان $۱٫۰\times ۱۰^{۷}\,\mathrm{m/s}$ است.

۵۵●● الکترونی با تندی اولیه‌ی $۳٫۲\times ۱۰^{۵}\,\mathrm{m/s}$ مستقیماً به سمت پروتونی پرتاب می‌شود که در مکان خود ثابت شده است. اگر این الکترون ابتدا در فاصله‌ی بسیار دوری از پروتون قرار داشته باشد، در چه فاصله‌ای از پروتون، تندی آن به طور لحظه‌ای دو برابر مقدار اولیه می‌شود؟

حل فاصله‌ی مورد نظر را با r نشان می‌دهیم و پایستگی انرژی را به‌کار می‌بندیم. داریم: $K_f = \frac{۱}{۲}m_e(۲v_i)^۲ = ۴K_i$ ، $U_f = -\frac{e^۲}{۴\pi\varepsilon_۰ r}$ ،

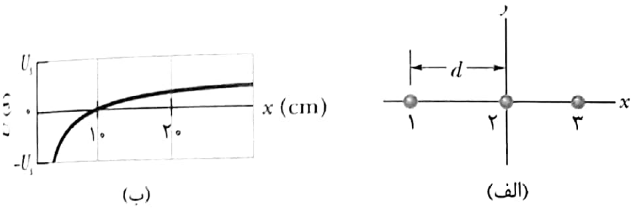
$U_i = ۰$ ، و $K_i = \frac{۱}{۲}m_e u_i^۲$ و در نتیجه $\Delta U + \Delta K = ۰$ می‌دهد:

$$\frac{-e^۲}{۴\pi\varepsilon_۰ r} = -\Delta K = -۳K_i = -\frac{۳}{۲}m_e v_i^۲$$

و از آنجا r به‌دست می‌آید:

$$r = \frac{۲e^۲}{۳(۴\pi\varepsilon_۰)m_e v_i^۲}$$
$$= \frac{۲(۱٫۶۰\times ۱۰^{-۱۹}\,\mathrm{C})^۲(۸٫۹۹\times ۱۰^{۹}\,\mathrm{N\cdot m^۲/C^۲})}{۳(۹٫۱۱\times ۱۰^{-۱۹}\,\mathrm{kg})(۳٫۲\times ۱۰^{۵}\,\mathrm{m/s})^۲}$$
$$\approx ۱٫۶\times ۱۰^{-۹}\,\mathrm{m} = ۱٫۶\,\mathrm{nm}$$

۵۶●● شکل ۲۴-۵۸ الف سه ذره را روی محور x نشان می‌دهد. ذره‌ی ۱ (با بار $+۵٫۰\,\mu\mathrm{C}$) و ذره‌ی ۲ (با بار $+۳٫۰\,\mu\mathrm{C}$) در مکان‌های خود به فاصله‌ی $d = ۴٫۰\,\mathrm{cm}$ از یکدیگر، ثابت شده‌اند. ذره‌ی ۳ می‌تواند روی محور x، به سمت راست ذره‌ی ۲ حرکت کند. شکل ۲۴-۵۸ ب انرژی پتانسیل الکتریکی U ی این دستگاه سه ذره‌ای را برحسب تابعی از مختصه‌ی x ذره‌ی ۳ نشان می‌دهد. محور قائم با $U_s = ۵٫۰\,\mathrm{J}$ مقیاس‌بندی شده است. بار ذره‌ی ۳ چیست؟



شکل ۲۴-۵۸ مسئله‌ی ۵۶

حل وقتی ذره‌ی ۳ در $x = ۰٫۱۰\,\mathrm{m}$ است، انرژی پتانسیل کل صفر می‌شود. در نتیجه، با استفاده از معادله‌ی ۲۴-۴۳ کتاب داریم:

$$۰ = \frac{q_۱q_۲}{۴\pi\varepsilon_۰ d} + \frac{q_۱q_۳}{۴\pi\varepsilon_۰(d+۰٫۱۰)} + \frac{q_۳q_۲}{۴\pi\varepsilon_۰(۰٫۱۰)}$$

که در آن یکای طول بر حسب متر است. از آنجا خواهیم داشت:

$$q_۳\left(\frac{q_۱}{d+۰٫۱۰} + \frac{q_۲}{۰٫۱۰}\right) = -\frac{q_۱q_۲}{d}$$

که با قرار دادن مقادیر $q_۱ = +۵٫۰\times ۱۰^{-۶}\,\mathrm{C}$ ، $q_۲ = +۳٫۰\times ۱۰^{-۶}\,\mathrm{C}$ و $d = ۰٫۰۴۰\,\mathrm{m}$ به $q_۳ = -۵٫۷\times ۱۰^{-۶}\,\mathrm{C}$ می‌رسیم.

۵۷●● بارهای مشابه $۵۰\,\mu\mathrm{C}$ روی محور $x = \pm ۳٫۰\,\mathrm{m}$ ثابت شده‌اند. سپس ذره‌ای با بار $q = -۱۵\,\mu\mathrm{C}$ از نقطه‌ای روی بخش مثبت محور y از حالت سکون رها می‌شود. به دلیل تقارن شکل، ذره روی محور y حرکت می‌کند و به هنگام عبور از نقطه‌ی $x=۰$ و $y = ۴٫۰\,\mathrm{m}$، انرژی جنبشی‌ای برابر با $۱٫۲\,\mathrm{J}$ دارد. (الف) انرژی جنبشی ذره به هنگام عبور از مبدأ، چقدر است؟ (ب) در چه مقدار منفی y، این ذره به‌طور لحظه‌ای متوقف می‌شود؟

Scanned by CamScanner

حل پایستگی انرژی را برای ذره‌ی ۳ (با بار $q_۳ = -۱۵\times۱۰^{-۶}$C) به‌کار می‌بندیم:

$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

توجه کنید شکل کلی انرژی پتانسیل در حالت‌های اولیه و نهایی به‌صورت زیر است:

$$U = \frac{q_۱q_۳}{۴\pi\varepsilon_۰\sqrt{x^۲+y^۲}} + \frac{q_۲q_۳}{۴\pi\varepsilon_۰\sqrt{x^۲+y^۲}} = \frac{۲q_۲q_۳}{۴\pi\varepsilon_۰\sqrt{x^۲+y^۲}}$$

آنچه که بین U_i و U_f تمایز ایجاد می‌کند، مقدار y است که در حالت اولیه $y_۰ = ۴/۰$m و در حالت نهایی $y=۰$ و در هر دو حالت $x = ۳/۰$m است. بنابراین در یکاهای SI داریم:

$$U_i - U_f = \frac{۲q_۲q_۳}{۴\pi\varepsilon_۰}\left(\frac{۱}{\sqrt{x^۲+y_۰^۲}} - \frac{۱}{|x|}\right)$$

$$= ۲(۸/۹۹\times۱۰^۹)(۵۰\times۱۰^{-۶})(۱۵\times۱۰^{-۶})\left(\frac{۱}{\sqrt{(۳/۰)^۲+(۴/۰)^۲}} - \frac{۱}{\sqrt{(۳/۰)^۲}}\right)$$

$$= ۱/۸\text{J}$$

(الف) پایستگی انرژی را برای K_f حل می‌کنیم:

$$K_f = K_i + U_i - U_f = ۱/۲\text{J} + ۱/۸\text{J} = ۳/۰\text{J}$$

(ب) K_f را برابر صفر قرار می‌دهیم و معادله‌ی پایستگی انرژی را برای y مورد نظر حل می‌کنیم:

$$K_i + U_i = U_f \quad \Rightarrow \quad ۱/۲\text{J} + \frac{۲q_۲q_۳}{۴\pi\varepsilon_۰\sqrt{x^۲+y_۰^۲}} = \frac{۲q_۲q_۳}{۴\pi\varepsilon_۰\sqrt{x^۲+y^۲}}$$

و از آنجا

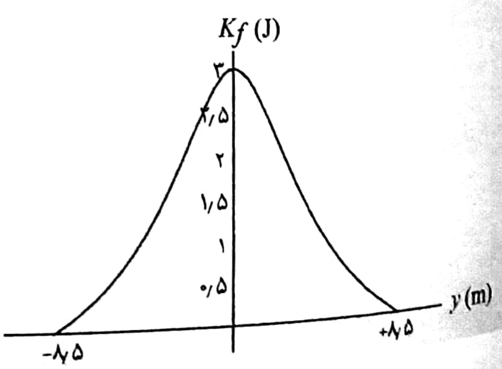
$$۱/۲ = \frac{-۲q_۲q_۳}{۴\pi\varepsilon_۰}\left(\frac{۱}{\sqrt{x^۲+y_۰^۲}} - \frac{۱}{\sqrt{x^۲+y^۲}}\right)$$

$$= ۲(۸/۹۹\times۱۰^۹)(۵۰\times۱۰^{-۶})(۱۵\times۱۰^{-۶})\left(\frac{۱}{\sqrt{(۳/۰)^۲+(۴/۰)^۲}} - \frac{۱}{\sqrt{۹/۰+y^۲}}\right)$$

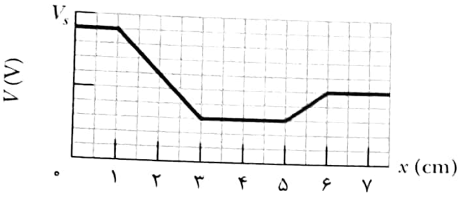
$$\approx ۲/۷ - \frac{۱۳/۴۸}{\sqrt{۹/۰+y^۲}}$$

و از آنجا $\sqrt{۹/۰+y^۲} = ۹/۰$ و یا $y = \pm۸/۵$m به‌دست می‌آید که پاسخ مورد نظر $y = -۸/۵$m می‌شود.

تبصره اگر انرژی جنبشی نهایی ذره را برحسب y رسم کنیم، به شکل زیر می‌رسیم. از نمودار در می‌یابیم که در $y=۰$، $K_f = ۳/۰$J و در $K_f=۰$ ،$y=-۸/۵$m است. ذره بین دو نقطه‌ی انتهایی $y=\pm۸/۵$m نوسان می‌کند.



۵۸•• پروتون در یک چاه. شکل ۲۴-۵۹ پتانسیل الکتریکی V را روی یک محور x نشان می‌دهد. محور قائم با $V_s = ۱۰/۰$V مقیاس‌بندی شده است. پروتونی با انرژی جنبشی اولیه‌ی $۴/۰۰$eV از $x = ۳/۵$cm شلیک می‌شود. (الف) اگر این پروتون در ابتدا رو به سمت منفی محور x در حرکت باشد، آیا به یک نقطه‌ی برگشت می‌رسد (اگر بله، مختصه‌ی x آن نقطه چیست) یا اینکه از ناحیه‌ی رسم شده می‌گریزد (اگر چنین است، تندی آن در $۶/۰$cm چیست)؟ اگر این پروتون فقط در سمت چپ $x = ۳/۰$cm حرکت کند، (پ) بزرگی F و (ت) جهت (رو به سمت مثبت یا منفی محور x) نیروی الکتریکی وارد بر آن چیست؟ اگر پروتون فقط در سمت راست $x = ۵/۰$cm حرکت کند، (ث) F و (ج) جهت آن چیست؟



شکل ۲۴-۵۹ مسئله‌ی ۵۸

حل (الف) وقتی پروتون رها می‌شود، انرژی آن $K+U = ۴/۰\text{eV} + ۳/۰\text{eV} = ۷/۰\text{eV}$ است. (U را از روی منحنی به‌ازای $x = ۳/۵$cm به‌دست می‌آوریم. توجه کنید منحنی پتانسیل را با استفاده از رابطه‌ی $U = eV$ به انرژی پتانسیل تبدیل کرده‌ایم.) پس، برای یافتن نقطه‌ی بازگشت باید خطی افقی به ارتفاع $۷/۰۰$eV رسم کنیم و ببینیم منحنی انرژی پتانسیل را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند. از روی منحنی درمی‌یابیم که این نقطه تقریباً در $x = ۱/۷۰$cm قرار دارد.

(ب) خط افقی به ارتفاع $۷/۰۰$eV منحنی را در سمت راست نقطه‌ی رها شدن، در هیچ‌جا قطع نمی‌کند و بنابراین نقطه‌ی بازگشتی نداریم. تندی پروتون در $x = ۶/۰۰$cm را با استفاده از پایستگی انرژی به‌دست می‌آوریم. در این نقطه، انرژی ذره صرفاً جنبشی است و بنابراین داریم:

$$E_i = \frac{۱}{۲}m_pv^۲$$

$$\Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{۲E_i}{m_p}} = \sqrt{\frac{۲(۷/۰۰\text{eV})(۱/۶۰\times۱۰^{-۱۹}\text{J/eV})}{۱/۶۷\times۱۰^{-۲۷}\text{kg}}}$$

$$= ۳/۶۶\times۱۰^۴\ \text{m/s}$$

(ب) میدان الکتریکی در هر نقطه‌ی دلخواه برابر با منفیِ شیب منحنی پتانسیل در آن نقطه است. همچنین می‌دانیم نیروی وارد بر پروتون $\vec{F} = +e\vec{E}$ می‌شود. شیب منحنی پتانسیل در ناحیه‌ی سمت چپ $x = ۳/۰۰$cm برابر با -۳۰۰V/m است و در نتیجه $\vec{E} = (+۳۰۰\text{V/m})\hat{\mathbf{i}}$ می‌شود و از آنجا خواهیم داشت:

$$\vec{F} = (۱/۶۰\times۱۰^{-۹}\text{C})(۳۰۰\text{V/m})\hat{\mathbf{i}} = (+۴/۸۰\times۱۰^{-۱۷}\text{N})\hat{\mathbf{i}}$$

پس، بزرگی $\vec{F}$ برابر $+۴/۸۰\times۱۰^{-۱۷}$N است.

(ت) همان‌طور که در بالا دیدیم $\vec{F}$ در جهت $+x$ می‌شود.

(ث) در ناحیه‌ی سمت راست $x = ۵/۰۰$m، شیب منحنی برابر $+۲۰۰$V/m و در نتیجه $\vec{E} = (-۲۰۰\text{V/m})\hat{\mathbf{i}}$ است. بنابراین نیروی

Scanned by CamScanner

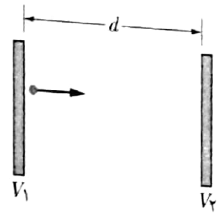
$\vec{F}$ برابر با

$$\vec{F}=(1/60\times10^{-19}\text{C})(200\,\text{V/m})\hat{\mathbf{i}}=(-3/20\times10^{-17}\text{N})\hat{\mathbf{i}}$$

است که بزرگی آن $3/20\times10^{-17}\,\text{N}$ می‌شود.

(ج) همان‌طور که در بالا دیدیم، جهت $\vec{F}$ در سوی منفی x است.

۵۹۰۰ در شکل ۲۴-۶۰، یک ذره‌ی باردار (الکترون یا پروتون) بین دو صفحه‌ی موازی باردار که به فاصله‌ی $d=2/00\,\text{mm}$ از هم قرار دارند، رو به سمت راست در حرکت است. پتانسیل صفحه‌ها عبارت‌اند از $V_1=-70/0\,\text{V}$ و $V_2=-50/0\,\text{V}$. تندی ذره از مقدار اولیه‌ی $90/0\,\text{km/s}$ در محلّ صفحه‌ی سمت چپ، رو به کُند شدن می‌گذارد. (الف) آیا این ذره، الکترون است یا پروتون؟ (ب) تندی آن درست در لحظه‌ی رسیدن به صفحه‌ی ۲ چقدر است؟



شکل ۲۴-۶۰ مسئله‌ی ۵۹

حل (الف) چون سوی میدان الکتریکی به سمت مقادیر کوچک پتانسیل است، جهت میدان الکتریکی در میان صفحه‌های شکل به سمت چپ است. و چون $\vec{F}=q\vec{E}$ است، نیرو در همان جهت میدان الکتریکی و رو به سمت چپ است. طبق صورت مسئله، حرکت ذره کُندشونده است و بنابراین شتاب آن رو به سمت چپ است. می‌دانیم یک ذره با بار مثبت است که در جهت میدان شتاب می‌گیرد. پس این ذره، پروتون است.

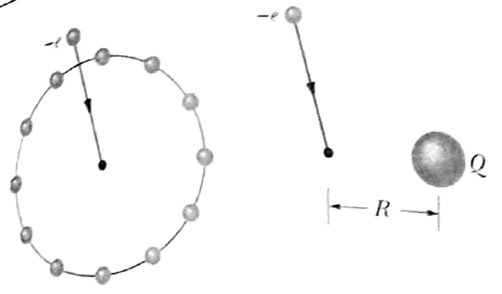
(ب) با استفاده از پایستگی انرژی داریم:

$$K_\circ+U_\circ=K+U\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{2}m_p v_\circ^2+qV_1=\frac{1}{2}m_p v^2+qV_2$$

آنگاه با استفاده از مقادیر $q=+1/60\times10^{-19}\,\text{C}$، $m_p=1/67\times10^{-27}\,\text{kg}$، $v_\circ=90/0\times10^3\,\text{m/s}$، $V_1=-70/0\,\text{V}$ و $V_2=-50/0\,\text{V}$ به تندی نهایی $v=6/53\times10^4\,\text{m/s}=65/3\,\text{km/s}$ می‌رسیم.

توجه کنید که از مقدار d در حل استفاده نکردیم.

۶۰۰۰ در شکل ۲۴-۶۱ الف، الکترونی را از فاصله‌ی نامتناهی تا نقطه‌ای به فاصله‌ی $R=8/00\,\text{cm}$ از یک گوی باردار کوچک حرکت می‌دهیم. این حرکت به کاری برابر با $W=2/16\times10^{-13}\,\text{J}$ نیاز دارد. (الف) بار Q ی روی این گوی چقدر است؟ در شکل ۲۴-۶۱ ب، همان گوی به قطعه‌هایی با مقدار بار یکسان تقسیم شده است و آن قطعه‌ها در محلّ شماره‌های ساعت یک صفحه‌ی ساعت دایره‌ای به شعاع $R=8/00\,\text{cm}$ قرار گرفته‌اند. اکنون الکترونی از یک فاصله‌ی نامتناهی به مرکز این دایره آورده می‌شود. (ب) با اضافه شدن این الکترون به دستگاه ۱۲ ذره‌ی باردار، تغییر حاصل در انرژی پتانسیل الکتریکی این دستگاه چقدر می‌شود؟



شکل ۲۴-۶۱ مسئله‌ی ۶۰

حل (الف) طبق فرض، کار انجام شده برابر است با

$$W=q\Delta V=(-e)\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_\circ R}\right)=+2/16\times10^{-13}\,\text{J}$$

از آنجا، به‌ازای $R=0/0800\,\text{m}$، به $Q=-1/20\times10^{-5}\,\text{C}$ می‌رسیم.

(ب) کار انجام شده همان است و بنابراین افزایش در انرژی پتانسیل برابر است با $\Delta U=+2/16\times10^{-13}\,\text{J}$.

۶۱۰۰۰ فرض کنید N الکترون را بتوان در یکی از دو پیکربندی زیر قرار داد. در پیکربندی ۱، همه‌ی آنها به‌طور یکنواخت روی محیط حلقه‌ی نازکی به شعاع R پخش شده‌اند، طوری که فاصله‌ی بین الکترون‌های مجاور در همه جا یکسان است. در پیکربندی ۲، $N-1$ الکترون به‌طور یکنواخت روی همان حلقه پخش شده‌اند و یک الکترون در مرکز حلقه قرار گرفته است. (الف) کمترین مقدار N که به‌ازای آن انرژی پیکربندی دوم از پیکربندی اول کمتر است، چقدر است؟ (ب) برای آن مقدار N، یکی از الکترون‌های واقع بر محیط حلقه را در نظر بگیرید و آن را مثلاً $e_\circ$ بنامید. چه تعداد از سایر الکترون‌های واقع بر محیط حلقه به $e_\circ$ نزدیکتر از الکترون مرکزی‌اند؟

حل توجه کنید برای دو نقطه روی دایره که به اندازه‌ی زاویه‌ی θ (بر حسب رادیان) از هم فاصله دارند، مسافت مستقیم میان آن دو نقطه با $r=2R\sin(\theta/2)$ داده می‌شود. با استفاده از این واقعیت، حالت‌های زوج $=N$ و فرد $=N$ را متمایز می‌کنیم و با محاسبه‌ی جفت برهم‌کنش‌ها به نتایج زیر برای انرژی‌های پتانسیل کل می‌رسیم. با استفاده از $k=1/4\pi\varepsilon_\circ$ برای پیکربندی ۱ خواهیم داشت:

$$U_{1,N=\text{زوج}}=\frac{Nke^2}{2R}\left(\sum_{j=1}^{\frac{N}{2}-1}\frac{1}{\sin(j\theta/2)}+\frac{1}{2}\right)$$

$$U_{1,N=\text{فرد}}=\frac{Nke^2}{2R}\left(\sum_{j=1}^{\frac{N-1}{2}}\frac{1}{\sin(j\theta/2)}\right)$$

که در آنها N تعداد کلّ الکترون‌ها و $\theta=2\pi/N$ است. برای پیکربندی ۲ خواهیم داشت:

$$U_{2,N=\text{زوج}}=\frac{(N-1)ke^2}{2R}\left(\sum_{j=1}^{\frac{N}{2}-1}\frac{1}{\sin(j\theta'/2)}+2\right)$$

Scanned by CamScanner

$$U_{2,N=\text{فرد}}=\frac{(N-1)ke^2}{2R}\left[\sum_{j=1}^{\frac{N-3}{2}}\frac{1}{\sin(j\theta'/2)}+\frac{1}{2}\right]$$

که در آنها $\theta'=2\pi/(N-1)$ است. در هر حال، نتیجه‌ی کل برای هر دو پیکربندی به‌صورت زیر می‌شود:

$$U_{1\text{ یا }2}=(\text{یک عدد کامل})\left(\frac{ke^2}{2R}\right)$$

در جدول زیر، نتایج برای این «اعداد کامل» که به N و پیکربندی بستگی دارند، آورده شده‌اند. مقادیر فهرست شده در ردیف‌های U، انرژی‌های پتانسیل بخش بر $ke^2/2R$ هستند.

N	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵
U_1	۳٫۸۳	۶٫۸۸	۱۰٫۹۶	۱۶٫۱۳	۲۲٫۴۴	۲۹٫۸۲	۳۸٫۶۲	۴۸٫۵۸	۵۹٫۸۱	[illegible]	[illegible]	[illegible]
U_2	۴٫۷۳	۷٫۸۳	۱۱٫۸۸	۱۶٫۹۶	۲۳٫۱۳	۳٫۴۴	۳۹٫۸۲	۴۸٫۶۲	۵۹٫۵۸	[illegible]	[illegible]	[illegible]

از اینجا درمی‌یابیم که انرژی پتانسیل برای پیکربندی ۲ به‌ازای $N<12$ بزرگ‌تر از پیکربندی ۱ است. ولی به‌ازای $N\geq 12$، انرژی پیکربندی ۱ بزرگ‌تر است.

(الف) بنابراین $N=12$ کم‌ترین مقداری است که به‌ازای آن $U_2<U_1$ است.

(ب) به‌ازای $N=12$، پیکربندی ۲ شامل ۱۱ الکترون است که در فاصله‌های مساوی روی دایره توزیع شده‌اند و یک الکترون در مرکز دایره قرار دارد. الکترون e_o مربوط به این مقدار N، در فاصله‌ی R از الکترون واقع در مرکز قرار دارد و داریم:

$$r=2R\sin\left(\frac{\pi}{11}\right)\approx 0.56R$$

که این فاصله‌ی الکترون e_o از نزدیک‌ترین همسایه‌های آن است (هر کدام در یک طرف آن). پس از این نزدیک‌ترین همسایه‌ها، نزدیک‌ترین الکترون بعدی روی دایره به فاصله‌ی

$$r=2R\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right)\approx 1.1R$$

از e_o است. بنابراین، درمی‌یابیم که تنها فاصله‌ی دو الکترون به e_o نزدیک‌تر از فاصله‌ی e_o از مرکز دایره است.

بخش ۲۴-۸ پتانسیل یک رسانای باردار منزوی

۶۲۰ کره‌ی ۱ به شعاع R_1 دارای بار مثبت q است. کره‌ی ۲ به شعاع $2.00R_1$ در فاصله‌ی دوری از کره‌ی ۱ قرار دارد و در ابتدا بدون بار است. پس از آنکه این کره‌های جدا از هم توسط سیم بسیار نازکی به هم وصل شدند که فقط بار ناچیزی را حفظ می‌کند (الف) آیا پتانسیل V_1 کره‌ی ۱ بزرگ‌تر از پتانسیل V_2ی کره‌ی ۲ یا کوچکتر، و یا برابر با آن می‌شود؟ سرانجام چه کسری از بار q روی (ب) کره‌ی ۱ و (پ) کره‌ی ۲ باقی می‌ماند؟ (ت) نسبت چگالی‌های سطحی σ_1/σ_2 این کره‌ها چقدر می‌شود؟

حل (الف) پس از اتصال کره‌ها، تا برابر شدن پتانسیل کره‌ها، شارش بار خواهیم داشت و سرانجام $V_1=V_2$ می‌شود.

(ب) و (پ) از شرط برابر شدن پتانسیل‌ها خواهیم داشت:

$$\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1}=\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}\Rightarrow\frac{q_1}{q_2}=\frac{R_1}{R_2}=\frac{R_1}{2R_1}$$

بنابراین $q_1=q/2$ می‌شود. همچنین از قانون پایستگی بار داریم:

$$q=q_1+q_2=\frac{q_2}{2}+q_2=\frac{3q_2}{2}$$

و از آنجا $q_2/q=2/3$ و $q_1/q_2=1/3$ می‌شود. پس به‌ترتیب پاسخ‌های (ب) و (پ) چنین می‌شوند:

$$q_1/q=0.333\quad,\quad q_2/q=0.667$$

(ت) نسبت چگالی‌های سطحی بار برابر است با:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2}=\frac{q_1/4\pi R_1^2}{q_2/4\pi R_2^2}=\left(\frac{q_1}{q_2}\right)\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2=2.00$$

۶۳۰ WWW دو کره‌ی فلزی، هر یک به شعاع 3.0cm، در فاصله‌ی مرکز به مرکز 2.0m از هم قرار گرفته‌اند. کره‌ی ۱ دارای بار $+1.0\times10^{-8}\text{C}$ و کره‌ی ۲ دارای بار $-3.0\times10^{-8}\text{C}$ است. فرض کنید فاصله‌ی جدایی کره‌ها به حدّی بزرگ است که می‌توانیم فرض کنیم بار روی هر کره به‌طور یکنواخت توزیع شده است (یعنی کره‌ها بر یکدیگر تأثیر نمی‌گذارند). به‌ازای $V=0$ در فاصله‌ی نامتناهی، (الف) پتانسیل در وسط فاصله‌ی مرکز این کره‌ها و پتانسیل روی سطح (ب) کره‌ی ۱ و (پ) کره‌ی ۲ را محاسبه کنید.

حل (الف) پتانسیل الکتریکی برابر با مجموع سهم پتانسیل‌های مجزای حاصل از کره‌ها می‌شود. q_1 و q_2 را بار روی کره‌ها و d را فاصله‌ی جدایی مرکز به مرکز آنها فرض کنید. بنابراین نقطه‌ی میانی بین مرکز کره‌ها در فاصله‌ی $d/2(=1.0\text{m})$ از مرکز هر کدام واقع است و پتانسیل الکتریکی در این نقطه چنین می‌شود:

$$V=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 d/2}+\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 d/2}=\frac{2(q_1+q_2)}{4\pi\varepsilon_0 d}$$

$$=\frac{2(8.99\times10^9\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(1.0\times10^{-8}\text{C}-3.0\times10^{-7}\text{C})}{1.0\text{m}}$$

$$=-1.8\times10^{-2}\text{V}$$

(ب) فاصله‌ی مرکز یک کره تا سطح کره‌ی دیگر برابر با $d-R$ است که R شعاع هر کدام از کره‌هاست. پتانسیل هر یک از کره‌ها ناشی از بار روی آن کره و بار روی کره‌ی دیگر است. بنابراین، پتانسیل روی سطح کره‌ی ۱ چنین می‌شود:

$$V_1=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1}{R}+\frac{q_2}{d-R}\right]$$

$$=(8.99\times10^9\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\left[\frac{1.0\times10^{-8}\text{C}}{0.030\text{m}}-\frac{3.0\times10^{-8}\text{C}}{2.0\text{m}-0.030\text{m}}\right]$$

$$=2.9\times10^3\text{V}=2.9\text{kV}$$

(پ) به همان ترتیب، پتانسیل روی سطح کره‌ی ۲ برابر است با

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1}{d-R} + \frac{q_2}{R}\right]$$

$$= (8{,}99\times10^{9}\,\mathrm{N\cdot m^2/C^2})\left[\frac{1{,}0\times10^{-8}\,\mathrm{C}}{2{,}0\,\mathrm{m}-0{,}030\,\mathrm{m}} - \frac{3{,}0\times10^{-8}\,\mathrm{C}}{0{,}030\,\mathrm{m}}\right]$$

$$= -8{,}9\times10^{3}\,\mathrm{V} = -8{,}9\,\mathrm{kV}$$

۶۴● یک کره‌ی فلزی توخالی دارای پتانسیل $+400\,\mathrm{V}$ نسبت به زمین (که پتانسیل آن $V=0$ تعریف شده است) و بار $5{,}0\times10^{-9}\,\mathrm{C}$ است. پتانسیل الکتریکی را در مرکز این کره به‌دست آورید.

حل پتانسیل داخل کره‌ی رسانای توخالی را این‌گونه به‌دست می‌آوریم:

$$V = -\int_{\infty}^{r} E\,dr = -\left(\int_{\infty}^{R} E_{\text{خارج}}\,dr + \int_{R}^{r} E_{\text{داخل}}\,dr\right)$$

که در آن $E_{\text{خارج}}$ میدان در خارج کره و $E_{\text{داخل}}$ میدان در داخل کره است. می‌دانیم

$$E_{\text{خارج}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad , \quad E_{\text{داخل}} = 0$$

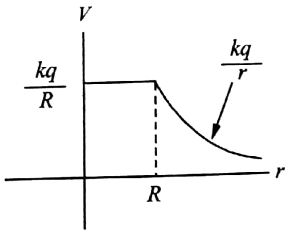
در نتیجه داریم:

$$V = -\int_{\infty}^{R} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

یعنی تمام نقاط داخل کره‌ی رسانا و از جمله مرکز آن هم‌پتانسیل‌اند و دارای همین پتانسیل هستند و اصطلاحاً در داخل کره‌ی رسانا حجم هم‌پتانسیل داریم.

چون پتانسیل روی سطح کره $400\,\mathrm{V}$ است، در مرکز آن نیز $400\,\mathrm{V}$ خواهد بود.

تبصره. خوب است، در حالت کلی نمودار پتانسیل برحسب r را برای داخل و خارج چنین کره‌ای رسم کنیم.



۶۵● اگر پتانسیل الکتریکی کره‌ای رسانا به شعاع $r = 0{,}15\,\mathrm{m}$ برابر با $1500\,\mathrm{V}$ باشد و در فاصله‌ی نامتناهی $V=0$ در نظر گرفته شود، بار اضافی روی این کره چقدر است؟

حل پتانسیل الکتریکی در بی‌نهایت صفر در نظر گرفته می‌شود و بنابراین روی سطح کره با $V = q/4\pi\varepsilon_0 R$ داده می‌شود که q بار روی کره و r شعاع کره است. بنابراین داریم:

$$q = 4\pi\varepsilon_0 r V = \frac{(0{,}15\,\mathrm{m})(1500\,\mathrm{V})}{8{,}99\times10^{9}\,\mathrm{N\cdot m^2/C^2}} = 2{,}5\times10^{-8}\,\mathrm{C}$$

۶۶●● دو پوسته‌ی کروی رسانا، هم‌مرکز و منزوی دارای شعاع‌های $R_1 = 0{,}500\,\mathrm{m}$ و $R_2 = 1{,}00\,\mathrm{m}$، بارهای یکنواخت $q_1 = +2{,}00\,\mu\mathrm{C}$ و $q_2 = +1{,}00\,\mu\mathrm{C}$، و ضخامت ناچیزند. بزرگی میدان الکتریکی E در فاصله‌ی شعاعی (الف) $r = 4{,}00\,\mathrm{m}$، (ب) $r = 0{,}700\,\mathrm{m}$ و (پ) $r = 0{,}200\,\mathrm{m}$ چقدر است؟ به‌ازای $V=0$ در فاصله‌ی نامتناهی، V در (ت) $r = 4{,}00\,\mathrm{m}$، (ث) $r = 1{,}00\,\mathrm{m}$، (ج) $r = 0{,}700\,\mathrm{m}$، (چ) $r = 0{,}500\,\mathrm{m}$، (ح) $r = 0{,}200\,\mathrm{m}$، و (خ) $r = 0$ چقدر است؟ (د) نمودارهای $E(r)$ و $V(r)$ را رسم کنید.

حل (الف) یک سطح گاؤسی کروی هم‌مرکز با پوسته‌های کروی در $r > R_2 > R_1$ در نظر می‌گیریم و قانون گاؤس را به‌کار می‌بندیم. در این سطح گاؤسی بار $q_1 + q_2$ محصور شده است و بنابراین داریم:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = q_{\text{enc}}/\varepsilon_0 = (q_1+q_2)/\varepsilon_0$$

چون سمت چپ برابر $E(4\pi r^2)$ است، خواهیم داشت:

$$E = \frac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$= \frac{(8{,}99\times10^{9}\,\mathrm{N\cdot m^2/C^2})(2{,}00\times10^{-6}\,\mathrm{C} + 1{,}00\times10^{-6}\,\mathrm{C})}{(4{,}00\,\mathrm{m})^2}$$

$$= 1{,}69\times10^{3}\,\mathrm{V/m}$$

(ب) یک سطح گاؤسی کروی، هم‌مرکز با پوسته‌ها و به شعاع $R_1 < r < R_2$ در نظر می‌گیریم و قانون گاؤس را به‌کار می‌بندیم. در این سطح گاؤسی بار q_1 محصور شده است و بنابراین داریم

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = q_{\text{enc}}/\varepsilon_0 = q_1/\varepsilon_0$$

و در نتیجه برای E خواهیم داشت:

$$E_2 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{(8{,}99\times10^{9}\,\mathrm{N\cdot m^2/C^2})(2{,}00\times10^{-6}\,\mathrm{C})}{(0{,}700\,\mathrm{m})^2}$$

$$= 3{,}67\times10^{4}\,\mathrm{V/m}$$

(پ) یک سطح گاؤسی کروی، هم‌مرکز با پوسته‌ها و به شعاع $r < R_1 < R_2$ در نظر می‌گیریم و قانون گاؤس را به کار می‌بندیم. هیچ باری در این سطح گاؤسی محصور نشده است و بنابراین $E_3 = 0$ می‌شود.

(ت) پتانسیل در بیرون کره‌ها در $r = 4{,}00\,\mathrm{m}$ چنین می‌شود:

$$V_1(r) = -\int_{\infty}^{r} E_1(r)\,dr = -\int_{\infty}^{r} \frac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr = \frac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$= \frac{(8{,}99\times10^{9}\,\mathrm{N\cdot m^2/C^2})(2{,}00\times10^{-6}\,\mathrm{C} + 1{,}00\times10^{-6}\,\mathrm{C})}{4{,}00\,\mathrm{m}}$$

$$= 6{,}74\times10^{3}\,\mathrm{V}$$

(ث) پتانسیل در $r = 1{,}00\,\mathrm{m} = R_2$ چنین می‌شود:

$$V_1(R_2) = \frac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

$$= \frac{(8{,}99\times10^{9}\,\mathrm{N\cdot m^2/C^2})(2{,}00\times10^{-6}\,\mathrm{C} + 1{,}00\times10^{-6}\,\mathrm{C})}{1{,}00\,\mathrm{m}}$$

$$= 2{,}70\times10^{4}\,\mathrm{V}$$

Scanned by CamScanner

(ج) پتانسیل در فضای میان کره‌ها در $r = 0.700 \mathrm{m} < R_2$ چنین می‌شود:

$$V_2(r) = -\int_{\infty}^{R_2} E_1(r)dr - \int_{R_2}^{r} E_2(r)dr$$
$$= \frac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r} + \frac{q_2}{R_2}\right)$$
$$= (8.99\times10^9 \mathrm{N\cdot m^2/C^2})\left(\frac{2.00\times10^{-6}\mathrm{C}}{0.700\mathrm{m}} + \frac{1.00\times10^{-6}\mathrm{C}}{1.00\mathrm{m}}\right)$$
$$= 3.47\times10^4 \mathrm{V}$$

(چ) پتانسیل در $r = 0.500\mathrm{m} = R_1$ چنین می‌شود:

$$V_2(R_2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{R_1} + \frac{q_2}{R_2}\right)$$
$$= (8.99\times10^9 \mathrm{N\cdot m^2/C^2})\left(\frac{2.00\times10^{-6}\mathrm{C}}{0.500\mathrm{m}} + \frac{1.00\times10^{-6}\mathrm{C}}{0.100\mathrm{m}}\right)$$
$$= 4.50\times10^4 \mathrm{V}$$

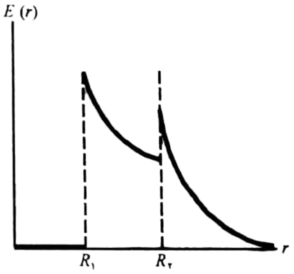
(ح) پتانسیل در فضای داخل کره‌ی کوچک‌تر $r < R_1 < R_2$ چنین می‌شود:

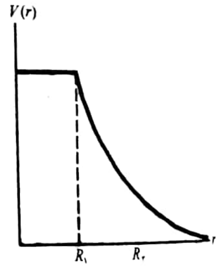
$$V_3(r) = -\int_{\infty}^{R_2} E_1(r)dr - \int_{R_2}^{R_1} E_2(r)dr - \int_{R_1}^{r} E_3(r)dr$$
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{R_1} + \frac{q_2}{R_2}\right) = 4.50\times10^2 \mathrm{V}$$

(خ) پتانسیل در $r = 0$ هم ثابت می‌ماند و برابر $V = 4.50\times10^4 \mathrm{V}$ است.

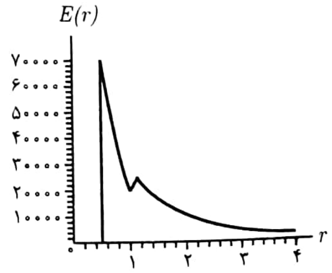
توجه: در محاسبه‌ی پتانسیل‌های بالا توجه کنید که پتانسیل در یک نقطه، اختلاف پتانسیل آن نقطه با بی‌نهایت است که پتانسیل در آنجا صفر در نظر گرفته می‌شود.

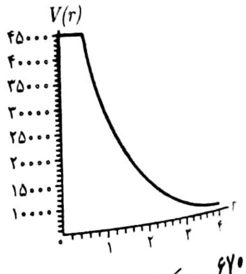
(د) شکل کیفی میدان و پتانسیل الکتریکی به‌ترتیب چنین می‌شوند:





شکل‌های دقیق $E(r)$ و $V(r)$، با استفاده از نرم‌افزارهای گرافیکی، به قرار زیر می‌شوند:





۶۷ یک کره‌ی فلزی به شعاع $15 \mathrm{cm}$ دارای بار خالص $3.0\times10^{-8}\mathrm{C}$ است. (الف) میدان الکتریکی روی سطح این کره چقدر است؟ (ب) اگر در فاصله‌ی نامتناهی $V = 0$ باشد، پتانسیل الکتریکی در مرکز این کره چقدر است؟ (پ) در چه فاصله‌ای از سطح این کره پتانسیل الکتریکی به اندازه‌ی $500 \mathrm{V}$ کاهش پیدا می‌کند؟

حل (الف) بزرگی میدان الکتریکی در سطح کره برابر است با

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{(8.99\times10^9 \mathrm{N\cdot m^2/C^2})(3.0\times10^{-8}\mathrm{C})}{(0.15\mathrm{m})^2}$$
$$= 1.2\times10^4 \mathrm{N/C}$$

توجه کنید که میدان الکتریکی صرفاً در سطح کره را می‌توان با $E = \sigma/\varepsilon_0$ نیز نشان داد.

(ب) پتانسیل الکتریکی در سطح کره چنین می‌شود:

$$V = RE = (0.15\mathrm{m})(1.2\times10^4 \mathrm{N/C}) = 1.8\times10^3 \mathrm{V} = 1.8\mathrm{kV}$$

(پ) در این صورت داریم:

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{(8.99\times10^9 \mathrm{N\cdot m^2/C^2})(3.0\times10^{-8}\mathrm{C})}{r}$$
$$= (1800 - 500)\mathrm{V}$$

و از آنجا $r = 0.208\mathrm{m}$ می‌شود. توجه کنید که r فاصله‌ی نقطه‌ی مورد نظر تا مرکز کره است. پس، فاصله‌ی این نقطه تا سطح کره چنین می‌شود:

$$x = r - R = 0.208\mathrm{m} - 0.15\mathrm{m} = 0.058\mathrm{m} = 5.8\mathrm{m}$$

مسئله‌های تکمیلی

۶۸ بارها و مختصات دو بار نقطه‌ای که در صفحه‌ی xy قرار دارند عبارت‌اند از $q_1 = +3.00\times10^{-6}\mathrm{C}$، $x = +3.50 \mathrm{cm}$، $y = +0.500 \mathrm{cm}$، $q_2 = -4.00\times10^{-6}\mathrm{C}$، $x = -2.00 \mathrm{cm}$، و $y = +1.50 \mathrm{cm}$. چقدر کار باید انجام شود تا این بارها، با شروع از فاصله‌ای نامتناهی از یکدیگر، در مکان‌های خود قرار گیرند؟

حل $U = W_1 + W_2$ می‌شود که $W_1 = 0$ است و بنابراین داریم:

$$U = W_2 = k\frac{q_1 q_2}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1 q_2}{\sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}}\right]$$
$$= \frac{(8.99\times10^9 \mathrm{N\cdot m^2/C^2})(3.00\times10^{-6}\mathrm{C})(-4.00\times10^{-6}\mathrm{C})}{\sqrt{(0.0350+0.0200)^2 + (0.0500-0.0150)^2}\mathrm{m}}$$
$$= 1.93\mathrm{m}$$

۶۹ استوانه‌ی رسانای توپُر و بلندی دارای شعاع $2.0 \mathrm{cm}$ است. میدان الکتریکی روی سطح این استوانه برابر با $160 \mathrm{N/C}$ و جهت آن به‌طور شعاعی رو به بیرون است. A، B، و C را نقطه‌هایی در نظر بگیرید که به‌ترتیب در فاصله‌ی $1.0 \mathrm{cm}$، $2.0 \mathrm{cm}$ و $5.0 \mathrm{cm}$ از محور مرکزی استوانه قرار دارند. (الف) بزرگی میدان الکتریکی در نقطه‌ی C و اختلاف پتانسیل‌های الکتریکی (ب) $V_B - V_C$ و (پ) $V_A - V_B$ چقدر است؟

Scanned by CamScanner

حل میدان الکتریکی حاصل از یک استوانه‌ی بلند در نقاط خارج از آن $E=\lambda/2\pi\varepsilon_0 r$ است (معادله‌ی ۲۳-۱۲ را ببینید). صورت مسئله، میدان روی سطح استوانه (به شعاع $R=2\text{cm}$) را برابر با $160\,\text{N/C}$ داده است که این نقطه همان نقطه‌ی B است. بنابراین داریم:

$$\frac{|\vec{E}|}{E_B}=\frac{R}{r} \qquad \text{به‌ازای} \quad r\ge R$$

(الف) اگر $r=r_C=0.050\,\text{m}$ باشد، از رابطه‌ی بالا چنین به‌دست می‌آوریم:

$$|\vec{E}|=(E_B)(R/r)=(160\,\text{N/C})(0.020\,\text{m})/(0.050\,\text{m})=64\,\text{N/C}$$

(ب) دیدیم E در یک نقطه‌ی دلخواه خارج از استوانه ی برابر با $E=(E_BR)/r$ شد. برای محاسبه‌ی اختلاف پتانسیل V_B-V_C باید از این رابطه بین دو کران R و r_C انتگرال بگیریم. برای آنکه در نمادها اشتباه نشود معادله‌ی E را به‌صورت $(E_BR)/\rho$ در نظر می‌گیریم و از آنجا چنین به‌دست می‌آوریم:

$$V_B-V_C=\int_R^{r_C}\frac{E_BR}{\rho}d\rho=E_BR\ln\left(\frac{r_C}{R}\right)$$

$$=(160\,\text{N/C})(0.020\,\text{m})\ln\left(\frac{0.050}{0.020}\right)=2.9\,\text{V}$$

(پ) میدان الکتریکی در سرتاسر یک حجم رسانا برابر است و بنابراین در سرتاسر داخل استوانه، پتانسیل ثابت و برابر با مقدار آن روی استوانه است. پس $V_A-V_B=0$ می‌شود.

۷۰ *معمای خرده‌های شکلات.* این داستان با مسئله‌ی ۶۰ فصل ۲۳ آغاز می‌شود. (الف) با استفاده از پاسخ قسمت (الف) آن مسئله، عبارتی برای پتانسیل الکتریکی برحسب تابعی از فاصله‌ی شعاعی r از مرکز لوله به‌دست آورید. (پتانسیل الکتریکی روی دیواره‌ی متصل به زمین لوله برابر با صفر است.) (ب) برای چگالی حجمی بار نوعی $\rho=-1.1\times10^{-3}\,\text{C/m}^3$، اختلاف پتانسیل الکتریکی میان مرکز لوله و دیواره‌ی داخلی آن چقدر است؟ (این داستان با مسئله‌ی ۶۰ فصل ۲۵ ادامه می‌یابد.)

حل (الف) توجه کنید که در اینجا پتانسیل روی سطح لوله صفر است و ما طبق تعریف پتانسیل باید در خلاف جهت میدان حرکت کنیم. اینجا میدان به‌طور شعاعی رو به داخل است و در نتیجه خواهیم داشت:

$$V_R-V_r=-\int_r^R\frac{\rho r}{2\varepsilon_0}dr$$

که در آن $V_R=0$ است. از آنجا خواهیم داشت:

$$V_r=\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2}r^2\right)\Bigg|_r^R=\frac{\rho}{2\varepsilon_0}(R^2-r^2)$$

(ب) در این صورت باید در رابطه‌ی بالا $r=0$ قرار دهیم. آنگاه به‌ازای $\rho=-1.1\times10^{3}\,\text{C/m}^3$ خواهیم داشت:

$$V_{\text{مرکز}}=\frac{-1.1\times10^3\,\text{C/m}^3}{4(8.85\times10^{-12}\,\text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)}(0.050\,\text{m})^2=-7.8\times10^4\,\text{V}$$

بنابراین اختلاف پتانسیل با دیواره $|V_{\text{مرکز}}|=7.8\times10^4\,\text{V}$

۷۱ با شروع از معادله‌ی ۲۴-۳۰، عبارتی برای میدان الکتریکی یک دوقطبی در نقطه‌ای روی محور دوقطبی به‌دست آورید.

حل روی محور دوقطبی $\theta=0$ یا $\theta=\pi$ است و $|\cos\theta|=1$. در نتیجه بزرگی میدان الکتریکی برابر است با

$$|E(r)|=\left|-\frac{\partial V}{\partial r}\right|=\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\left|\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^2}\right)\right|=\frac{p}{2\pi\varepsilon_0 r^3}$$

۷۲ بزرگی E ی میدان الکتریکی، طبق رابطه‌ی $E=A/r^4$ به شعاعی r بستگی دارد، که در آن A ثابتی با یکای ولت-مترمکعب است. برحسب مضربی از A، بزرگی اختلاف پتانسیل الکتریکی بین $r=2.00\,\text{m}$ و $r=3.00\,\text{m}$ چقدر است؟

حل از معادله‌ی ۲۴-۱۸ داریم:

$$\Delta V=-\int_{2.00}^{3.00}E\,dr=-\int_{2.00}^{3.00}\frac{A}{r^4}dr=\frac{A}{3}\left(\frac{1}{2.00^3}-\frac{1}{3.00^3}\right)$$

$$=A(0.029/\text{m}^3)$$

۷۳ (الف) اگر یک کره‌ی رسانای منزوی به شعاع $10\,\text{cm}$ دارای بار خالص $4.0\,\mu\text{C}$ باشد، و اگر در فاصله‌ی نامتناهی $V=0$ اختیار شود، پتانسیل روی سطح این کره چقدر است؟ (ب) با فرض آنکه هوای اطراف این کره وقتی فروریزش الکتریکی پیدا می‌کند که بزرگی میدان الکتریکی آن از $3.0\,\text{MV/m}$ بیشتر شود، آیا این وضعیت واقعاً می‌تواند رخ دهد؟

حل (الف) پتانسیل روی سطح کره برابر است با

$$V=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0R}=\frac{(8.99\times10^9\,\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(4.0\times10^{-6}\,\text{C})}{0.10\,\text{m}}$$

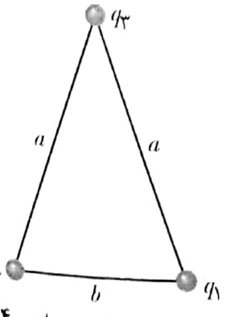
$$=3.6\times10^5\,\text{V}$$

(ب) میدان الکتریکی «درست» بیرون کره برابر است با

$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0R^2}=\frac{V}{R}=\frac{(3.6\times10^{-5}\,\text{V})}{0.10\,\text{m}}=3.6\times10^6\,\text{V/m}$$

که از $3.0\,\text{MV/m}$ بیشتر است و بنابراین این حالت رخ نمی‌دهد.

۷۴ سه ذره با بارهای $q_1=+10\,\mu\text{C}$، $q_2=-20\,\mu\text{C}$ و $q_3=+30\,\mu\text{C}$ در رأس‌های مثلث متساوی‌الساقین شکل ۲۴-۶۲ قرار گرفته‌اند. اگر $a=10\,\text{cm}$ و $b=6.0\,\text{cm}$ باشد، یک عامل خارجی باید چقدر کار انجام دهد تا جای بارهای (الف) q_1 و q_3 و (ب) q_1 و q_2 را با هم عوض کند؟



شکل ۲۴-۶۲ مسئله‌ی ۷۴

Scanned by CamScanner

حل کار انجام شده برابر با تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی U دستگاه است که خود برابر است با

$$U = \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} + \frac{q_2q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{23}} + \frac{q_1q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}}$$

(الف) اختلاف پتانسیل U را به‌ازای مقادیر اولیه‌ی $r_{12}=b$ و $r_{23}=a$، و مقادیر نهایی $r_{12}=a$ و $r_{23}=b$ به‌دست می‌آوریم (r_{13} تغییر نمی‌کند). در یکاهای SI داریم:

$$\Delta U = \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right) - \frac{q_3q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

$$= \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)(q_1-q_3)$$

$$= (8.99\times10^{9})(-20\times10^{-6})\times\left(\frac{1}{0.10}-\frac{1}{0.060}\right)(-20\times10^{-6})$$

$$= 24\,\mathrm{J}$$

(ب) اکنون اختلاف پتانسیل U را به‌ازای مقادیر اولیه‌ی $r_{13}=r_{23}=a$ و مقادیر نهایی $r_{13}=r_{23}=a$ به‌دست می‌آوریم (البته در این حالت r_{12} تغییر نمی‌کند)، و بنابراین $\Delta U=0$ می‌شود.

۷۵ میدان الکتریکی که اغلب در نزدیکی سطح کره‌ی زمین مشاهده می‌شود دارای بزرگی تقریبی $100\,\mathrm{V/m}$ است. اگر میدان الکتریکی در کلّ سطح کره زمین همین مقدار را می‌داشت، پتانسیل الکتریکی در نقطه‌ای روی این سطح چقدر می‌شد؟ (در فاصله‌ی نامتناهی، $V=0$ اختیار کنید.)

حل فرض کنید بار روی کره‌ی زمین با تقارن کروی توزیع شده باشد. اگر پتانسیل الکتریکی در بی‌نهایت صفر در نظر گرفته شود، پتانسیل روی سطح کره‌ی زمین $V=q/4\pi\varepsilon_0 R$ می‌شود که q بار روی کره‌ی زمین و $R=6.37\times10^{6}\,\mathrm{m}$ شعاع کره‌ی زمین است. بزرگی میدان الکتریکی روی سطح زمین از $E=q/4\pi\varepsilon_0 R^2$ به‌دست می‌آید و در نتیجه داریم:

$$V = ER = (100\,\mathrm{V/m})(6.37\times10^{6}\,\mathrm{m}) \approx 6.4\times10^{8}\,\mathrm{V}$$

۷۶ در مرکز یک سطح گاؤسی به شعاع $4.00\,\mathrm{cm}$ گویی به شعاع $1.00\,\mathrm{cm}$ با توزیع بار یکنواخت قرار دارد. شار الکتریکی (خالص) عبوری از سطح این کره‌ی گاؤسی $+5.60\times10^{4}\,\mathrm{N\cdot m^2/C}$ است. پتانسیل الکتریکی در فاصله‌ی $12.0\,\mathrm{cm}$ از مرکز این گوی چقدر است؟

حل یک سطح گاؤسی کروی به شعاع $0.0400\,\mathrm{m}$ هم‌مرکز با گوی در نظر می‌گیریم و قانون گاؤس را به‌کار می‌بندیم. از قانون گاؤس داریم:

$$q_{\mathrm{enc}} = \varepsilon_0\Phi = (8.85\times10^{-12}\,\mathrm{C^2/N\cdot m^2})(5.60\times10^{4}\,\mathrm{N\cdot m^2/C})$$

$$= +4.96\times10^{-7}\,\mathrm{C}$$

و در نتیجه پتانسیل الکتریکی در فاصله $r=0.120\,\mathrm{m}$ چنین می‌شود:

$$V = \frac{q_{\mathrm{enc}}}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{(8.99\times10^{9}\,\mathrm{N\cdot m^2/C^2})(4.96\times10^{-7}\,\mathrm{C})}{0.120\,\mathrm{m}}$$

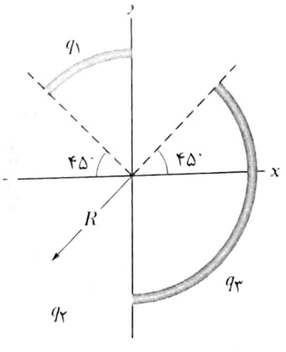
$$= 3.71\times10^{4}\,\mathrm{V}$$

۷۷ در یک آزمایش قطره‌های روغن میلیکان (بخش ۲۲-۶)، میدان الکتریکی یکنواخت $1.92\times10^{5}\,\mathrm{N/C}$ در ناحیه‌ی میان دو صفحه که به فاصله‌ی $1.50\,\mathrm{cm}$ از هم قرار دارند، برقرار شده است. پتانسیل الکتریکی میان این صفحه‌ها را به‌دست آورید.

حل اختلاف پتانسیل برابر است با

$$\Delta V = E\Delta s = (1.92\times10^{5}\,\mathrm{N\cdot C})(0.0150\,\mathrm{m}) = 2.90\times10^{3}\,\mathrm{V}$$

۷۸ شکل ۲۴-۶۳ سه کمان نارسانا به شعاع $R=8.50\,\mathrm{cm}$ را نشان می‌دهد. بار روی کمان‌ها عبارت‌اند از $q_1=4.52\,\mathrm{pC}$، $q_2=-2.00q_1$، و $q_3=+3.00q_1$. به‌ازای $V=0$ در فاصله‌ی نامتناهی، پتانسیل الکتریکی خالص حاصل از این کمان‌ها در مرکز مشترک خمیدگی آنها چقدر است؟



شکل ۲۴-۶۳ مسئله‌ی ۷۸

حل هر سه کمان به فاصله‌ی یکسانی از مکانی هستند که می‌خواهیم پتانسیل را در آنجا محاسبه کنیم. همچنین در حل مسئله ۲۴ دیدیم که پتانسیل از حاصل از کمان به زاویه‌ی آن بستگی ندارد و بنابراین داریم:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{+Q_1}{R} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-2Q_1}{R} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{+3Q_1}{R}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Q_1}{R} = \frac{2(8.99\times10^{9}\,\mathrm{N\cdot m^2/C^2})(4.52\times10^{-12}\,\mathrm{C})}{0.0850\,\mathrm{m}}$$

$$= 0.956\,\mathrm{V}$$

۷۹ الکترونی از حالت سکون روی محور یک دوقطبی الکتریکی که در جای خود ثابت شده است و دارای بار e و فاصله‌ی جدایی بارهای $d=20\,\mathrm{pm}$ است، رها می‌شود. نقطه‌ی رها شدن در طرف مثبت دوقطبی، به فاصله‌ی $7.0d$ از مرکز دوقطبی است. تندی الکترون وقتی به نقطه‌ی $5.0d$ از مرکز دوقطبی می‌سد، چقدر است؟

حل انرژی پتانسیل الکتریکی در حضور دوقطبی چنین می‌شود:

$$U = qV_{\text{دوقطبی}} = \frac{qp\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{(-e)(ed)\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

می‌خواهیم با استفاده از این رابطه، پایستگی انرژی را به‌کار گیریم. توجه کنید $\theta_i=\theta_f=0$، ولی $r_i=7.0d$ و $r_f=5.0d$ است. **همچنین** $K_i=0$ و $K_f=\frac{1}{2}m_e v_f^2$ است، که به دنبال v_f **می‌گردیم.**

Scanned by CamScanner

$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

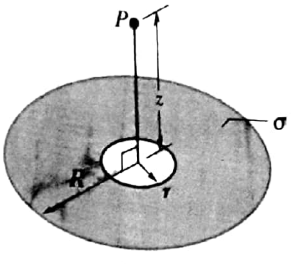
و از آنجا

$$v_f = \sqrt{\frac{2e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e d}\left(\frac{1}{25} - \frac{1}{49}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{2(8.99\times10^{9}\,\mathrm{N\cdot m^2/C^2})(1.6\times10^{-19}\,\mathrm{C})^2}{(9.11\times10^{-31}\,\mathrm{kg})(20\times10^{-12}\,\mathrm{m})}\left(\frac{1}{25} - \frac{1}{49}\right)}$$

$$= 7.0\times10^{5}\,\mathrm{m/s}$$

۸۰ شکل ۲۴-۶۴ حلقه‌ای به شعاع خارجی $R = 13.0\,\mathrm{cm}$، شعاع داخلی $r = 0.200R$ و چگالی سطحی بار یکنواخت $6.20\,\mathrm{pC/m^2}$ را نشان می‌دهد. به‌ازای $V = 0$ در فاصله‌ی نامتناهی، پتانسیل الکتریکی در نقطه‌ی P واقع بر محور مرکزی حلقه، به فاصله‌ی $z = 2.00R$ از مرکز حلقه، چقدر است؟



شکل ۲۴-۶۴ مسئله‌ی ۸۰

حل می‌توانیم از اصل برهم‌نهی استفاده کنیم و دستگاه را شامل قرصی با چگالی سطحی σ و شعاع R، و قرصی با چگالی $-\sigma$ و شعاع r در نظر بگیریم و آنگاه با استفاده از معادله‌ی ۲۴-۳۷ کتاب برای میدان یک قرص باردار بر روی نقطه‌ای روی محور مرکزی آن چنین به‌دست آوریم:

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{z^2+R^2} - z\right) + \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{z^2+r^2} - z\right)$$

ولی اگر بخواهیم مسئله را به‌طور مستقیم حل کنیم، می‌توانیم یک عنصر سطحی از قرص به فاصله‌ی r' از مرکز حلقه در نظر بگیریم و آنگاه خواهیم داشت:

$$V_P = k\int\frac{dq}{r} = k\int\frac{\sigma dA}{r} = k\sigma\int_{R_1}^{R_2}\frac{2\pi r' dr'}{(r'^2+z^2)^{1/2}}$$

$$= k\sigma 2\pi (r'^2+z^2)^{1/2}\Big|_{R_1}^{R_2}$$

$$= 2k\sigma\pi\left[(R_2^2+z^2)^{1/2} - (R_1^2+z^2)^{1/2}\right]$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{z^2+R_2^2} - \sqrt{z^2+R_1^2}\right)$$

توجه کنید که R_1 و R_2 همان r و R نشان داده شده در شکل‌اند که ما برای آنکه نمادها با هم اشتباه نشوند از آن‌ها استفاده کرده‌ایم. در هر حال با قرار دادن $r = R_1 = 0.200R$ ، $z = 2.00R$ ، و $R_2 = r$ خواهیم داشت:

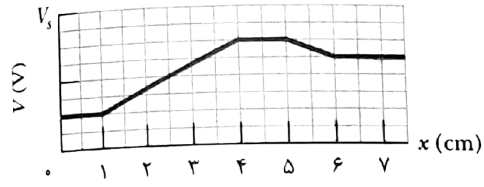
$$V = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\left(\frac{5\sqrt{5} - \sqrt{101}}{10}\right)$$

که در یکاهای SI چنین به‌دست می‌دهد:

$$V = \frac{(6.20\times10^{-12})(0.130)}{8.85\times10^{-12}}\left[\frac{5\sqrt{5} - \sqrt{101}}{10}\right]$$

$$= 1.03\times10^{-2}\,\mathrm{V}$$

۸۱ GO **الکترون در چاه.** شکل ۲۴-۶۵ پتانسیل الکتریکی V را روی محور x نشان می‌دهد. محور قائم با $V_s = 8.0\,\mathrm{V}$ مقیاس‌بندی شده است. الکترونی از $x = 4.5\,\mathrm{cm}$ با انرژی جنبشی اولیه‌ی $3.00\,\mathrm{eV}$ رها می‌شود. (الف) اگر این الکترون در ابتدا رو به سمت منفی محور x در حرکت باشد، آیا به یک نقطه‌ی برگشت می‌رسد (اگر بله، مختصه‌ی x این نقطه چیست) یا اینکه از ناحیه‌ی رسم شده می‌گریزد (اگر چنین است، تندی آن در $x = 0$ چقدر است؟) (ب) اگر این الکترون در ابتدا رو به سمت مثبت محور x در حرکت باشد، آیا به یک نقطه‌ی برگشت می‌رسد (اگر بله، مختصه‌ی x این نقطه چیست) یا اینکه از ناحیه‌ی رسم شده می‌گریزد (اگر چنین است، تندی آن در $x = 7.0\,\mathrm{cm}$ چقدر است؟) اگر این الکترون فقط در سمت چپ $x = 4.0\,\mathrm{cm}$ حرکت کند، (پ) بزرگی F و (ت) جهت (رو به سمت مثبت یا رو به سمت منفی محور x) نیروی الکتروستاتیکی وارد بر آن چیست؟ اگر این الکترون فقط در سمت راست $x = 5.0\,\mathrm{cm}$ حرکت کند، (ث) F و (ج) جهت آن چیست؟



شکل ۲۴-۶۵ مسئله‌ی ۸۱

حل (الف) وقتی الکترون رها می‌شود، انرژی آن $K + U = 3.00\,\mathrm{eV} - 6.00\,\mathrm{eV} = -3.00\,\mathrm{eV}$ است. (U) را از روی منحنی به‌ازای $x = 4.5\,\mathrm{cm}$ به‌دست آوردیم. توجه کنید منحنی پتانسیل را با استفاده از رابطه‌ی $U = qV = -eV$ به انرژی پتانسیل تبدیل کرده‌ایم. مثلاً به این ترتیب مقدار $2.0\,\mathrm{V}$ نشان داده شده در $x = 0$، $-2.0\,\mathrm{eV}$ و مقدار $6.0\,\mathrm{V}$ نشان داده شده در $x = 4.5\,\mathrm{cm}$، $-6.0\,\mathrm{eV}$ می‌شود و الی آخر. انرژی کل، ثابت و برابر با $-3.00\,\mathrm{eV}$ است. پس، برای یافتن نقطه‌ی بازگشت باید خطی افقی به ارتفاع $-3.00\,\mathrm{eV}$ رسم کنیم و ببینیم آیا منحنی انرژی پتانسیل را در نقطه‌ای قطع می‌کند یا نه؟ از روی منحنی درمی‌یابیم که این تقریباً در $x = 1.75\,\mathrm{cm}$ است.

(ب) خط افقی به ارتفاع $-3.00\,\mathrm{eV}$ منحنی را در سمت راست نقطه‌ی رها شدن، در هیچ جا قطع نمی‌کند و بنابراین نقطه‌ی بازگشتی نداریم. تندی الکترون در $x = 7.0\,\mathrm{cm}$ را با استفاده از پایستگی انرژی به‌دست می‌آوریم. در این نقطه، انرژی ذره صرفاً جنبشی است و بنابراین داریم:

$$E_i = \frac{1}{2}m_e v^2$$

$$\Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2E_i}{m_e}} = \sqrt{\frac{2(2.0\,\mathrm{eV})(1.6\times10^{-19}\,\mathrm{J/eV})}{9.11\times10^{-31}\,\mathrm{kg}}}$$

$$= 8.4\times10^{5}\,\mathrm{m/s}$$

(پ) میدان الکتریکی در هر نقطه‌ی دلخواه برابر با منفی شیب منحنی پتانسیل در آن نقطه است. همچنین می‌دانیم نیروی وارد بر پروتون

$\vec{F}=q\vec{E}=-e\vec{E}$ می‌شود. شیب منحنی پتانسیل در ناحیه‌ی سمت چپ $x=۴/۰\text{cm}$ برابر $۱۳۳\,\text{V/m}$ است و در نتیجه $\vec{E}=(-۱۳۳\,\text{V/m})\hat{\mathbf{i}}$ می‌شود و از آنجا خواهیم داشت:

$$\vec{F}=(-۱/۶\times۱۰^{-۱۹}\,\text{C})(-۱۳۳\,\text{V/m})\hat{\mathbf{i}}=(+۲/۱\times۱۰^{-۱۷}\,\text{N})\hat{\mathbf{i}}$$

پس، بزرگی $\vec{F}$ برابر $۲/۱\times۱۰^{-۱۷}\,\text{N}$ است.

(ت) همان‌طور که در بالا دیدیم، $\vec{F}$ در جهت $+x$ می‌شود.

(ث) در ناحیه‌ی سمت راست $x=۵/۰\text{cm}$، شیب منحنی پتانسیل $-۱۰۰\,\text{V/m}$ و در نتیجه $\vec{E}=(+۱۰۰\,\text{V/m})\hat{\mathbf{i}}$ است. بنابراین نیروی $\vec{F}$ برابر است با

$$\vec{F}=(-۱/۶\times۱۰^{-۱۹}\,\text{C})(+۱۰۰\,\text{V/m})\hat{\mathbf{i}}=(-۱/۶\times۱۰^{-۱۷}\,\text{N})\hat{\mathbf{i}}$$

که بزرگی آن $۱/۶\times۱۰^{-۱۷}\,\text{N}$ می‌شود.

(ج) همان‌طور که در بالا دیدیم، جهت $\vec{F}$ در سوی منفی x است.

۸۲ (الف) اگر کره زمین دارای چگالی سطحی بار خالص ۱/۰ الکترون/$\text{m}^۲$ بود (یک فرض بسیار غیرواقعی)، پتانسیل آن چقدر می‌شد؟ (در فاصله‌ی نامتناهی، $V=۰$ اختیار کنید.) (ب) بزرگی و (پ) جهت (به طور شعاعی رو به داخل یا رو به خارج) میدان الکتریکی حاصل از کره‌ی زمین درست در بیرون سطح آن چگونه می‌شد؟

حل (الف) پتانسیل الکتریکی چنین می‌شود:

$$V_e=\frac{Q_e}{۴\pi\varepsilon_۰R_e}=\frac{۴\pi R_e^۲\sigma_e}{۴\pi\varepsilon_۰R_e}=۴\pi R_e\sigma_e k$$

$$=۴\pi(۶/۳۷\times۱۰^۶\,\text{m})(۱/۰\ \text{الکترون}/\text{m}^۲)$$

$$\times(-۱/۶۰\times۱۰^{-۱۹}\,\text{C}/\text{الکترون})(۸/۹۹\times۱۰^۹\,\text{N}\cdot\text{m}^۲/\text{C}^۲)$$

$$=-۰/۱۲\text{V}$$

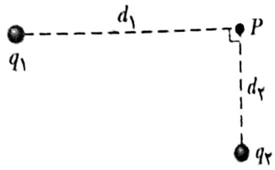
(ب) میدان الکتریکی برابر است با

$$E=\frac{V_e}{R_e}=-\frac{۰/۱۲\text{V}}{۶/۳۷\times۱۰^۶\,\text{m}}=-۱/۸\times۱۰^{-۸}\,\text{N/C}$$

یا $|E|=۱/۸\times۱۰^{-۸}\,\text{N/C}$.

(پ) علامت منفی در رابطه‌ی E حاکی از آن است که جهت $\vec{E}$ به‌طور شعاعی رو به داخل است.

۸۳ در شکل ۲۴-۶۶، نقطه‌ی P به فاصله‌ی $d_۱=۴/۰۰\,\text{m}$ از ذره‌ی ۱ $(q_۱=-۲e)$ و به فاصله‌ی $d_۲=۲/۰۰\,\text{m}$ از ذره‌ی ۲ $(q_۲=+۲e)$ قرار دارد، و هر دو ذره در مکان‌های خود ثابت شده‌اند. (الف) به‌ازای $V=۰$ در فاصله‌ی نامتناهی، V در نقطه‌ی P چقدر است؟ اگر ذره‌ای به بار $q_۳=+۲e$ را از فاصله‌ای نامتناهی به نقطه‌ی P بیاوریم (ب) چقدر کار باید انجام دهیم؟ و (پ) انرژی پتانسیل این دستگاه سه‌ذره‌ای چقدر می‌شود؟



شکل ۲۴-۶۶ مسئله‌ی ۸۳

حل (الف) با استفاده از $d=۲/۰۰\,\text{m}$، پتانسیل در نقطه‌ی P را به‌دست می‌آوریم.

$$V_P=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{+۲e}{d}+\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{-۲e}{d}=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{e}{d}$$

$$=(۸/۹۹\times۱۰^۹\,\text{N}\cdot\text{m}^۲/\text{C}^۲)\frac{(۱/۶۰\times۱۰^{-۱۹}\,\text{C})}{۲/۰۰\,\text{m}}$$

$$=۷/۱۹\times۱۰^{-۱۰}\,\text{V}$$

توجه کنید که در این محاسبه، فرض $V\to۰$ به‌ازای $r\to\infty$ در نظر گرفته شده است.

(ب) سهم ذره‌ی متحرک در انرژی پتانسیل هنگامی که در $r=\infty$ است برابر صفر است. وقتی این ذره به نقطه‌ی P آورده شود سهم آن در انرژی پتانسیل دستگاه برابر با $(۲e)V_P=۲/۳۰\times۱۰^{-۲۸}\,\text{J}$ می‌شود و بنابراین کار انجام شده برابر با $W_{\text{خارجی}}=۲/۳۰\times۱۰^{-۲۸}$ است.

(پ) انرژی پتانسیل حاصل از دو بار ثابت شده برابر است با

$$U=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{(۲e)(-۲e)}{\sqrt{۴/۰۰^۲+۲/۰۰^۲}}=-۲/۰۶\times۱۰^{-۲۸}\,\text{J}$$

بنابراین برای محاسبه‌ی انرژی پتانسیل کلّ دستگاه باید این انرژی پتانسیل، با انرژی پتانسیل به‌دست آمده در قسمت (ب) جمع شود:

$$U_{\text{دستگاه}}=۲/۳۰\times۱۰^{-۲۸}\,\text{J}-۲/۰۶\times۱۰^{-۲۸}\,\text{J}=۲/۴۰\times۱۰^{-۲۹}\,\text{J}$$

۸۴ کره‌ی رسانای توپُری به شعاع ۳/۰cm دارای بار ۳۰nC است که به‌طور یکنواختی روی سطح آن پخش شده است. A را نقطه‌ای به فاصله‌ی ۱/۰cm از مرکز این کره، S را نقطه‌ای روی سطح این کره، و B را نقطه‌ای به فاصله‌ی ۵/۰cm از مرکز این کره در نظر بگیرید. اختلاف پتانسیل الکتریکی (الف) V_S-V_B و (ب) V_A-V_B چقدر است؟

حل میدان الکتریکی در سرتاسر حجم یک رسانا برابر با صفر است و بنابراین پتانسیل داخل یک کره‌ی رسانا ثابت و مقدار آن با پتانسیل روی سطح کره برابر است و بنابراین داریم:

$$V_A=V_S=\frac{q}{۴\pi\varepsilon_۰R}$$

که در آن $q=۳۰\times۱۰^{-۹}\,\text{C}$ و $R=۰/۰۳۰\,\text{m}$ است. برای نقاط بیرون از سطح رسانا، پتانسیل $V_B=q/۴\pi\varepsilon_۰r$ است که در اینجا $r=۰/۰۵۰\,\text{m}$ می‌باشد.

(الف) از بالا درمی‌یابیم:

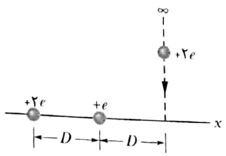
$$V_S-V_B=\frac{q}{۴\pi\varepsilon_۰}\left(\frac{۱}{R}-\frac{۱}{r}\right)=۳/۶\times۱۰^۳\,\text{V}$$

(ب) و به همان ترتیب

$$V_A-V_B=\frac{q}{۴\pi\varepsilon_۰}\left(\frac{۱}{R}-\frac{۱}{r}\right)=۳/۶\times۱۰^۳\,\text{V}$$

۸۵ در شکل ۲۴-۶۷، ذره‌ای به بار $+۲e$ را از فاصله‌ی نامتناهی تا محور x حرکت می‌دهیم. چقدر کار باید انجام دهیم؟ فاصله‌ی D برابر با ۴/۰۰m است.

Scanned by CamScanner



شکل ۲۴-۶۷ مسئله‌ی ۸۵

حل توجه کنید که پتانسیل خالص (ناشی از بارهای ثابت شده) در بی‌نهایت صفر است و کار لازم برابر با انرژی پتانسیل در پیکربندی نهایی است. پتانسیل حاصل از دو بار ثابت شده در نقطه‌ی مورد نظر نهایی برابر است با

$$V=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{(+۲e)}{۲D}+\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{+e}{D}=\frac{۲}{۴\pi\varepsilon_۰}\left(\frac{e}{D}\right)$$

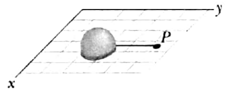
با توجه به اینکه $W_{\text{خارجی}}=qV$ است، خواهیم داشت

$$W_{\text{خارجی}}=(۲e)\frac{۲}{۴\pi\varepsilon_۰}\left(\frac{e}{D}\right)=\frac{۴e^۲}{۴\pi\varepsilon_۰ D}$$

$$=\frac{۴(۸{,}۹۹\times۱۰^۹\text{N}\cdot\text{m}^۲/\text{C}^۲)(۱{,}۶۰\times۱۰^{-۱۹}\text{C})^۲}{۴{,}۰۰\text{m}}$$

$$=۲{,}۳۰\times۱۰^{-۲۸}\text{J}$$

۸۶ شکل ۲۴-۶۸ نیم‌کره‌ای با بار $۴{,}۰۰\mu C$ را نشان می‌دهد که بار به‌طور یکنواختی در سرتاسر حجم آن پخش شده است. این نیم‌کره مثل گریپ‌فروت نصفه‌ای از طرف صاف خود، روی صفحه‌ی xy قرار گرفته است. نقطه‌ی P روی این صفحه، در راستای یک خطّ شعاعی از مرکز خمیدگی نیم کره، به فاصله‌ی شعاعی ۱۵cm قرار دارد. پتانسیل الکتریکی حاصل از این نیم‌کره در نقطه‌ی P چقدر است؟



شکل ۲۴-۶۸ مسئله‌ی ۸۶

حل چون پتانسیل الکتریکی یک کمیت نرده‌ای است، محاسبه‌ی آن بسیار ساده‌تر از محاسبه‌ی میدان الکتریکی است. در اینجا کافی است پتانسیل حاصل از یک کره‌ی کامل را بخش بر دو کنیم تا پاسخ به‌دست آید. بار کره‌ی کامل (با همان چگالی) برابر با دو برابر بار نیمکره و بنابراین $Q=۸{,}۰۰\mu C$ است. در نتیجه داریم:

$$V=\frac{۱}{۲}V_{\text{کره‌ی کامل}}=\frac{۱}{۲}\left(\frac{Q}{۴\pi\varepsilon_۰ r}\right)$$

$$=\frac{۱}{۲}\frac{(۸{,}۹۹\times۱۰^۹\text{N}\cdot\text{m}^۲/\text{C}^۲)(۸{,}۰۰\times۱۰^{-۶}\text{C})}{(۰{,}۱۵\text{m})}$$

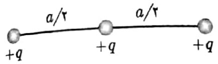
$$=۲{,}۴\times۱۰^۵\text{V}$$

۸۷ سه بار $+۰{,}۱۲\text{C}$ تشکیل مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع ۱٫۷m را داده‌اند. با فرض آنکه انرژی با آهنگ ۰٫۸۳kW اعمال شود، چند روز لازم است تا یکی از بارها به وسط خطّ واصل دو بار آورده شود؟

حل کار لازم برای تشکیل آرایش مثلثی برابر است با

$$W=W_۱+W_۲+W_۳$$
$$=(۰)+\left(\frac{kq^۲}{a}\right)+\left(\frac{kq^۲}{a}+\frac{kq^۲}{a}\right)=۳k\frac{q^۲}{a}=U_۱$$

حال اگر یکی از بارها به وسط خط وصل‌کننده‌ی دو بار دیگر حر[کت دهیم]
به چنین آرایشی می‌رسیم



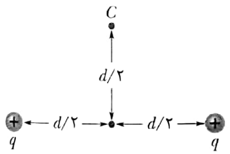
کار لازم برای تشکیل چنین آرایشی برابر است با

$$W'=W'_۱+W'_۲+W'_۳=(۰)+\left(\frac{kq^۲}{a/۲}\right)$$
$$+\left(k\frac{q^۲}{a/۲}+\frac{kq^۲}{a}\right)=۵k\frac{q^۲}{a}=U_۲$$
$$\Delta U=W'-W=۲k\frac{q^۲}{a}$$
$$=۲(۸{,}۹۹\times۱۰^۹\text{N}\cdot\text{m}^۲/\text{C}^۲)\frac{(۰{,}۱۲\text{C})^۲}{(۱{,}۷\text{m})}$$
$$=۱{,}۵\times۱۰^۸\text{J}$$

هر کیلووات ساعت معادل با ۳۶۰۰kJ است. بنابراین مقدار بالا بر[ابر]
kWh تقریباً برابر ۴۲kWh می‌شود. اگر آهنگ مصرف [انرژی]
۰٫۸۳kWh باشد، آنگاه زمان لازم چنین می‌شود:

$$t=\frac{۴۲\text{kWh}}{۰{,}۸۳\text{kW}}=۵۱\text{h}\approx ۲\ \text{روز}$$

۸۸ دو بار $q=+۲{,}۰\mu C$ به فاصله‌ی $d=۲{,}۰\text{cm}$ از هم ثابت [شده‌اند]
(شکل ۲۴-۶۹). (الف) به‌ازای $V=۰$ در فاصله‌ی نامتناهی، پ[تانسیل]
الکتریکی در نقطه‌ی C چقدر است؟ (ب) بار سوم $+۲{,}۰\mu C=$ [را از]
فاصله‌ای نامتناهی به نقطه‌ی C می‌آوریم. چقدر کار باید انجام دهی[م؟]
وقتی بار سوم در جای خود قرار گیرد، انرژی پتانسیل Uی این پیک[ربندی]
شامل سه بار چقدر می‌شود؟



شکل ۲۴-۶۹ مسئله‌ی ۸۸

حل (الف) بارها برابر و در فاصله‌ی یکسانی از C هستند. از
فیثاغورس برای یافتن فاصله‌ی r بارها از نقطه‌ی C استفاده می‌کنی[م]

$$r=\sqrt{(d/۲)^۲(d/۲)^۲}=d/\sqrt{۲}$$

پتانسیل الکتریکی در نقطه‌ی C برابر با مجموع پتانسیل حاصل از
مجزا در این نقطه است. با توجه به اینکه بارها و فاصله‌ی آنها
است، بنابراین پتانسیل در نقطه‌ی C مساوی با دو برابر پتانسیل ح[اصل]

هر یک از بارها می‌شود:

$$V = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sqrt{2}}{d} = \frac{2\sqrt{2}q}{4\pi\varepsilon_0 d}$$

$$= \frac{(8.99\times10^9\,\mathrm{N\cdot m^2/C^2})(2)(\sqrt{2})(2.0\times10^{-6}\,\mathrm{C})}{0.020\,\mathrm{m}}$$

$$= 2.54\times10^6\,\mathrm{V}$$

(ب) کار انجام شده برابر با تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی است. وقتی بار را از بی‌نهایت به نقطه‌ی C می‌آوریم، پتانسیل الکتریکی از صفر به qV تغییر می‌کند و بنابراین داریم:

$$W_{\text{خارجی}} = qV = (2.0\times10^{-6}\,\mathrm{C})(2.54\times10^6\,\mathrm{V}) = 5.1\,\mathrm{J}$$

(پ) انرژی پتانسیل الکتریکی برابر کاری است که انجام می‌شود تا بارها از بی‌نهایت به نقطه‌ی مورد نظر آورده شوند.

$$U = W_1 + W_2 + W_3 = 0 + \left(k\frac{q^2}{d}\right) + \left(k\frac{q^2}{r} + k\frac{q^2}{r}\right)$$

$$= kq^2\left(\frac{1}{d} + \frac{2}{r}\right) = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 d} + W_{\text{خارجی}}$$

که $W_{\text{خارجی}}$ همان است که در قسمت ب به‌دست آوردیم. به عبارت دیگر می‌توانیم انرژی پتانسیل را این‌گونه هم تفسیر کنیم که برابر مجموع کار انجام شده برای آوردن بار سوم و انرژی پتانسیل حاصل از برهم‌کنش دو بار اولیه است. در هر حال خواهیم داشت:

$$U = \frac{(8.99\times10^9\,\mathrm{N\cdot m^2/C^2})(2.0\times10^{-6}\,\mathrm{C})^2}{0.020\,\mathrm{m}} + 5.1\,\mathrm{J}$$

$$= 6.9\,\mathrm{J}$$

۸۹ ابتدا دو الکترون به فاصله‌ی جدایی $2.00\,\mu\mathrm{m}$ در مکان‌های خود ثابت شده‌اند. چقدر کار باید انجام دهیم تا برای تشکیل یک مثلث متساوی‌الاضلاع، بار سومی را از فاصله‌ای نامتناهی بیاوریم؟

حل پتانسیل خالص ناشی از بارهای ثابت شده در نقطه‌ی P (مکانی که باید الکترون سوم را در آنجا قرار دهیم) با استفاده از معادله‌ی ۲۴-۲۷ به‌دست می‌آید:

$$V_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-e}{d} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-e}{d} = \frac{-e}{2\pi\varepsilon_0 d}$$

که در آن فرض کرده‌ایم که در $r=\infty$، $V=0$ است. بنابراین به‌ازای $e = 1.60\times10^{-19}\,\mathrm{C}$ و $d = 2.00\times10^{-6}\,\mathrm{m}$ به $V_P = -1.44\times10^{-3}\,\mathrm{V}$ می‌رسیم. در نتیجه کار مورد نیاز با استفاده از معادله‌ی ۲۴-۱۴ چنین می‌شود:

$$= (-e)V_P = (-1.60\times10^{-19}\,\mathrm{C})(-1.44\times10^{-3}\,\mathrm{V})$$

$$= 2.30\times10^{-22}\,\mathrm{J}$$

۹۰ ذره‌ای با بار مثبت Q در نقطه‌ی P ثابت شده است. ذره‌ی دیگری به جرم m و بار منفی $-q$ با تندی ثابت روی دایره‌ای به شعاع r_1 و به مرکز P در حرکت است. عبارتی برای کار W به‌دست آورید که باید توسط یک عامل خارجی روی ذره‌ی دوم انجام گیرد تا شعاع دایره‌ی حرکت آن به r_2 افزایش یابد؟

حل ذره‌ی با بار $-q$ هم انرژی پتانسیل و هم انرژی جنبشی دارد و هر دوی این انرژی‌ها با تغییر شعاع مدار تغییر می‌کنند. نخست عبارتی برای انرژی کل برحسب شعاع مدار r به‌دست می‌آوریم. بار Q شتاب مرکزگرای لازم برای حرکت دایره‌ای یکنواخت $-q$ را تأمین می‌کند. آنگاه از قانون دوم نیوتون داریم

$$\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow mv^2 = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

و از آنجا انرژی جنبشی بار $-q$ برابر $K = \frac{1}{2}mv^2 = Qq/8\pi\varepsilon_0 r$ می‌شود. از طرفی، انرژی پتانسیل برابر است با $U = -Qq/4\pi\varepsilon_0 r$ و در نتیجه انرژی کل چنین می‌شود:

$$E = K + U = \frac{Qq}{8\pi\varepsilon_0 r} - \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r} = -\frac{Qq}{8\pi\varepsilon_0 r}$$

وقتی شعاع مدار r_1 است، انرژی $E_1 = -Qq/8\pi\varepsilon_0 r_1$ و وقتی شعاع مدار r_2 است، انرژی $E_2 = -Qq/8\pi\varepsilon_0 r_2$ است. اختلاف انرژی $E_2 - E_1$ برابر با کار $W_{\text{خارجی}}$ انجام شده توسط عامل خارجی برای تغییر شعاع است:

$$W_{\text{خارجی}} = E_2 - E_1 = -\frac{Qq}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = \frac{Qq}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

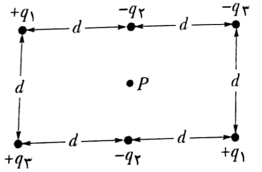
۹۱ دو صفحه‌ی رسانای باردار تخت و موازی، به فاصله‌ی $d = 1.00\,\mathrm{cm}$ از هم قرار گرفته‌اند و اختلاف پتانسیل $\Delta V = 625\,\mathrm{V}$ را در میان صفحه‌ها ایجاد کرده‌اند. یک الکترون از سطح یکی از این صفحه‌ها مستقیماً به طرف صفحه‌ی دیگر پرتاب می‌شود. اگر این الکترون درست روی سطح صفحه‌ی مقابل متوقف شود، تندی اولیه‌ی آن چقدر بوده است؟

حل با استفاده از قضیه‌ی کار ـ انرژی جنبشی، تندی اولیه v_i را به‌دست می‌آوریم. با توجه به اینکه $K_f = 0$ است، $K_i = \frac{1}{2}m_e v_i^2 = e\Delta V$ می‌شود و از آنجا خواهیم داشت:

$$v_i = \sqrt{\frac{2e\Delta V}{m_e}} = \sqrt{\frac{2(1.60\times10^{-19}\,\mathrm{J})(625\,\mathrm{V})}{9.11\times10^{-31}\,\mathrm{kg}}}$$

$$= 1.48\times10^7\,\mathrm{m/s}$$

۹۲ در شکل ۲۴-۷۰، نقطه‌ی P در مرکز مستطیل قرار دارد. به‌ازای $V=0$ در فاصله‌ی نامتناهی، $q_1 = 5.00\,\mathrm{fC}$، $q_2 = 2.00\,\mathrm{fC}$، $q_3 = 3.00\,\mathrm{fC}$ و $d = 2.54\,\mathrm{cm}$، پتانسیل الکتریکی خالص حاصل از این شش ذره‌ی باردار در نقطه‌ی P چقدر می‌شود؟



شکل ۲۴-۷۰ مسئله‌ی ۹۲

Scanned by CamScanner

حل پتانسیل الکتریکی خالص در نقطه‌ی P برابر با مجموع پتانسیل الکتریکی حاصل از هر یک از شش بار مجزا است:

$$V_P=\sum_{i=1}^{6}V_{pi}=\sum_{i=1}^{6}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$$

$$=\frac{10^{-15}}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{5.00}{\sqrt{d^2+(d/2)^2}}+\frac{-2.00}{d/2}+\frac{-3.00}{\sqrt{d^2+(d/2)^2}}\right.$$

$$\left.+\frac{3.00}{\sqrt{d^2+(d/2)^2}}+\frac{-2.00}{d/2}+\frac{5.00}{\sqrt{d^2+(d/2)^2}}\right]$$

$$=\frac{9.40\times10^{-16}}{4\pi\varepsilon_0(2.54\times10^{-2})}=3.34\times10^{-4}\,\mathrm{V}$$

۹۳ بار یکنواخت $+16.0\,\mu\mathrm{C}$ روی حلقه‌ی دایره‌ای نازکی پخش شده است که در صفحه‌ی xy و به مرکز مبداء آن صفحه قرار دارد. شعاع این حلقه $3.00\,\mathrm{cm}$ است. اگر نقطه‌ی A در مبدأ و نقطه‌ی B روی محور z در $z=4.00\,\mathrm{cm}$ واقع باشد، V_B-V_A چقدر است؟

حل برای نقطه‌ای روی محور حلقه، پتانسیل (با فرض $V=0$ در $r=\infty$) چنین می‌شود:

$$V=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{z^2+R^2}}$$

و از آنجا خواهیم داشت:

$$V_B-V_A=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{z_B^2+R^2}}-\frac{1}{R}\right)$$

$$=(16\times10^{-6}\,\mathrm{C})(8.99\times10^{9}\,\mathrm{N\cdot m^2/C^2})$$

$$\times\left(\frac{1}{\sqrt{(0.0400\,\mathrm{m})^2+(0.0300\,\mathrm{m})^2}}-\frac{1}{0.0300\,\mathrm{m}}\right)$$

$$=-1.92\times10^{6}\,\mathrm{V}$$

۹۴ بار نقطه‌ای $q=1.50\times10^{-8}\,\mathrm{C}$ را در نظر بگیرید و فرض کنید در فاصله‌ی نامتناهی $V=0$ است. (الف) شکل و ابعاد سطحی هم‌پتانسیل که دارای پتانسیل $30.0\,\mathrm{V}$ حاصل از فقط بار q است، چگونه است؟ (ب) آیا سطوحی که پتانسیل آنها به اندازه‌ی مقدار ثابتی (مثلاً، $1.0\,\mathrm{V}$) تفاوت دارند، به فاصله‌ی یکسانی از هم قرار گرفته‌اند؟

حل (الف) سطح هم‌پتانسیل کروی است و باید شعاع آن را تعیین کنیم. برای شعاع این سطح با استفاده از $V=kq/r$ داریم:

$$r=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 V}=\frac{(8.99\times10^{9}\,\mathrm{N\cdot m^2/C^2})(1.50\times10^{-8}\,\mathrm{C})}{30.0\,\mathrm{V}}=4.50\,\mathrm{m}$$

(ب) اگر پتانسیل تابعی خطی از r بود آنگاه سطوحی که به اندازه‌ی مقدار ثابتی تفاوت داشتند به فاصله‌ی یکسانی واقع بودند. ولی $V\propto\frac{1}{r}$ است و بنابراین با افزایش r فاصله‌ی آن‌ها بیش‌تر و بیش‌تر می‌شود.

۹۵ یک پوسته‌ی کروی ضخیم با بار Q و چگالی حجمی بار یکنواخت ρ در بین شعاع‌های r_1 و $r_2>r_1$ محدود شده است. به‌ازای $V=0$ در فاصله‌ی نامتناهی، پتانسیل الکتریکی V را به صورت تابعی از فاصله‌ی r از مرکز این توزیع بار، با در نظر گرفتن ناحیه‌های (الف) $r>r_2$، (ب) $r_2>r>r_1$، و (پ) $r<r_1$ به‌دست آورید. (ت) آیا این پاسخ‌ها با یکدیگر در $r=r_2$ و $r=r_1$ سازگارند؟ (راهنمایی: بخش ... را ببینید.)

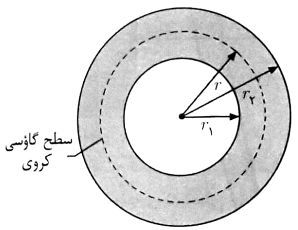
حل (الف) برای $r>r_2$ سطح گاؤسی کروی به مرکز پوسته‌ی کروی و به شعاع $r>r_2$ در نظر می‌گیریم و قانون گاؤس را به کار می‌گیریم. بار محصورشده در این سطح کروی $q_{\mathrm{enc}}=Q$ است و بنابراین قانون گاؤس چنین به‌دست می‌دهد:

$$\oint\vec{E}\cdot d\vec{A}=q_{\mathrm{enc}}/\varepsilon_0=Q/\varepsilon_0\ \Rightarrow\ E_1=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

پتانسیل در یک نقطه، اختلاف پتانسیل آن نقطه با بی‌نهایت است. در نتیجه:

$$V_r-V_\infty=-\int_\infty^r E_1dr=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

(ب) برای $r_1<r<r_2$، نخست یک سطح گاؤسی کروی به مرکز پوسته‌ی کروی و به شعاع r در نظر می‌گیریم و میدان را در داخل پوسته‌ی کروی به‌دست می‌آوریم.



$$\oint\vec{E}\cdot d\vec{A}=q_{\mathrm{enc}}/\varepsilon_0$$

$$(E_2)(4\pi r^2)=\frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi(r^3-r_1^3)$$

و از آنجا $E_2=\dfrac{\rho(r^3-r_1^3)}{3\varepsilon_0 r^2}$ می‌شود. حال پتانسیل را در داخل پوسته محاسبه می‌کنیم:

$$V_r-V_\infty=-\int_\infty^r E\,dr=-\left[\int_\infty^{r_2}E_1dr+\int_{r_2}^{r}E_2dr\right]$$

$$=-\left[\int_\infty^{r_2}\frac{\rho(r_2^3-r_1^3)}{3\varepsilon_0 r^2}dr+\int_{r_2}^{r}\frac{\rho(r^3-r_1^3)}{3\varepsilon_0 r^2}dr\right]$$

$$=\frac{\rho(r_2^3-r_1^3)}{3\varepsilon_0 r}\bigg|_\infty^{r_2}-\frac{\rho}{6\varepsilon_0}r^2\bigg|_{r_2}^{r}-\frac{\rho r_1^3}{3\varepsilon_0 r}\bigg|_{r_2}^{r}$$

$$=\frac{\rho(r_2^3-r_1^3)}{3\varepsilon_0 r}-\frac{\rho}{6\varepsilon_0}(r^2-r_2^2)-\frac{\rho r_1^3}{3\varepsilon_0 r}+\frac{\rho r_1^3}{3\varepsilon_0 r_2}$$

$$=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left[\frac{3}{2}r_2^2-\frac{r_1^3}{r}-\frac{1}{2}r^2\right]$$

(پ) به‌ازای $r<r_1$ نخست یک سطح گاؤسی کروی هم‌مرکز با پوسته کروی در داخل ناحیه‌ی فاقد بار در نظر می‌گیریم. چون در داخل این سطح گاؤسی باری نهفته نیست، میدان در این ناحیه صفر است و در نتیجه خواهیم داشت:

$$V_r - V_\infty = -\int_\infty^r E\,dr$$
$$= -\left[\int_\infty^{r_2} E_1 dr + \int_{r_2}^{r_1} E_2 dr + \int_{r_1}^{r} E_3 dr\right]$$

چون جمله‌ی آخر صفر است، فقط کافی است که در نتیجه‌ی قسمت ب به جای r، مقدار r_1 را قرار دهیم:

$$V_r = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left[\frac{3}{2}r_2^2 - \frac{r_1^3}{r_1} - \frac{1}{2}r_1^2\right] = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left[r_2^2 - r_1^2\right]$$

(ت) بله، اگر بررسی کنیم به‌ازای $r=r_2$ پاسخ قسمت‌های الف و ب هر دو برابر $V=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left[r_2^2 - r_1^3/r_2\right]$ می‌شود و به‌ازای $r=r_1$ پاسخ قسمت‌های ب و پ با هم می‌خوانند. به‌علاوه در $r=r_1=r_2$ تمام پاسخ‌ها صفر می‌شوند و این نیز نتیجه‌ی درستی است. چراکه وقتی دو سطح خارجی و داخلی بر هم منطبق می‌شوند، حجم پوسته صفر و در نتیجه بار، میدان و پتانسیل نیز برابر صفر می‌شود.

۹۶ بار q به طور یکنواخت در سرتاسر یک حجم کروی به شعاع R پخش شده است. در فاصله‌ی نامتناهی $V=0$ اختیار کنید. (الف) V در فاصله‌ی شعاعی $r<R$ و (ب) اختلاف پتانسیل میان نقاط واقع در $r=R$ و نقطه‌ی واقع در $r=0$ چقدر است؟

حل برای محاسبه‌ی پتانسیل به میدان در درون و بیرون کره‌ی باردار یکنواخت نیاز داریم. در فصل پیش دیدیم که به این منظور باید سطح گاؤسی کروی هم‌مرکز با کره‌ی باردار و به شعاع نقطه‌ی مورد نظر در نظر بگیریم. در بیرون کره قانون گاؤس چنین به‌دست می‌دهد:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = q_{enc}/\varepsilon_0 \;\Rightarrow\; E_{خارج} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

و در داخل کره

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0} = \frac{qr^3/R^3}{\varepsilon_0}$$
$$\Rightarrow\; E_{داخل} = \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

(الف) پتانسیل در نقطه‌ی مورد نظر برابر با اختلاف پتانسیل آن نقطه با بی‌نهایت است.

$$V_r - V_\infty = -\int_\infty^r E\,dr = -\left[\int_\infty^R E_{خارج}\,dr + \int_R^r E_{داخل}\,dr\right]$$
$$= -\left[\int_\infty^R \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr + \int_R^r \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}dr\right]$$
$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\Big|_\infty^R - \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}r^2\Big|_R^r$$
$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} - \frac{qr^2}{8\pi\varepsilon_0 R^3} + \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R}$$
$$= \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}(3R^2 - r^2)$$

(ب) به این منظور در رابطه‌ی بالا باید $r=R$ و $r=0$ قرار دهیم و از آنجا خواهیم داشت:

$$V_R = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R}(3R^2 - R^2) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$
$$V_0 = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R}(3R^2) = \frac{3q}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

در نتیجه اختلاف پتانسیل چنین می‌شود:

$$V_R - V_0 = \frac{2q}{8\pi\varepsilon_0 R} - \frac{3q}{8\pi\varepsilon_0 R} = -\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

و یا $|\Delta V| = q/8\pi\varepsilon_0 R$ می‌شود.

۹۷ یک کره‌ی مسی توپُر به شعاع $1{,}0\,cm$ دارای پوشش سطحی بسیار نازکی از جنس نیکل است. برخی از اتم‌های نیکل پرتوزا هستند، یعنی هر اتم در حین واپاشی، یک الکترون گسیل می‌دارد. نیمی از این الکترون‌ها وارد کره‌ی مسی می‌شوند و هر کدام $100\,keV$ انرژی بر جای می‌گذارند. نیم دیگر این الکترون‌ها، با بار $-e$، از کره‌ی مسی دور می‌شوند. پوشش نیکلی دارای فعالیت $3{,}70\times10^8$ واپاشی پرتوزا در ثانیه است. کره‌ی مسی از نخ نارسانای بلندی آویزان است و بدین ترتیب از محیط اطراف خود منزوی شده است. (الف) چقدر طول می‌کشد تا پتانسیل این کره به اندازه‌ی $1000\,V$ افزایش پیدا کند؟ (ب) چقدر طول می‌کشد تا دمای کره بر اثر انرژی حاصل از الکترون‌ها به اندازه‌ی $5{,}0\,K$ افزایش پیدا کند؟ ظرفیت گرمایی کره $14\,J/K$ است.

حل (الف) به‌ازای $V=1000\,V$، معادله‌ی $V=q/4\pi\varepsilon_0 R$ را با $R=0{,}010\,m$ برای بار خالص روی کره حل می‌کنیم و از آنجا به $q=1{,}1\times10^{-9}\,C$ می‌رسیم. از تقسیم این مقدار بر $e\,(=1{,}6\times10^{-19}\,C)$، تعداد الکترون‌هایی که به کره‌ی مسی وارد شده‌اند برابر با $7{,}0\times10^9$ به دست می‌آید. ولی نیمی از این الکترون‌ها با آهنگ $3{,}7\times10^8$ واپاشی $/s$ واپاشی می‌کنند و بنابراین زمان لازم چنین می‌شود.

$$\frac{7{,}0\times10^9}{\frac{1}{2}(3{,}7\times10^8)s^{-1}} \approx 38\,s$$

(ب) چون پوشش نیکل در هر ثانیه $3{,}70\times10^8$ واپاشی می‌کند و نیمی از آن صرف باردار شدن کره‌ی مسی می‌شود، انرژی‌ای که در هر ثانیه به کره‌ی مسی داده می‌شود، برابر است با

$$U/t = \frac{1}{2}(3{,}70\times10^8\,s^{-1})(10^5\,eV) = 1{,}85\times10^{13}\,eV/s$$
$$= 2{,}96\times10^{-6}\,J/s$$

از طرفی، انرژی لازم برای آنکه دمای کره‌ی مسی به اندازه‌ی $\Delta T = 5{,}0\,K$ افزایش یابد برابر است با

$$Q = C\Delta T = (14\,J/K)(5{,}0\,K) = 70\,J$$

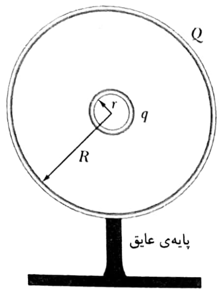
پس، زمان مورد نیاز چنین می‌شود

$$\frac{Q}{U/t} = \frac{70\,J}{2{,}96\times10^{-6}\,J/s} = 2{,}4\times10^7\,s = 2{,}7\times10^2\ \text{روز}$$

۹۸ در شکل ۲۴-۷۱، یک کره‌ی فلزی با بار $q=5{,}00\,\mu C$ و شعاع $r=3{,}00\,cm$ هم‌مرکز با کره‌ی فلزی بزرگ‌تری است که بار

Scanned by CamScanner

$Q = ۱۵{,}۰\,\mu C$ و شعاع $R = ۶{,}۰۰\,cm$ دارد. (الف) اختلاف پتانسیل بین کره‌ها چقدر است؟ اگر کره‌ها را با سیمی به هم وصل کنیم، آنگاه بار روی (ب) کره‌ی کوچکتر و (پ) کره‌ی بزرگتر چقدر می‌شود؟



شکل ۲۴-۷۱ مسئله‌ی ۹۸

حل (الف) اختلاف پتانسیل کره‌ها چنین می‌شود:

$$\Delta V = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{Q}{R} - \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{q}{r}$$

$$= (۸{,}۹۹\times۱۰^۹\,N\cdot m^۲/C^۲)\left(\frac{۱۵{,}۰\times۱۰^{-۶}C}{۰{,}۰۶۰۰\,m} - \frac{۵{,}۰۰\times۱۰^{-۶}C}{۰{,}۰۳۰۰\,m}\right)$$

$$= ۷{,}۴۹\times۱۰^۵\,V$$

(ب) اگر کره‌های فلزی را با سیم به هم وصل کنیم، آنگاه فقط یک رسانا خواهیم داشت و هرگونه بار اضافی باید روی سطح این تک‌رسانا (که در واقع همان سطح کره‌ی خارجی است) قرار گیرد. بنابراین بار روی کره‌ی کوچک صفر خواهد بود.

(پ) چون بارها روی سطح کره‌ی بزرگ‌تر قرار می‌گیرند، داریم:

$$Q_{جدید} = Q + q = ۱۵{,}۰\,\mu C + ۵{,}۰۰\,\mu C = ۲۰{,}۰\,\mu C$$

۹۹ (الف) با استفاده از معادله‌ی ۲۴-۳۲ نشان دهید که پتانسیل الکتریکی در نقطه‌ای روی محور مرکزی یک حلقه‌ی نازک (به بار q و شعاع R) و در فاصله‌ی z از این حلقه برابر است با

$$V = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{q}{\sqrt{z^۲+R^۲}}$$

(ب) با استفاده از این نتیجه، عبارتی برای E در نقاط روی محور حلقه به‌دست آورید؛ نتیجه‌ی خود را با محاسبه‌ی E در بخش ۲۲-۴ مقایسه کنید.

حل (الف) یک عنصر دیفرانسیلی dq از حلقه‌ی بار انتخاب می‌کنیم و پتانسیل را در نقطه‌ی P واقع بر محور مرکزی حلقه به دست می‌آوریم؛ از آنجا داریم:

$$V_p = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\int\frac{dq}{r} = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\int\frac{dq}{\sqrt{z^۲+R^۲}}$$

$$= \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{۱}{\sqrt{z^۲+R^۲}}\int dq = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{q}{\sqrt{z^۲+R^۲}}$$

(ب) میدان الکتریکی در امتداد محور حلقه است و از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$E = -\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{q}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{d}{dz}(z^۲+R^۲)^{-۱/۲}$$

$$= \frac{q}{۴\pi\varepsilon_۰}\left(\frac{۱}{۲}\right)(z^۲+R^۲)^{-۳/۲}(۲z)$$

$$= \frac{q}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{z}{(z^۲+R^۲)^{۳/۲}}$$

که همان معادله‌ی ۲۳-۱۶ کتاب است.

۱۰۰ یک ذره‌ی آلفا (که دارای دو پروتون است) مستقیماً به سمت یک هسته‌ی هدف که شامل ۹۲ پروتون است شلیک می‌شود. انرژی جنبشی اولیه‌ی ذره‌ی آلفا برابر با $۰{,}۴۸\,pJ$ است. با فرض آنکه هسته حرکت نکند کمترین فاصله‌ی مرکز به مرکز ذره‌ی آلفا از هسته‌ی هدف چقدر خواهد بود؟

حل در کم‌ترین فاصله ذره‌ی α از هسته، انرژی جنبشی آن صفر می‌شود. r را فاصله‌ی مرکز تا مرکز ذره‌ی α از هسته‌ی هدف در این حالت، بگیرید. بنابراین، پایستگی انرژی جنبشی چنین به‌دست می‌دهد:

$$K_۰ + U_۰ = K + U$$

$$(۰{,}۴۸\times۱۰^{-۱۲}J) + \frac{(۲e)(q۲e)}{۴\pi\varepsilon_۰ r_۰} = ۰ + \frac{(۲e)(q۲e)}{۴\pi\varepsilon_۰ r}$$

اگر $r_۰ = \infty$ قرار دهیم، $U_۰ = ۰$ می‌شود و از آنجا به $r = ۸{,}۸\times۱۰^{-۱۲}m$ می‌رسیم.

۱۰۱ در مدل کوارکی ذرات بنیادی، پروتون از سه کوارک ساخته شده است: دو کوارک "بالا"، هر یک به بار $+۲e/۳$، و یک کوارک "پایین" به بار $-e/۳$. فرض کنید این سه کوارک به فاصله‌ی یکسانی از یکدیگر قرار گرفته‌اند. آن فاصله را $۱{,}۳۲\times۱۰^{-۱۵}m$ در نظر بگیرید و انرژی پتانسیل الکتریکی دستگاه شامل (الف) فقط دو کوارک بالا و (ب) هر سه کوارک را محاسبه کنید.

حل (الف) انرژی پتانسیل برابر کاری است که انجام می‌دهیم تا دستگاهی شامل دو کوارک بالا را کنار هم قرار دهیم:

$$U_{بالا-بالا} = W_۱ + W_۲ = ۰ + W_۲$$

$$= \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{q^۲}{r} = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{\left(\frac{۲e}{۳}\right)^۲}{r} = \frac{۴e^۲}{۴\pi\varepsilon_۰(qr)}$$

$$= \frac{۴(۸{,}۹۹\times۱۰^۹\,N\cdot m^۲/C^۲)(۱{,}۶۰\times۱۰^{-۱۹}C)^۲}{۹(۱{,}۳۲\times۱۰^{-۱۵}m)}$$

$$= ۷{,}۷۵\times۱۰^{-۱۴}J = ۰{,}۴۸۴\,MeV$$

توجه کنید که می‌توانستیم $e^۲ = (۱{,}۶۰\times۱۰^{-۱۹})e$ بنویسیم و آنگاه پاسخ برحسب eV به‌دست می‌آمد.

(ب) انرژی پتانسیل کل برابر کاری است که انجام می‌دهیم تا دستگاه سه کوارکی را کنار هم قرار دهیم

Scanned by CamScanner

$$U = W_1 + W_2 + W_3 = 0 + V_1\left(\frac{2e}{3}\right) + (V_1 + V_2)\left(-\frac{e}{3}\right)$$

$$= \frac{k}{r}\left(\frac{2e}{3}\right)^2 - \frac{k}{r}\left(\frac{e}{3}\right)\left(\frac{2e}{3}\right) - \frac{k}{r}\left(\frac{e}{3}\right)\left(\frac{2e}{3}\right)$$

$$= \frac{k}{r}\left(\frac{2e}{3}\right)^2 - \frac{k}{r}\left(\frac{2e}{3}\right)^2 = 0$$

که این معادل آن نیز هست که انرژی‌های پتانسیل جفت کوارک‌ها را جمع کنیم. یعنی

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{(2e/3)(2e/3)}{r} + \frac{(-e/3)(2e/3)}{r} + \frac{(-e/3)(2e/3)}{r}\right] = 0$$

۱۰۲ بار $1{,}50 \times 10^{-8}\,\mathrm{C}$ روی یک کره‌ی فلزی منزوی به شعاع $16{,}0\,\mathrm{cm}$ قرار دارد. به ازای $V = 0$ در فاصله‌ی نامتناهی، پتانسیل الکتریکی در نقاط روی سطح این کره چقدر است؟

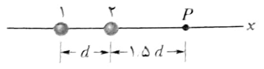
حل با در نظر گرفتن صفر پتانسیل در بی‌نهایت، پتانسیل روی سطح کره چنین می‌شود:

$$V(R) = V|_{r=\infty} - \int_{\infty}^{R} E(r)dr = -\int_{\infty}^{R} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{(8{,}99 \times 10^9\,\mathrm{N \cdot m^2/C^2})(1{,}50 \times 10^{-8}\,\mathrm{C})}{0{,}160\,\mathrm{m}}$$

$$= 8{,}43 \times 10^2\,\mathrm{V}$$

۱۰۳ در شکل ۲۴-۷۲، دو ذره با بارهای q_1 و q_2 روی محور x ثابت شده‌اند. اگر ذره‌ی سومی با بار $+6{,}0\,\mu\mathrm{C}$ از فاصله‌ی نامتناهی به نقطه‌ی P آورده شود، این دستگاه سه‌ذره‌ی دارای همان انرژی پتانسیل الکتریکی دستگاه دوذره‌ای اولیه خواهد شد. نسبت بار q_1/q_2 چقدر است؟



شکل ۲۴-۷۲ مسئله‌ی ۱۰۳

حل چون انرژی پتانسیل الکتریکی در حضور بار سوم تغییر نمی‌کند، نتیجه می‌گیریم که تنها امکان این است که پتانسیل الکتریکی خالص حاصل از دو بار اولیه برابر با صفر باشد (توجه کنید که $U = eV$ است). در نتیجه داریم

$$\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2} = 0$$

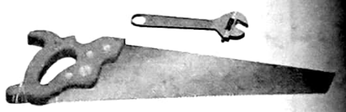
با قرار دادن $r_1 = 5d/2$ و $r_2 = 3d/2$ به $q_1 = -5q_2/3$ و یا $q_1/q_2 = -5/3 \approx -1{,}7$ می‌رسیم.

فصل بیست و پنجم

ظرفیت

...رفیت

...زیِ شکل ۲۵-۲۴ دارای بارهای خالص $+70\,\text{pC}$ و ...به اختلاف پتانسیل $20\,\text{V}$ بین آنها می‌انجامد. (الف) ...اه چقدر است؟ (ب) اگر این بارها به $+200\,\text{pC}$ و ...کنند، ظرفیت دستگاه چقدر می‌شود؟ (پ) اختلاف



شکل ۲۵-۲۴ مسئله‌ی ۱

...) ظرفیت دستگاه برابر است با

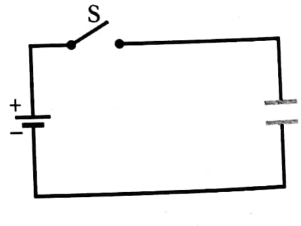
$$C=\frac{q}{\Delta V}=\frac{70\,\text{pC}}{20\,\text{V}}=3{,}5\,\text{pF}$$

...داری ثابت و مستقل از q است. بنابراین ظرفیت همان

...تانسیل چنین می‌شود:

$$\Delta V=\frac{q}{C}=\frac{200\,\text{pC}}{3{,}5\,\text{pF}}=57\,\text{V}$$

...کل ۲۵-۲۵ دارای ظرفیت $25\,\mu\text{F}$ و در ابتدا بدون بار است. ... پتانسیل $120\,\text{V}$ را مهیا می‌کند. پس از آنکه کلید S بسته ...ار از آن خواهد گذشت؟



شکل ۲۵-۲۵ مسئله‌ی ۲

...ی که از خازن می‌گذرد تحت همان اختلاف پتانسیل دو سر ...اه بار روی خازن چنین می‌شود:

$$q=CV=(25\times10^{-6}\,\text{F})(120\,\text{V})=3{,}0\times10^{...}$$

بخش ۲۵-۲ محاسبه‌ی ظرفیت

۳∘ خازنی تخت دارای صفحه‌های دایره‌ای به شعاع $8{,}20\,\text{cm}$ و فاصله‌ی صفحه‌های $1{,}30\,\text{mm}$ است. (الف) ظرفیت این خازن را محاسبه کنید. (ب) اگر اختلاف پتانسیل $120\,\text{V}$ به صفحه‌ها اعمال شود، چقدر بار روی صفحه‌ها ظاهر می‌شود؟

حل (الف) ظرفیت یک خازن تخت با $C=\varepsilon_0 A/d$ داده می‌شود که A مساحت هر یک از صفحه‌ها و d فاصله‌ی صفحه‌هاست. چون صفحه‌ها دایره‌ای‌اند، مساحت هر صفحه $A=\pi R^2$ است که R شعاع صفحه‌ی دایره‌ای است. بنابراین داریم:

$$C=\frac{\varepsilon_0\pi R^2}{d}=\frac{(8{,}85\times10^{-12}\,\text{F/m})\pi(8{,}20\times10^{-2}\,\text{m})^2}{1{,}30\times10^{-3}\,\text{m}}$$
$$=1{,}44\times10^{-10}\,\text{F}=144\,\text{pF}$$

(ب) بار روی صفحه‌ی مثبت با $q=CV$ داده می‌شود که V اختلاف پتانسیل میان صفحه‌هاست. بنابراین داریم:

$$q=(1{,}44\times10^{-10}\,\text{F})(120\,\text{V})=1{,}73\times10^{-8}\,\text{C}=17{,}3\,\text{nC}$$

۴∘ شعاع صفحه‌های یک خازن کروی برابر با $38{,}0\,\text{mm}$ و $40{,}0\,\text{mm}$ است. (الف) ظرفیت این خازن را محاسبه کنید. (ب) مساحت یک خازن تخت با همان فاصله‌ی جدایی صفحه‌ها و همان ظرفیت باید چقدر باشد؟

حل (الف) ظرفیت خازن کروی با معادله‌ی ۲۵-۱۷ داده می‌شود:

$$C=4\pi\varepsilon_0\frac{ab}{b-a}$$
$$=\frac{(40{,}0\,\text{mm})(38{,}0\,\text{mm})}{(8{,}99\times10^{9}\,\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(40{,}0\,\text{mm}-38{,}0\,\text{mm})}$$
$$=84{,}5\times10^{-12}\,\text{F}=84{,}5\,\text{pF}$$

(ب) ظرفیت یک خازن تخت از $C=\varepsilon_0 A/(b-a)$ به‌دست می‌آید و از آنجا مساحت صفحه‌ی A خازن چنین می‌شود:

$$A=\frac{C(b-a)}{\varepsilon_0}$$
$$=\frac{(84{,}5\times10^{-12}\,\text{F})(40{,}0-38{,}0)(10^{-3}\,\text{m})}{8{,}85\times10^{-12}\,\text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2}$$
$$=191\times10^{-4}\,\text{m}^2=191\,\text{cm}^2$$

Scanned by CamScanner

۵۰ ظرفیت یک قطره حاصل از دو قطره‌ی جیوه‌ی کروی، هر یک به شعاع $R = ۲{,}۰۰\,\text{mm}$، چقدر است؟

حل با فرض اینکه حجم ثابت بماند، شعاع قطره‌های ترکیب شده را می‌توانیم به‌دست آوریم و آنگاه با استفاده از $C = ۴\pi\varepsilon_۰ R$ ظرفیت به‌دست می‌آید.

از فرض ثابت ماندن حجم داریم

$$۲\left(\frac{۴}{۳}\pi R^۳\right) = \frac{۴}{۳}\pi R'^۳$$

و از آنجا $R' = ۲^{۱/۳} R$ می‌شود که R' شعاع جدید و R شعاع هر یک از دو قطره‌ی اولیه است. آنگاه ظرفیت خازن جدید چنین می‌شود:

$$C' = ۴\pi\varepsilon_۰ R' = ۴\pi\varepsilon_۰ ۲{,}۰۰^{۱/۳} R = ۵{,}۰۴\pi\varepsilon_۰ R$$
$$= (۵{,}۰۴)\pi(۸{,}۸۵\times۱۰^{-۱۲}\,\text{F/m})(۲{,}۰۰\times۱۰^{-۳}\,\text{m})$$
$$= ۲{,}۸۰\times۱۰^{-۱۲}\text{F} = ۰{,}۲۸۰\,\text{pF}$$

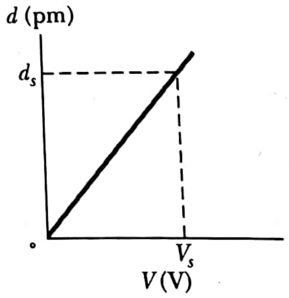
۶۰ می‌خواهید با دو صفحه‌ی فلزی تخت، هر یک به مساحت $۱{,}۰۰\,\text{m}^۲$، یک خازن تخت بسازید. (الف) برای آنکه ظرفیت این خازن $۱{,}۰۰\,\text{F}$ شود، فاصله‌ی بین صفحه‌های آن باید چقدر باشد؟ (ب) آیا در عمل، این خازن را می‌توان ساخت؟

حل (الف) از $C = \varepsilon_۰ A/d$ استفاده می‌کنیم و از آنجا خواهیم داشت:

$$d = \frac{A\varepsilon_۰}{C} = \frac{(۱{,}۰۰\,\text{m}^۲)(۸{,}۸۵\times۱۰^{-۱۲}\,\text{F/m})}{۱{,}۰۰\,\text{F}}$$
$$= ۸{,}۸۵\times۱۰^{-۱۲}\,\text{m}$$

(ب) چون d بسیار کوچک و حتی کوچک‌تر از اندازه‌ی یک اتم $(\sim۱۰^{-۱۰}\,\text{m})$ است، ساختن این خازن عملی نیست.

۷۰ اگر یک خازن تخت بدون بار (با ظرفیت C) به یک باتری بسته شود، وقتی الکترون‌ها به سوی سطح صفحه‌ای (به مساحت A) حرکت کنند، این صفحه به‌طور منفی باردار می‌شود. در شکل ۲۵-۲۶ عمق d یی که از آن الکترون‌ها به صفحه‌ی یک خازن نوعی می‌رسند برحسب گستره‌ی مقادیر اختلاف پتانسیل V ی باتری رسم شده است. محور قائم با $d_s = ۱{,}۰۰\,\text{pm}$ و محور افقی با $V_s = ۲۰{,}۰\,\text{V}$ مقیاس‌بندی شده است. نسبت C/A چقدر است؟



شکل ۲۵-۲۶ مسئله‌ی ۷

حل برای یک اختلاف پتانسیل معین V، بار روی سطح صفحه‌ی خازن برابر است با

$$q = Ne = (nAd)e$$

که در آن d عمقی است که الکترون‌ها به روی صفحه می‌آیند، و n چگالی الکترون‌های رسانش است. باری که روی صفحه جمع می‌شود به ظرفیت و اختلاف پتانسیل توسط رابطه‌ی $q = CV$ مربوط می‌شود. ترکیب این دو معادله چنین به‌دست می‌دهد

$$\frac{C}{A} = ne\frac{d}{V}$$

چیزی که در صورت مسئله داده نشده است، چگالی الکترون‌های رسانش است که برابر با $n = ۸{,}۴۹\times۱۰^{۲۸}/\text{m}^۳$ است. حال به‌ازای $d/V = d_s/V_s = ۱{,}۰۰\times۱۰^{-۱۲}\,\text{m}/۲۰{,}۰\,\text{V} = ۵{,}۰۰\times۱۰^{-۱۴}\,\text{m/V}$ برای C/A خواهیم داشت

$$\frac{C}{A} = (۸{,}۴۹\times۱۰^{۲۸}/\text{m}^۳)(۱{,}۶۰\times۱۰^{-۱۹}\,\text{C})(۵{,}۰۰\times۱۰^{-۱۴}\,\text{m/V})$$
$$= ۶{,}۷۹\times۱۰^{-۴}\,\text{F/m}^۲$$

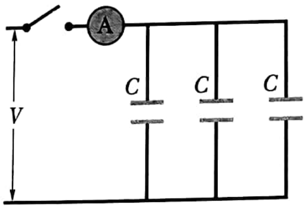
بخش ۲۵-۳ خازن‌های موازی و متوالی

۸۰ چند خازن $۱{,}۰۰\,\mu\text{F}$ باید به‌طور موازی بسته شوند تا به‌ازای اختلاف پتانسیل $۱۱۰\,\text{V}$ در دو سر خازن‌ها، بار $۱{,}۰۰\,\text{C}$ ذخیره شود؟

حل ظرفیت معادل با $C_{\text{eq}} = q/V$ داده می‌شود که q بار کل روی تمام خازن‌ها و V اختلاف پتانسیل دو سر هر یک از آن‌هاست. برای N خازن موازی $C_{\text{eq}} = NC$ است که C ظرفیت هر یک از آن‌هاست. بنابراین $NC = q/V$ است و از آنجا N چنین می‌شود:

$$N = \frac{q}{VC} = \frac{۱{,}۰۰\,\text{C}}{(۱۱۰\,\text{V})(۱{,}۰۰\times۱۰^{-۶}\,\text{F})} = ۹{,}۰۹\times۱۰^۳$$

۹۰ هر یک از خازن‌های بدون بار شکل ۲۵-۲۷ دارای ظرفیت $۲۵{,}۰\,\mu\text{F}$ هستند. وقتی کلید بسته شود، اختلاف پتانسیل $V = ۴۲۰۰\,\text{V}$ برقرار می‌شود. چند کولن بار از سنجه‌ی A می‌گذرد؟



شکل ۲۵-۲۷ مسئله‌ی ۹

حل با بستن کلید، سه خازن موازی داریم. ظرفیت خازن معادل برابر است با

$$C = C_۱ + C_۲ + C_۳ = ۳C = ۳(۲۵{,}۰\,\mu\text{F}) = ۷۵{,}۰\,\mu\text{F}$$

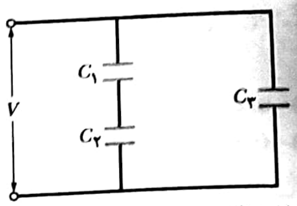
باری که از این خازن معادل می‌گذرد برابر است با

$$q = CV = (۷۵{,}۰\times۱۰^{-۶}\,\text{F})(۴۲۰۰\,\text{V}) = ۰{,}۳۱۵\,\text{C} = ۳۱۵\,\text{mC}$$

باری که از سنجه‌ی A می‌گذرد نیز برابر همین مقدار است.

۱۰۰ در شکل ۲۵-۲۸، ظرفیت معادل ترکیب خازن‌ها را به‌دست آورید. فرض کنید $C_۱$ برابر $۱۰{,}۰\,\mu\text{F}$، $C_۲$ برابر $۵{,}۰۰\,\mu\text{F}$، و $C_۳$ برابر $۴{,}۰۰\,\mu\text{F}$ است.

Scanned by CamScanner

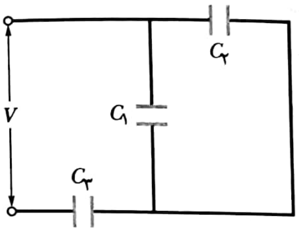


شکل ۲۵-۲۸ مسئله‌های ۱۰ و ۳۴

...های C_1 و C_2 با هم متوالی، و خازن معادل آنها با خازن ... در نتیجه برای ظرفیت خازن معادل داریم:

$$C_{eq} = C_3 + \frac{C_1C_2}{C_1+C_2} = ۴٫۰۰\mu F + \frac{(۱۰٫۰\mu F)(۵...}{۱۰٫۰\mu F+۵...}$$
$$= ۷٫۳۳\mu F$$

... در شکل ۲۵-۲۹، ظرفیت معادل ترکیب خازن‌ها را ...ید. فرض کنید $C_1 = ۱۰٫۰\mu F$، $C_2 = ۵٫۰۰\mu F$، و C_3... است.



شکل ۲۵-۲۹ مسئله‌های ۱۱ و ۱۷ و ۳۸

...خازن‌های C_1 و C_2 با هم موازی، و خازن معادل آنها با خازن ... است. در نتیجه برای ظرفیت خازن معادل داریم:

$$C_{eq} = \frac{(C_1+C_2)C_3}{(C_1+C_2)+C_3} = \frac{(۱۰٫۰\mu F+۵٫۰۰\mu F)(۴...}{۱۰٫۰\mu F+۵٫۰۰\mu F+۴...}$$
$$= ۳٫۱۶\mu F$$

... خازن تخت، هر یک به ظرفیت ۶٫۰μF، به‌طور موازی به یک ... ۱... بسته شده‌اند. سپس یکی از خازن‌ها فشرده می‌شود، طوری ...ی بین صفحه‌های آن به نصف مقدار اولیه‌اش می‌رسد. بر اثر این ... (الف) چقدر بار اضافی توسط باتری به خازن‌ها منتقل می‌شود و ...یش بار کلّ ذخیره شده‌ی روی خازن‌ها چقدر است؟

... دو خازن ۶٫۰μF موازی‌اند و در نتیجه ظرفیت معادل آنها C_{eq} = ... می‌شود. بنابراین، بار کل ذخیره شده پیش از فشردگی برابر

$$q_{\text{کل}} = C_{eq}V_{\text{باتری}} = (۱۲\mu F)(۱۰V) = ۱۲۰\mu C$$

(ب) پس از فشردگی، ظرفیت یکی از خازن‌ها ۱۲μF می‌شود ...معادله‌ی ۲۵-۹، C و d به‌طور معکوسی با هم رابطه دارند) که ...زایش ۶٫۰μF را نشان می‌دهد و از آنجا افزایش بار چنین

$$\Delta q_{\text{کل}} = \Delta C_{eq}V_{\text{باتری}} = (۶٫۰\mu F)(۱۰V) = ۶۰\mu C$$

۱۳ •• ILW خازنی با ظرفیت ۱۰۰pF تا اختلاف پتانسیل ۵۰V باردار شده و سپس باتری برداشته می‌شود. آنگاه این خازن را به‌طور موازی به خازن دیگری (که در ابتدا بدون بار است) می‌بندیم. اگر اختلاف پتانسیل دو سر خازن اوّل تا ۳۵V افت کند، ظرفیت خازن دوم چقدر است؟

حل

بار اولیه‌ی خازن اول برابر است با

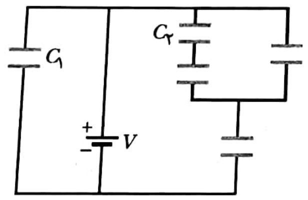
$$q_0 = C_1V_0 = (۱۰۰\times۱۰^{-۱۲}F)(۵۰V) = ۵٫۰\times۱۰^{-۹}C$$

وقتی این خازن را به‌طور موازی با خازن بی‌بار می‌بندیم، پایستگی بار حکم می‌کند که بار q_0 بین دو خازن تقسیم شود. بنابراین داریم:

$$q_0 = C_1V_1 + C_2V_2 = (C_1+C_2)V = (۱۰۰pF + C_2)(۳۵V)$$

و از آنجا $C_2 \approx ۴۳pF$ می‌شود.

۱۴ •• GO در شکل ۲۵-۳۰، اختلاف پتانسیل باتری $V = ۱۰٫۰V$ است و هر پنج خازن دارای ظرفیت ۱۰٫۰μF هستند. بار روی (الف) خازن ۱ و (ب) خازن ۲ چقدر است؟



شکل ۲۵-۳۰ مسئله‌ی ۱۴

حل

(الف) اختلاف پتانسیل دو سر خازن C_1 برابر $V_1 = ۱۰٫۰V$ است. بنابراین بار روی خازن C_1 چنین می‌شود:

$$q_1 = C_1V_1 = (۱۰٫۰\times۱۰^{-۶}F)(۱۰٫۰V) = ۱٫۰۰\times۱۰^{-۴}C$$

(ب) ظرفیت معادل خازن‌های سمت راست چنین می‌شود

$$C_{eq} = \frac{CC'}{C+C'}$$

که در آن C' برابر است با

$$C' = C + \frac{CC}{C+C} = C + \frac{C}{۲} = \frac{۳C}{۲}$$

بنابراین C_{eq} چنین می‌شود:

$$C_{eq} = \frac{C\left(\frac{۳C}{۲}\right)}{C+\frac{۳C}{۲}} = \frac{۳C}{۵} = \frac{۳(۱۰٫۰۰\mu F)}{۵} = ۶٫۰۰\mu F$$

بنابراین بار کلّ عبوری از خازن معادل بالا برابر است با

$$q_{eq} = C_{eq}V = (۶٫۰۰\mu F)(۱۰٫۰V) = ۶٫۰۰\times۱۰^{-۵}C = ۶۰٫۰\mu C$$

توجه کنید که این بار در شاخه‌ی سمت راست توزیع می‌شود که شامل خازن معادل C' و خازن پایینی آن است. پس، برای محاسبه‌ی q_2 خود را روی مجموعه‌ی خازن سه‌تایی بالا (با ظرفیت معادل C') متمرکز می‌کنیم. اختلاف پتانسیل دو سر این مجموعه برابر است با

$$V' = \frac{q_{eq}}{C'} = \frac{۶٫۰۰\times۱۰^{-۵}C}{۳(۱۰٫۰\mu F)/۲} = ۴٫۰۰V$$

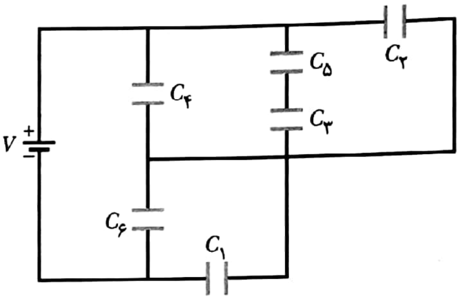
Scanned by CamScanner

آنگاه بار روی شاخه‌ی سمت چپ این مجموعه و از جمله $C_۲$ چنین می‌شود:

$$q_۲=\left(\frac{C}{۲}\right)V'=(۵٫۰۰\mu F)(۴٫۰۰V)=۲٫۰۰\times۱۰^{-۵}C=۲۰٫۰\mu C$$

روش دیگر آن بود که بار روی شاخه‌ی سمت راست را که برابر $۴٫۰۰\times۱۰^{-۵}C=(۱۰٫۰\mu F)(۴٫۰۰V)$ می‌شود را از q_{eq} کم کنیم و به همین نتیجه برسیم.

۱۵●● GO در شکل ۲۵-۳۱، یک باتری $۲۰٫۰V$ به دو سر خازن‌هایی با ظرفیت $C_۱=C_۶=۳٫۰۰\mu F$ و $C_۳=C_۵=۲٫۰۰C_۲=۲٫۰۰C_۴=۴٫۰۰\mu F$ بسته شده است. (الف) ظرفیت معادل C_{eq} این خازن‌ها و (ب) بار ذخیره شده توسط C_{eq} چقدر است؟ (پ) $V_۱$ و (ت) $q_۱$ خازن ۱، (ث) $V_۲$ و (ج) $q_۲$ خازن ۲، (چ) $V_۳$ و (ح) $q_۳$ خازن ۳ چقدر است؟



شکل ۲۵-۳۱ مسئله‌ی ۱۵

حل (الف) خازن $C_۲$ با خازن معادل خازن‌های متوالی $C_۳$ و $C_۵$ موازی است و این مجموعه خود با خازن $C_۴$ موازی است. اگر خازن معادل آنها را با C نمایش دهیم، خواهیم داشت:

$$C=C_۲+\frac{(C_۳)(C_۵)}{C_۳+C_۵}+C_۴$$
$$=۲٫۰۰\mu F+\frac{(۴٫۰۰\mu F)(۴٫۰۰\mu F)}{۴٫۰۰\mu F+۴٫۰۰\mu F}+۲٫۰۰\mu F=۶٫۰۰\mu F$$

از طرفی خازن‌های $C_۱$ و $C_۶$ با هم موازی‌اند و خازن معادل آنها (C') با C موازی است. با توجه به اینکه داریم

$$C'=C_۶+C_۱=۳٫۰۰\mu F+۳٫۰۰\mu F=۶٫۰۰\mu F$$

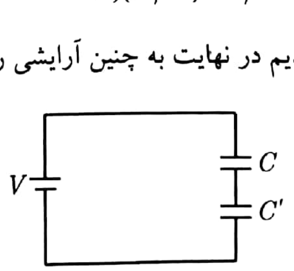
ظرفیت خازن معادل چنین می‌شود:

$$C_{eq}=\frac{۱}{۲}(۶٫۰۰\mu F)=۳٫۰۰\mu F$$

(ب) $V=۲۰٫۰V$ پتانسیل دو سر باتری است و از آنجا بار ذخیره شده در خازن معادل چنین می‌شود:

$$q=C_{eq}V=(۳٫۰۰\times۱۰^{-۶}F)(۲۰٫۰V)=۶٫۰۰\times۱۰^{-۵}C=۶۰٫۰\mu C$$

(پ) همان‌طور که دیدیم در نهایت به چنین آرایشی رسیدیم:



پس، بار روی خازن‌های C و C' همان $۶٫۰۰\times۱۰^{-۵}C$ است. آنگاه پتانسیل C' چنین می‌شود:

$$V'=(۲۰٫۰V)-q/C'$$
$$=(۲۰٫۰V)-(۶٫۰۰\times۱۰^{-۵}C)/(۶٫۰۰\times۱۰^{-۶}F)=۱۰٫۰V$$

بنابراین پتانسیل دو سر خازن‌های $C_۶$ و $C_۱$ که با هم موازی‌اند برابر $۱۰٫۰V$ می‌شود.

(ت) و از آنجا بار روی خازن $C_۱$ چنین می‌شود:

$$q_۱=C_۱V_۱=(۳٫۰۰\mu F)(۱۰٫۰V)=۳٫۰۰\times۱۰^{-۵}C=۳۰\mu C$$

(ث) توجه کنید، همان‌طور که پیشتر نیز گفتیم خازن $C_۲$ با خازن‌های متوالی $C_۵$ و $C_۳$، و خازن $C_۴$ موازی است. پس، پتانسیل دو سر خازن معادل C، همان پتانسیل دو سر خازن $C_۲$ است. همچنین پتانسیل دو سر خازن معادل C' را برابر $۱۰٫۰V$ به‌دست آوردیم. پس اختلاف پتانسل دو سر خازن $C_۲$ چنین می‌شود:

$$V_۲=V-V_۱=۲۰٫۰V-۱۰٫۰V=۱۰٫۰V$$

(ج) بار روی خازن $C_۲$ برابر است با

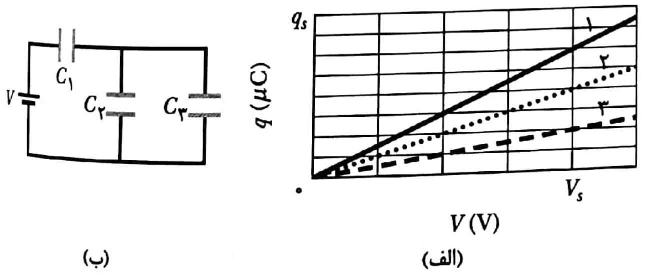
$$q_۲=C_۲V_۲=(۲٫۰۰\times۱۰^{-۶}F)(۱۰٫۰V)=۲٫۰۰\times۱۰^{-۵}C=۲۰٫۰\mu C$$

(چ) پتانسیل دو سر $C_۲$ و خازن‌های متوالی $C_۵$ و $C_۳$ یکسان است. با توجه به اینکه $C_۳=۴٫۰۰\mu F$ است، بنابراین پتانسیل دو سر خازن‌های متوالی، برابر و نصف ولتاژ دو سر $C_۲$، یعنی $۵٫۰۰V$ می‌شود.

(ح) بنابراین $q_۳$ چنین می‌شود:

$$q_۳=C_۳V_۳=(۴٫۰۰\mu F)(۵٫۰۰V)=۲٫۰۰\times۱۰^{-۵}C=۲۰٫۰\mu C$$

۱۶●● نمودار ۱ در شکل ۲۵-۳۲ الف بار q یی را که می‌تواند در خازن ۱ ذخیره شود برحسب پتانسیل الکتریکی V ی دو سر آن، نشان می‌دهد. محور قائم با $q_s=۱۶٫۰\mu C$، و محور افقی با $V_s=۲٫۰V$ مقیاس‌بندی شده است. نمودارهای ۲ و ۳ نمودارهای مشابهی را به‌ترتیب برای خازن‌های ۲ و ۳ نشان می‌دهند. شکل ۲۵-۳۲ ب مداری با این سه خازن و یک باتری $۶٫۰V$ را نشان می‌دهد. چه باری روی خازن ۲ در این مدار ذخیره شده است؟



شکل ۲۵-۳۲ مسئله‌ی ۱۶

حل ظرفیت هر خازن را می‌توانیم با استفاده از شیب منحنی‌های داده شده به‌دست آوریم. اگر $V_s=۲٫۰V$ را به طور قائم امتداد دهیم، درمی‌یابیم که منحنی ۱ را در $q=۱۲٫۰\mu C$ قطع می‌کند. بنابراین $C_۱=(۱۲٫۰\mu C)/(۲٫۰V)=۶٫۰\mu F$ می‌شود و به همین ترتیب با استفاده از شیب منحنی‌های ۲و۳، $C_۲=۴٫۰\mu F$ و $C_۳=۲٫۰\mu F$ می‌شود. در نتیجه ظرفیت معادل خازن‌ها برابر است با

Scanned by CamScanner

$C_{eq} = \frac{(C_1)(C_2+C_3)}{C_1+C_2+C_3} = \frac{(6{,}0\mu F)(4{,}0\mu F+2{,}0\mu F)}{6{,}0\mu F+4{,}0\mu F+2{,}0\mu F} =$

ی خازن ۱ برابر با $18\mu C = (3{,}0\mu F)(6{,}0V)$ می‌شود و از
ی پتانسیل دو سر خازن ۱ خواهیم داشت:
$(18\mu C)/(6$. چون خازن‌های C_2 و C_3 موازی‌اند بنابراین
خازن C_2 (و یا C_3) برابر با $6{,}0V - 3{,}0V = 3{,}0V$
جه بار روی خازن C_2 چنین می‌شود:

$$q_2 = (4{,}0\mu F)(3{,}0V) = 12\mu C$$

شکل ۲۵-۲۹، اختلاف پتانسیل $V = 100{,}0V$ به دو سر
زنی با ظرفیت‌های $C_1 = 10{,}0\mu F$، $C_2 = 5{,}00\mu F$، و
اعمال شده است. اگر خازن ۳ دچار فروریزش
به‌طوری که معادل یک سیم رسانا گردد، (الف) بار روی
اختلاف پتانسیل دو سر خازن ۱ چقدر افزایش می‌یابد؟

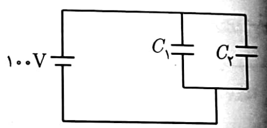
) و (ب) پیش از آنکه خازن C_3 اتصال کوتاه شود،
برابر با $C_{eq} = 3{,}16\mu F$ است که آن را در حل مسئله‌ی ۱۱
در نتیجه بار کل پیش از آنکه C_3 اتصال کوتاه شود برابر

$$q = C_{eq}V = (3{,}16\times10^{-6}F)(100V) = 3{,}16\times$$

دو سر C_1 و C_2 با هم برابر است و داریم

$$V_1 = V_2 = \frac{q}{C_1+C_2} = \frac{3{,}16\times10^{-2}C}{(10{,}0+5{,}00)(10^{-6}F)} =$$

ن C_3 اتصال کوتاه شود به چنین آرایشی می‌رسیم



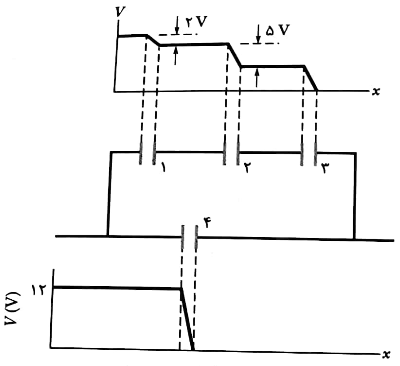
$V_1' = V_2' =$ است. پس، تغییر پتانسیل C_1 چنین می‌شود:

$$\Delta V_1 = 100{,}0V - 21{,}1V = 78{,}9V$$

ییر بار خازن C_1 خواهیم داشت:

$$\Delta q_1 = C_1\Delta V_1 = (10{,}0\mu F)(78{,}9V) = 7{,}89\times10^{-4}C$$

۳۳-۲ بخشی از مداری شامل چهار خازن پُر شده با هوا
که به مدار بزرگتری متصل شده است. نمودار زیر این
کتریکی $V(x)$ را برحسب تابعی از مکان x روی قسمت
عبوری از خازن ۴، نشان می‌دهد. به همین ترتیب،
بخش، پتانسیل الکتریکی $V(x)$ را برحسب تابعی از
ت بالایی این بخش، عبوری از خازن‌های ۱، ۲ و ۳
لیت خازن ۳ برابر با $0{,}80\mu F$ است. ظرفیت (الف)
خازن ۲ چقدر است؟



شکل ۲۵-۳۳ مسئله‌ی ۱۸

حل توجه کنید اختلاف پتانسیل دو سر C_3 برابر است با

$$V_3 = 12V - 2V - 5V = 5V$$

بنابراین بار روی این خازن $q_3 = C_3V_3 = (0{,}8\mu F)(5V) = 4\mu C$ می‌شود.

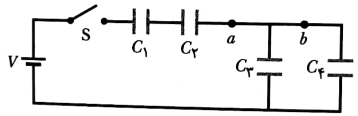
(الف) خازن‌های C_1، C_2 و C_3 متوالی و بار آنها یکسان است. پس q_3 همان بار روی خازن ۱ نیز هست و از آنجا C_1 چنین می‌شود:

$$C_1 = \frac{4\mu C}{2V} = 2\mu F$$

(ب) به همین ترتیب، q_3 بار روی خازن ۲ نیز هست و از آنجا C_2 چنین می‌شود:

$$C_2 = \frac{4\mu C}{5V} = 0{,}8\mu F$$

۱۹●● GO در شکل ۲۵-۳۴، اختلاف پتانسیل باتری $V = 9{,}0V$، $C_2 = 3{,}0\mu F$ و $C_4 = 4{,}0\mu F$ و همه‌ی خازن‌ها در ابتدا بدون بار هستند. وقتی کلید S بسته شود، بار کلِّ $12\mu C$ از نقطه‌ی a و بار کلِّ $8{,}0\mu C$ از نقطه‌ی b عبور کند. (الف) C_1 و (ب) C_3 چقدر است؟



شکل ۲۵-۳۴ مسئله‌ی ۱۹

حل (الف) و (ب) توجه کنید که بار روی C_3 برابر با $q_3 = 12\mu C - 8{,}0\mu C = 4{,}0\mu C$ است. چون بار روی C_4 برابر $q_4 = 8{,}0\mu C$ است، اختلاف پتانسیل دو سر آن $q_4/C_4 = 2{,}0V$ می‌شود. در نتیجه، اختلاف پتانسیل V_3 دو سر C_3 نیز که موازی C_4 است برابر $2{,}0V$ می‌شود. پس ظرفیت C_3 برابر با $C_3 = q_3/V_3 = 2{,}0\mu F$ می‌شود. حال برای محاسبه‌ی ظرفیت C_1، نخست ظرفیت خازن معادل مدار را تعیین می‌کنیم. خازن‌های C_3 و C_4 موازی، و خازن معادل آنها با

Scanned by CamScanner

خازن‌های متوالی $C_۱$ و $C_۲$، متوالی‌اند. بنابراین داریم:

$$\frac{۱}{C_{eq}}=\frac{۱}{C_۳+C_۴}+\frac{۱}{C_۲}+\frac{۱}{C_۱}=\frac{۱}{۲٫۰\mu F+۴٫۰\mu F}+\frac{۱}{۳٫۰\mu F}+\frac{۱}{C_۱}$$

$$=\frac{۱}{۲٫۰\mu F}+\frac{۱}{C_۱}$$

از طرفی می‌توانیم بگوییم که ظرفیت معادل مدار برابر است با

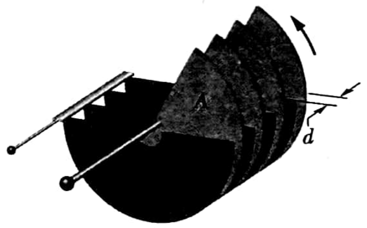
$$C_{eq}=\frac{q_{کل}}{V_{باتری}}=\frac{۱۲٫۰\mu C}{۹٫۰ V}=\frac{۴٫۰}{۳٫۰}\mu F$$

حال با قرار دادن این نتیجه در معادله‌ی اول خواهیم داشت:

$$\frac{۳٫۰}{۴٫۰\mu F}=\frac{۱}{۲٫۰\mu F}+\frac{۱}{C_۱}$$

و از آنجا $C_۱=۴٫۰\ \mu F$ می‌شود.

••۲۰ شکل ۲۵-۳۵ خازنی متغیر با "شکاف هوا" را نشان می‌دهد که برای تنظیم دستی استفاده می‌شود. صفحه‌ها یک در میان به یکدیگر متصل شده‌اند؛ یک دسته از صفحه‌ها در جای خود ثابت شده‌اند و دسته‌ی دیگر می‌توانند بچرخند. خازنی با $n=۸$ صفحه با قطبیت‌های یک در میان را در نظر بگیرید که مساحت هر یک از صفحه‌های آن $A=۱٫۵\text{cm}^۲$ و فاصله‌ی صفحه‌های مجاور آن $d=۳٫۴۰\text{mm}$ است. ظرفیت بیشینه‌ی این خازن چقدر است؟



شکل ۲۵-۳۵ مسئله‌ی ۲۰

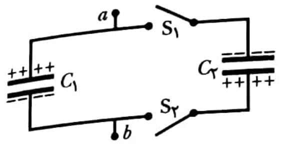
حل برای دست یافتن به ظرفیت بیشینه، دو گروه از صفحه‌ها باید دقیقاً روبه‌روی هم قرار گیرند تا مساحت صفحه‌ی خازن‌ها و در نتیجه ظرفیت آنها بیشینه شود. در این حالت، $(n-۱)$ تک‌خازن مشابه داریم که به‌طور موازی به هم متصل شده‌اند. مساحت صفحه‌ی هر خازن A و فاصله‌ی جدایی صفحه‌های آن d است. پس، ظرفیت هر خازن با $C_۰=\varepsilon_۰ A/d$ داده می‌شود و از آنجا ظرفیت کل این آرایش خازنی در یکاهای SI چنین می‌شود:

$$C=(n-۱)C_۰=\frac{(n-۱)\varepsilon_۰ A}{d}$$

$$=\frac{(۸-۱)(۸٫۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۱٫۲۵\times۱۰^{-۴})}{۳٫۴۰\times۱۰^{-۳}}=۲٫۲۸\times۱۰^{-۱۲}\text{F}$$

$$=۲٫۲۸\text{pF}$$

••۲۱ WWW در شکل ۲۵-۳۶، ظرفیت‌ها عبارت‌اند از $C_۱=۱٫۰\mu F$ و $C_۲=۳٫۰\mu F$ و هر دو خازن تا اختلاف پتانسیل $V=۱۰۰V$، ولی با قطبیدگی‌های مخالف باردار شده‌اند. وقتی کلیدهای $S_۱$ و $S_۲$ بسته شوند، (الف) اختلاف پتانسیل بین نقطه‌های a و b چقدر می‌شود؟ و در این موقع بار روی (الف) خازن ۱ و (ب) خازن ۲ چقدر است؟



شکل ۲۵-۳۶ مسئله‌ی ۲۱

حل **راه‌حل اول.** (الف) وقتی کلیدها بسته می‌شوند به آرایشی با دو خازن موازی می‌رسیم که ظرفیت معادل آن برابر است با

$$C_{eq}=C_۱+C_۲=۱٫۰\mu F+۳٫۰\mu F=۴٫۰\mu F$$

از طرفی، طبق قانون پایستگی بار، باید روی این ظرفیت معادل، باری معادل با $q_۲-q_۱$ بنشیند:

$$q_۲-q_۱=C_۲V-C_۱V=(C_۲-C_۱)V=(۲٫۰\mu F)(۱۰۰V)$$
$$=۲۰۰\mu C$$

(توجه شود که در اینجا قطبیّت خازن‌ها نقش خود را نشان می‌دهد. اگر قطب‌های همنام را به هم متصل می‌کردیم، باری که روی خازن معادل می‌نشست برابر $q_۱+q_۲$ می‌شد). پس، پتانسیل دو سر خازن‌ها برابر است با

$$V_{ab}=\frac{q}{C}=\frac{۲۰۰\mu C}{۴٫۰\mu C}=۵۰V$$

(ب) اکنون بار روی خازن ۱ برابر است با

$$q'_۱=C_۱V_{ab}=(۱٫۰\times۱۰^{-۶}F)(۵۰V)=۵٫۰\times۱۰^{-۵}C=۵۰\mu C$$

(پ) اکنون بار روی خازن ۲ برابر است با

$$q'_۲=C_۱V_{ab}=(۳٫۰\times۱۰^{-۶}F)(۵۰V)=۱٫۵\times۱۰^{-۴}C=۱۵۰\mu C$$

راه‌حل دوم. قسمت (الف) را می‌توانیم به‌گونه‌ای دیگر نیز حل کنیم. این روش، جامعیت بیشتری نسبت به روش اول دارد. در مسیری مشخص، اختلاف پتانسیل اجزای مدار را به دست آورده و برابر صفر قرار می‌دهیم. به این، اصطلاحاً قاعده‌ی حلقه می‌گوییم:

$$\frac{q'_۱}{C_۱}+\frac{q'_۲}{C_۲}=۰$$

همچنین از پایستگی بار داریم:

$$q'_۱-q'_۲=q_۱-q_۲$$

توجه شود که $q'_۱$ و $q'_۲$ بار روی خازن‌ها پس از بسته شدن کلیدها و $q_۱$ و $q_۲$ بار اولیه‌ی روی دو خازن است. از رابطه‌ی اول داریم:

$$q'_۱+\frac{q'_۲}{۳}=۰\ \Rightarrow\ q'_۲=-۳q'_۱$$

و سپس با قرار دادن این نتیجه در رابطه‌ی دوم خواهیم داشت:

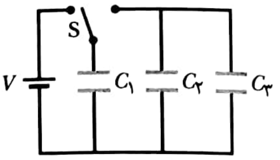
$$q'_۱+۳q'_۱=q_۱-q_۲=(C_۱-C_۲)V=(-۲٫۰\mu C)(۱۰۰V)$$
$$=-۲۰۰\mu C$$

و از آنجا $q'_۱=-۵۰\mu C$ و $q'_۲=۱۵۰\mu C$ می‌شود. سپس V_{ab} را به‌دست می‌آوریم:

$$V_{ab}=\frac{q'_۲}{C_۲}=\left|\frac{q'_۱}{C_۱}\right|=۵۰V$$

Scanned by CamScanner

...کل ۲۵-۳۷، $V=۱۰\text{V}$ ، $C_۱=۱۰\mu\text{F}$ ، و $C_۲=$... است. کلید S نخست به سمت چپ زده می‌شود ... ۱ به وضعیت تعادل برسد. سپس این کلید به سمت راست ... وقتی دوباره تعادل حاصل شود، بار روی خازن ۱ چقدر



شکل ۲۵-۳۷ مسئله‌ی ۲۲

... پایستگی بار استفاده می‌کنیم. بار اولیه‌ی روی خازن $C_۱$ برابر $Q=C_۱V_{\text{باتری}}=(۱۰\mu\text{F})(۱۰\text{V})=$... است. اگر $q_۱$، $q_۲$ و $q_۳$ بار ...های $C_۱$، $C_۲$ و $C_۳$ پس از زده شدن کلید به سمت راست و ...گاه به تعادل باشند، خواهیم داشت

$$Q=q_۱+q_۲+q_۳$$

... خازن‌های $C_۲$ و $C_۳$ یکسان است، بنابراین بار روی آنها نیز ... $q_۲=q_۳$. این خازن‌ها خود با خازن $C_۱$ موازی‌اند و بنابراین ...ست و یا

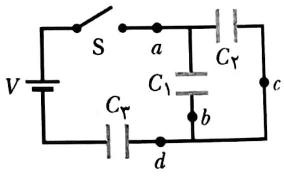
$$\frac{q_۱}{C_۱}=\frac{q_۳}{C_۳}=\frac{q_۱}{۱۰\mu\text{F}}=\frac{q_۳}{۲۰\mu\text{F}}$$

$q_۱=q$... می‌انجامد. حال از پایستگی بار خواهیم داشت:

$$Q=\left(\frac{۱}{۲}q_۳\right)+q_۳+q_۳=\frac{۵}{۲}q_۳=۱۰۰\mu\text{C}$$

$q_۳=۴۰$... و از آنجا به $q_۱=۲۰\mu\text{C}$ می‌انجامد.

... خازن‌های شکل ۲۵-۳۸ در ابتدا بدون بار هستند. ظرفیت این ...ها عبارت‌اند از: $C_۱=۴٫۰\mu\text{F}$ ، $C_۲=۸٫۰\mu\text{F}$ ، و $C_۳=$...، و اختلاف پتانسیل باتری $V=۱۲\text{V}$ است. وقتی کلید S ... چند الکترون از (الف) نقطه‌ی a، (ب) نقطه‌ی b، (پ) نقطه‌ی ... نقطه‌ی d می‌گذرد؟ در شکل، آیا الکترون‌ها از (ث) نقطه‌ی b ...طه‌ی c رو به بالا می‌گذرند یا رو به پایین؟



شکل ۲۵-۳۸ مسئله‌ی ۲۳

... توجه کنید که ظرفیت معادل کل برابر است با

$$C_{\text{eq}}=\frac{C_۳(C_۱+C_۲)}{C_۱+C_۲+C_۳}=\frac{۱۲\mu\text{F}(۴٫۰\mu\text{F}+۸٫۰\mu\text{F})}{۴٫۰\mu\text{F}+۸٫۰\mu\text{F}+۱۲\mu\text{F}}$$

$$=۶٫۰\mu\text{F}$$

...بنابراین باری که از نقطه‌ی a می‌گذرد برابر است با

$$q_A=C_{\text{eq}}V_{\text{باتری}}=(۶٫۰\mu\text{F})(۱۲\text{V})=۷۲\mu\text{C}$$

با تقسیم این نتیجه بر $e=۱٫۶۰\times۱۰^{-۱۹}\text{C}$، به تعداد الکترون‌های عبوری از نقطه‌ی a می‌رسیم که برابر $۴٫۵\times۱۰^{۱۴}$ می‌شود. این الکترون‌ها رو به سمت چپ، به سوی قطب مثبت باتری حرکت می‌کنند.

(ب) ظرفیت معادل خازن‌های موازی $C_{۱۲}=C_۱+C_۲=۱۲\mu\text{F}$ است. بنابراین، اختلاف پتانسیل دو سر این خازن‌های موازی برابر با $۷۲\mu\text{C}/۱۲\mu\text{F}=۶٫۰\text{V}$ می‌شود که این، هم پتانسیل دو سر خازن $C_۱$ و هم خازن $C_۲$ است. پس بار روی خازن $C_۱$ برابر با $q_۱=(۴٫۰\mu\text{F})(۶٫۰\text{V})=۲۴\mu\text{C}$ می‌شود که با تقسیم بر e، تعداد الکترون‌های عبوری از b را برابر $۱٫۵\times۱۰^{۱۴}$ می‌دهد. این الکترون‌ها رو به بالا از نقطه‌ی b می‌گذرند.

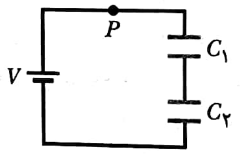
(پ) به همین ترتیب، بار روی $C_۲$ برابر با $q_۲=(۸٫۰\mu\text{F})(۶٫۰\text{V})=۴۸\mu\text{C}$ می‌شود که با تقسیم بر e، تعداد الکترون‌های عبوری از c را برابر $۳٫۰\times۱۰^{۱۴}$ به‌دست می‌دهد. این الکترون‌ها رو به بالا از نقطه‌ی c می‌گذرند.

(ت) سرانجام، چون $C_۳$ با باتری متوالی است، بار عبوری از آن همان بار عبوری از باتری است (و همان بار نیز از کلید می‌گذرد). بنابراین تعداد $۴٫۵\times۱۰^{۱۴}$ الکترون رو به سمت راست از نقطه‌ی d می‌گذرند. این الکترون‌ها از صفحه‌ی سمت راست $C_۳$ جدا شده و بدین ترتیب، همان‌طور که انتظار داریم، آن صفحه را مثبت و صفحه‌ی سمت چپ را منفی می‌کنند.

(ث) همان‌طور که در قسمت ب بیان داشتیم، الکترون‌ها رو به بالا از نقطه‌ی b می‌گذرند.

(ج) همان‌طور که در قسمت پ بیان داشتیم، الکترون‌ها رو به بالا از نقطه‌ی c می‌گذرند.

۲۴•• GO شکل ۲۵-۳۹ دو خازن استوانه‌ای پُرشده از هوا را نشان می‌دهد که به‌طور متوالی به دو سر باتری‌ای با پتانسیل $V=۱۰\text{V}$ بسته شده‌اند. خازن ۱ دارای یک صفحه‌ی داخلی به شعاع $۵٫۰\text{mm}$، یک صفحه‌ی خارجی به شعاع $۱٫۵\text{cm}$، و طول $۵٫۰\text{cm}$ است. خازن ۲ دارای یک صفحه‌ی داخلی به شعاع $۲٫۵\text{mm}$، یک صفحه‌ی خارجی به شعاع $۱٫۰\text{cm}$، و طول $۹٫۰\text{cm}$ است. صفحه‌ی خارجی خازن ۲ از جنس یک غشاء آلیِ رساناست که قابلیت کشسانی دارد، و برای افزایش فاصله‌ی صفحه‌های خازن، می‌توان آن را کشید. اگر شعاع صفحه‌ی خارجی بر اثر کش آمدن به $۲٫۵\text{cm}$ افزایش یابد، (الف) چند الکترون از نقطه‌ی P می‌گذرد و (ب) آیا آنها به سمت باتری حرکت می‌کنند و یا از باتری دور می‌شوند؟



شکل ۲۵-۳۹ مسئله‌ی ۲۴

حل نخست ظرفیت خازن‌های استوانه‌ای را با استفاده از معادله‌ی ۲۵-۱۴ کتاب به‌دست می‌آوریم

Scanned by CamScanner

$$C_1 = 2\pi\varepsilon_0 \frac{L_1}{\ln(b_1/a_1)}$$

$$= 2\pi(8.85\times10^{-12}\ F/m)\frac{5.0\times10^{-2}\ m}{\ln(1.5\times10^{-3}\ m/5.0\times10^{-3}\ m)}$$

$$= 2.53\times10^{-12}\ F = 2.53\ pF$$

و

$$C_2 = 2\pi\varepsilon_0 \frac{L_2}{\ln(b_2/a_2)}$$

$$= 2\pi(8.85\times10^{-12}\ F/m)\frac{9.0\times10^{-2}\ m}{\ln(1.0\times10^{-2}\ m/2.5\times10^{-3}\ m)}$$

$$= 3.61\times10^{-12}\ F = 3.61\ pF$$

ظرفیت معادل این دو خازن متوالی برابر است با

$$C_{12} = \frac{C_1C_2}{C_1+C_2} = \frac{(2.53\ pF)(3.61\ pF)}{2.53\ pF + 3.61\ pF} = 1.49\ pF$$

بنابراین بار روی صفحه‌ی مثبت هر یک از این خازن‌ها چنین می‌شود:

$$q = C_{12}V_{\text{باتری}} = (1.49\ pF)(10\ V) = 14.9\ pC$$

پس از آنکه شعاع صفحه‌ی خارجی خازن ۲ به $2.5\ cm$ افزایش یافت، ظرفیت جدید این خازن چنین می‌شود:

$$C_2' = 2\pi(8.85\times10^{-12}\ F/m)\frac{9.0\times10^{-2}\ m}{\ln(2.5\times10^{-2}\ m/2.5\times10^{-3}\ m)}$$

$$= 2.17\ pF$$

حال ظرفیت جدید خازن معادل برابر است با

$$C_{12}' = \frac{C_1C_2'}{C_1+C_2'} = \frac{(2.53\ pF)(2.17\ pF)}{2.53\ pF + 2.17\ pF} = 1.17\ pF$$

و بار جدید روی صفحه‌ی مثبت هر یک از خازن‌های این گونه می‌شود:

$$q' = C_{12}'V_{\text{باتری}} = (1.17\ pF)(10\ V) = 11.7\ pF$$

بنابراین از اینجا درمی‌یابیم که قدرمطلق بار منتقل شده از باتری بر اثر این تصحیح چنین می‌شود:

$$\Delta q = 14.9\ pC - 11.7\ pC = 3.20\ pC$$

(توجه کنید که در حل این مسئله، برای رسیدن به پاسخ دقیق، محاسبات با رقم‌های بامعنا را در محاسبه‌ی ظرفیت و بار خازن‌ها لحاظ نکردیم.)

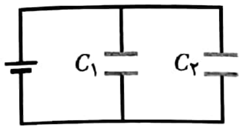
(الف) اگر باری را که در بالا به‌دست آوردیم بخش بر e کنیم، تعداد الکترون‌های عبوری از نقطه‌ی P به‌دست می‌آید:

$$n = \frac{\Delta q}{e} = \frac{3.20\times10^{-12}}{1.60\times10^{-19}} = 2.00\times10^{7}$$

(ب) این الکترون‌ها رو به سمت راست (در جهت دور شدن از باتری) حرکت می‌کنند؛ دلیل مرسوم برای آنکه صفحه‌ی فلزی خازن، باردار مثبت می‌شود این است که این صفحه با از دست دادن الکترون دارای پروتون‌های بیشتری نسبت به الکترون‌ها می‌شود. در این مسئله، الکترون‌ها دوباره به صفحه‌های مثبت خازن برمی‌گردند و آنها را کمتر مثبت می‌کنند.

ولی توجه کنید در واقع آنچه که باتری انجام می‌دهد، ایجاد میدان الکتریکی در سیم‌ها و صفحه‌های خازن به‌گونه‌ای است که الکترون‌هایی که بسیار نزدیک به سطح صفحه‌ی خازن هستند به سمت سطح منفی حرکت کنند.

●●۲۵ GO در شکل ۲۵-۴۰، دو خازن تخت (که در میان صفحه‌های آنها هواست) به یک باتری بسته شده‌اند. مساحت صفحه‌های خازن ۱ برابر $1.5\ cm^2$ است و یک میدان الکتریکی به بزرگی $2000\ V/m$ (بین این صفحه‌ها) برقرار شده است. مساحت صفحه‌های خازن ۲ برابر $0.70\ cm^2$ است و یک میدان الکتریکی به بزرگی $1500\ V/m$ بین صفحه‌های آن برقرار شده است. بار کلّ روی این دو خازن چقدر است؟



شکل ۲۵-۴۰ مسئله‌ی ۲۵

حل بزرگی میدان الکتریکی در فضای میدان دو صفحه‌ی رسانا (یک خازن تخت) طبق معادله‌ی ۲۳-۱۴ برابر $E=\sigma/\varepsilon_0$ است. از طرفی $\sigma=q/A$ است و از آنجا بار کل در یکاهای SI چنین می‌شود:

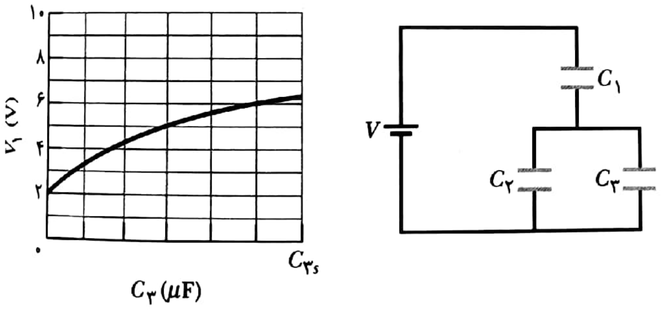
$$q_{\text{کل}} = q_1+q_2 = \sigma_1A_1+\sigma_2A_2 = \varepsilon_0E_1A_1+\varepsilon_0E_2A_2$$

$$= \varepsilon_0(E_1A_1+E_2A_2)$$

$$= (8.85\times10^{-12})\left[(2000)(1.5\times10^{-4})+(1500)(7.0\times10^{-5})\right]$$

$$= 3.6\times10^{-12}\ C = 3.6\ pC$$

●●●۲۶ GO خازن ۳ در شکل ۲۵-۴۱ الف یک *خازن متغیر* است (ظرفیت C_3ی آن می‌تواند تغییر کند). شکل ۲۵-۴۴ ب پتانسیل الکتریکی V_1 دو سر خازن ۱ را برحسب C_3 نشان می‌دهد. محور افقی با $C_{3s} = 12.0\ \mu F$ مقیاس‌بندی شده است. پتانسیل الکتریکی V_1 وقتی $C_3 \to \infty$ میل کند، مجانبی $10\ V$ دارد. (الف) پتانسیل Vی دو سر باتری، (ب) C_1 و (پ) C_2 چقدر است؟



(ب) (الف)

شکل ۲۵-۴۱ مسئله‌ی ۲۶

حل خازن‌های C_2 و C_3 موازی، و خازن معادل آنها با خازن C_1 متوالی است. بنابراین خازن معادل این ترکیب برابر است با

$$C_{eq} = \frac{C_1C_{23}}{C_1+C_{23}} = \frac{C_1(C_2+C_3)}{C_1+C_2+C_3}$$

حال با استفاده از $q=q_1=C_1V_1$ و $q=C_{eq}V$ به رابطه‌ی زیر برای پتانسیل دو سر C_1 می‌رسیم:

$$V_1 = \frac{C_2+C_3}{C_1+C_2+C_3}V$$

(الف) وقتی $C_3 \to \infty$ میل کند، خواهیم داشت

Scanned by CamScanner

$$V_1=\frac{\frac{C_۲}{C_۳}+۱}{\frac{C_۱}{C_۳}+\frac{C_۲}{C_۳}+۱}V=V$$

...ورت مسئله بیان داشته است که وقتی $C_۳\to\infty$، پتانسیل ... V_1 به مقدار مجانبی ۱۰V میل می‌کند، نتیجه می‌گیریم که ... دو سر باتری $V=۱۰V$ است.

...پ) در $C_۳=۰$، از روی منحنی درمی‌یابیم $V_1=۲/۰V$ است. ... رابطه‌ی بالا درمی‌یابیم که در $C_۳=۰$ خواهیم داشت:

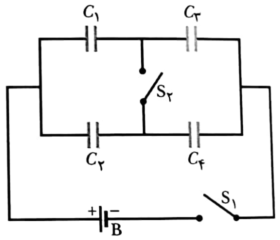
$$۲/۰V=\frac{C_۲}{C_۱+C_۲}(۱۰V)\to C_۱=۴/۰C_۲$$

... از روی نمودار درمی‌یابیم که در $C_۳=۶/۰\mu F$، اختلاف پتانسیل ... $C_۱$ دقیقاً نصف اختلاف پتانسیل دو سر باتری است. بنابراین

$$\frac{۱}{۲}=\frac{C_۲+۶/۰\mu F}{C_۱+C_۲+۶/۰\mu F}=\frac{C_۲+۶/۰\mu F}{۴/۰C_۲+C_۲+۶/۰\mu F}$$

... $C_۲=۲/۰\mu F$ می‌انجامد و آنگاه از $C_۱=۴/۰C_۲$ به $C_۱=۸/۰\mu F$

۲۷ شکل ۲۵-۴۲ یک باتری ۱۲/۰V و چهار خازن بدون بار ...یت‌های $C_۱=۱/۰۰\mu F$، $C_۲=۲/۰۰\mu F$، $C_۳=۳/۰۰\mu F$، و $C_۴=۴/۰...$ را نشان می‌دهد. اگر فقط کلید $S_۱$ بسته شود، بار روی ...) خازن ۱، (ب) خازن ۲، (پ) خازن ۳، و (ت) خازن ۴ چقدر ...د؟ اگر هر دو کلید بسته شوند، بار روی (ث) خازن ۱، (ج) خازن ...) خازن ۳، و (ح) خازن ۴ چقدر می‌شود؟



شکل ۲۵-۴۲ مسئله‌ی ۲۷

(الف) وقتی کلید $S_۲$ باز و کلید $S_۱$ بسته است، خازن‌های $C_۱$ و ... با هم متوالی‌اند و ظرفیت معادل آنها برابر است با

$$C_{۱۳}=\frac{C_۱C_۳}{C_۱+C_۳}=\frac{(۱/۰\mu F)(۳/۰\mu F)}{(۱/۰\mu F+۳/۰\mu F)}=\frac{۳/۰}{۴/۰}\mu F$$

... بار روی خازن‌های ۱ و ۳ چنین می‌شود:

$$q_۱=q_۳=C_{۱۳}V_{باتری}=\left(\frac{۳/۰}{۴/۰}\mu F\right)(۱۲/۰V)=۹/۰۰\mu C$$

...همین ترتیب، خازن‌های $C_۲$ و $C_۴$ با هم متوالی‌اند و ظرفیت معادل ...ر است با

$$C_{۲۴}=\frac{C_۲C_۴}{C_۲+C_۴}=\frac{(۲/۰\mu F)(۴/۰\mu F)}{(۲/۰\mu F+۴/۰\mu F)}=\frac{۴/۰}{۳/۰}\mu F$$

و از آنجا بار روی خازن‌های ۲ و ۴ چنین می‌شود:

$$q_۲=q_۴=C_{۲۴}V_{باتری}=\left(\frac{۴/۰}{۳/۰}\mu F\right)(۱۲/۰V)=۱۶/۰\mu C$$

(پ) همان‌طور که در بالا دیدیم $q_۳=q_۱=۹/۰۰\mu C$ می‌شود.

(ت) همان‌طور که در بالا دیدیم $q_۴=q_۲=۱۶/۰\mu C$ می‌شود.

(ث) و (ج) حال اگر کلید $S_۲$ را ببندیم، خازن‌های $C_۱,C_۲$ و نیز خازن‌های $C_۳,C_۴$ با هم موازی و مجموع آنها با هم متوالی می‌شوند. آنگاه ظرفیت معادل کلّ خازن‌ها برابر است با

$$C_{eq}=\frac{(C_۱+C_۲)(C_۳+C_۴)}{C_۱+C_۲+C_۳+C_۴}$$

$$=\frac{(۳/۰۰\mu F)(۷/۰۰\mu F)}{۱/۰۰\mu F+۲/۰۰\mu F+۳/۰۰\mu F+۴/۰۰\mu F}=۲/۱۰\mu F$$

حال می‌خواهیم ببینیم چه بار کلی از این مجموعه می‌گذرد. داریم

$$q=C_{eq}V_{باتری}=(۲/۱\mu F)(۱۲/۰V)=۲۵/۲\,\mu C$$

چون خازن‌های $C_{۱۲}$ و $C_{۳۴}$ متوالی‌اند، این بار همان بار خازن‌های $C_{۱۲}$ و $C_{۳۴}$ نیز می‌شود. پتانسیل دو سر خازن $C_{۱۲}$ برابر است با

$$V_{۱۲}=\frac{q}{C_۱+C_۲}=\frac{۲۵/۲\mu F}{۳/۰۰\mu F}=۸/۴۰V$$

و چون $C_۱$ و $C_۲$ موازی‌اند، $V_۱=V_۲=V_{۱۲}=۸/۴۰V$ می‌شود. از آنجا بار روی خازن‌های ۱ و ۲ به‌ترتیب چنین می‌شود:

$$q_۱=C_۱V_۱=(۱/۰۰\mu F)(۸/۴۰V)=۸/۴۰\mu C$$

$$q_۲=C_۲V_۲=(۲/۰۰\mu F)(۸/۴۰V)=۱۶/۸\mu C$$

(چ) و (ح) پتانسیل دو سر $C_{۳۴}$ برابر تفاضل پتانسیل دو سر باتری از پتانسیل دو سر $C_{۱۲}$ است و بنابراین داریم

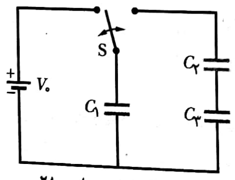
$$V_{۳۴}=V-V_{۱۲}=۱۲/۰-۸/۴=۳/۶۰V$$

چون خازن‌های $C_۳$ و $C_۴$ موازی‌اند، $V_۳=V_۴=V_{۳۴}=۳/۶۰V$ می‌شود. از آنجا بار روی خازن‌های ۳ و ۴ به‌ترتیب چنین می‌شود:

$$q_۳=C_۳V_۳=(۳/۰\mu F)(۳/۶۰V)=۱۰/۸\mu C$$

$$q_۴=C_۴V_۴=(۴/۰\mu F)(۳/۶۰V)=۱۴/۴\mu C$$

●●● ۲۸ شکل ۲۵-۴۳ یک باتری ۱۲/۰V و سه خازن بدون بار با ظرفیت‌های $C_۱=۴/۰\mu F$، $C_۲=۶/۰۰\mu F$ و $C_۳=۳/۰۰\mu F$ را نشان می‌دهد. کلید به طرف چپ زده می‌شود، تا اینکه خازن ۱ کاملاً باردار شود. سپس این کلید به طرف راست زده می‌شود. بار نهایی روی (الف) خازن ۱، (ب) خازن ۲ و (پ) خازن ۳ چقدر است؟



شکل ۲۵-۴۳ مسئله‌ی ۲۸

حل (الف) پایستگی بار حکم می‌کند بار روی خازن C_1 (وقتی کلید در وضعیت سمت چپ قرار دارد) با مجموع بار روی خازن C_1 و خازن معادل C_2 و C_3 (وقتی کلید در وضعیت سمت راست قرار دارد) برابر باشد. بار اولیه‌ی روی خازن C_1 را با q_0 مشخص می‌کنیم و از آنجا خواهیم داشت:

$$q_0 = C_1V_0 = q_1 + q' \qquad (1)$$

که q' همان بار عبوری از خازن معادل C_2 و C_3 است. توجه کنید که چون خازن‌های C_2 و C_3 موازی‌اند، $q' = q_2 = q_3$ است. از طرفی، پتانسیل دو سر خازن معادل C_2 و C_3 با پتانسیل دو سر C_1 برابر است و داریم:

$$V_1 = V' \;\Rightarrow\; \frac{q_1}{C_1} = \frac{q'}{C_{23}}$$

که در آن C_{23} برابر است با

$$C_{23} = \frac{C_2C_3}{C_2 + C_3}$$

پس، رابطه‌ی پتانسیل‌ها چنین می‌شود:

$$\frac{q_1}{C_1} = \left(\frac{C_2 + C_3}{C_2C_3}\right)q' \qquad (2)$$

حال از رابطه‌ی (۱)، q' را محاسبه کرده و در رابطه‌ی (۲) می‌گذاریم:

$$\frac{q_1}{C_1} = \left(\frac{C_2 + C_3}{C_2C_3}\right)(C_1V_0 - q_1)$$

و از آنجا q_1 را به‌دست می‌آوریم:

$$q_1\left(\frac{1}{C_1} + \frac{C_2 + C_3}{C_2C_3}\right) = \frac{C_1(C_2 + C_3)}{C_2C_3}V_0$$

$$q_1\left(\frac{C_2C_3 + C_1C_2 + C_1C_3}{C_1C_2C_3}\right) = \frac{C_1C_2 + C_1C_3}{C_2C_3}V_0$$

و در نتیجه

$$q_1 = \frac{C_1^2(C_2 + C_3)}{C_1C_2 + C_1C_3 + C_2C_3}V_0$$

با توجه به اینکه همه‌ی ظرفیت‌ها بر حسب μF هستند، با قرار دادن مقادیر خواهیم داشت:

$$q_1 = \frac{(4.00)^2(6.00\times 3.00)}{(4.00)(6.00) + (4.00)(3.00) + (6.00)(3.00)}(12.0\,V)$$

$$= 32.0\,\mu C$$

(ب) و (پ) بار روی خازن‌های C_2 و C_3 برابر است و از پایستگی بار داریم:

$$q_2 = q_3 = q' = C_1V_0 - q_1 = (4.00\,\mu F)(12.0\,V) - 32.0\,\mu F$$

$$= 16.0\,\mu F$$

بخش ۲۵-۴ انرژی ذخیره شده در میدان الکتریکی

۲۹∘ برای آنکه $10\,kW\cdot h$ انرژی تا اختلاف پتانسیل $1000\,V$ ذخیره شود، به چه ظرفیتی نیاز است؟

حل انرژی ذخیره شده توسط یک خازن با $U = \frac{1}{2}CV^2$ داده می‌شود که V اختلاف پتانسیل میان صفحه‌های آن است. مقدار انرژی داده شده را باید به ژول تبدیل کنیم. چون یک ژول برابر با یک وات-ثانیه است، خواهیم داشت:

$$10\,kWh = (10)(10^3\,W)(3600\,s) = 3.6\times 10^7\,J$$

بنابراین داریم

$$C = \frac{2U}{V^2} = \frac{2(3.6\times 10^7\,J)}{(1000\,V)^2} = 72\,F$$

۳۰∘ چقدر انرژی در $1.00\,m^3$ هوا، حاصل از میدان الکتریکی "هوایی معتدل" به بزرگی $150\,V/m$ ذخیره می‌شود؟

حل $V = 1.00\,m^3$ است. با استفاده‌ی از معادله‌ی ۲۵-۲۵، انرژی ذخیره شده چنین می‌شود:

$$U = uV = \frac{1}{2}\varepsilon_0E^2V$$

$$= \frac{1}{2}(8.85\times 10^{-12}\,C^2/N\cdot m^2)(150\,V/m)^2(1.00\,m^3)$$

$$= 9.96\times 10^{-8}\,J$$

۳۱∘ خازنی به ظرفیت $2.0\,\mu F$ و خازنی به ظرفیت $4.0\,\mu F$ به‌طور موازی به اختلاف پتانسیل $300\,V$ بسته شده‌اند. انرژی کلّ ذخیره شده در خازن‌ها را محاسبه کنید.

حل انرژی کل ذخیره شده چنین می‌شود:

$$U = \frac{1}{2}C_{eq}V^2 = \frac{1}{2}(C_1 + C_2)V^2$$

$$= \frac{1}{2}(2.0\times 10^{-6}\,F + 4.0\times 10^{-6}\,F)(300\,V)^2 = 0.27\,J$$

۳۲∘ یک خازن تخت پُرشده از هوا به مساحت صفحه‌های $40\,cm^2$ و فاصله‌ی صفحه‌های $1.0\,mm$ تا اختلاف پتانسیل $600\,V$ باردار شده است. (الف) ظرفیت، (ب) بزرگی بار روی هر صفحه، (پ) انرژی ذخیره شده، (ت) میدان الکتریکی میان صفحه‌ها، و (ث) چگالی انرژی میان صفحه‌ها، چقدر است؟

حل (الف) ظرفیت برابر است با

$$C = \frac{\varepsilon_0A}{d} = \frac{(8.85\times 10^{-12}\,C^2/N\cdot m^2)(40\times 10^{-4}\,m^2)}{1.0\times 10^{-3}\,m}$$

$$= 3.54\times 10^{-11}\,F = 35.4\,pF$$

(ب) بزرگی بار روی هر صفحه برابر است با

$$q = CV = (3.54\times 10^{-11}\,F)(600\,V) = 2.12\times 10^{-8}\,C$$

$$= 21.2\,nC$$

(پ) انرژی ذخیره شده برابر است با

Scanned by CamScanner

$$U=\frac{1}{2}CV^2=\frac{1}{2}(3.54\times10^{-11}\,\mathrm{F})(600\,\mathrm{V})^2=6.37\times10^{-6}\,\mathrm{J}=6.37\,\mu\mathrm{J}$$

...ن الکتریکی میان صفحه‌ها برابر است با

$$E=\frac{V}{d}=\frac{600\,\mathrm{V}}{1.0\times10^{-3}\,\mathrm{m}}=6.0\times10^{5}\,\mathrm{V/m}$$

...لی انرژی چنین می‌شود

$$u=\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2=\frac{1}{2}(8.85\times10^{-12}\,\mathrm{C^2/N\cdot m^2})(6.0\times10^{5}\,\mathrm{V/m})^2$$

$$=1.6\,\mathrm{J/m^3}$$

...یک کره فلزی منزوی باردار به قطر ۱۰cm دارای پتانسیل ... نسبت به $V=0$ در فاصله‌ی نامتناهی است. چگالی انرژی را ... الکتریکی نزدیک به سطح این کره محاسبه کنید.

... میدان الکتریکی روی سطح کره $E=q/4\pi\varepsilon_0R^2=V/R$ ... بنابراین، از آنجا خواهیم داشت:

$$u=\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2=\frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{V}{R}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}(8.85\times10^{-12}\,\mathrm{C^2/N\cdot m^2})\left(\frac{8000\,\mathrm{V}}{0.050\,\mathrm{m}}\right)^2=0.11\,\mathrm{J}...$$

... در شکل ۲۵-۲۸، اختلاف پتانسیل $V=100\,\mathrm{V}$ به دو سر یک ... خازنی با ظرفیت‌های $C_1=10.0\,\mu\mathrm{F}$، $C_2=5.00\,\mu\mathrm{F}$، و $C_3=$ ... اعمال شده است. (الف) بار q_3، (ب) اختلاف پتانسیل ... (پ) انرژی ذخیره شده‌ی U_3ی خازن ۳، (ت) q_1، (ث) V_1، و ... برای خازن ۱، و (چ) q_2، (ح) V_2 و (خ) U_2 برای خازن ۳ ...؟

(الف) بار q_3 برابر است با

$$q_3=C_3V_{\text{باتری}}=(4.00\times10^{-6}\,\mathrm{F})(100\,\mathrm{V})=4.00\times10^{-...}$$

...ن طور که در بالا هم استفاده کردیم $V_3=V_{\text{باتری}}=100\,\mathrm{V}$.

...ی ذخیره شده در خازن ۳ چنین می‌شود:

$$U_3=\frac{1}{2}C_3V_3^2=\frac{1}{2}(4.00\times10^{-6}\,\mathrm{C})(100\,\mathrm{V})^2=2.00\times10^{-...}$$

...ی که از خازن‌های C_1 و C_2 می‌گذرد برابر است. ظرفیت خازن ... دو خازن برابر است با

$$C_{12}=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}=\frac{(10.0\,\mu\mathrm{F})(5.00\,\mu\mathrm{F})}{10.0\,\mu\mathrm{F}+5.00\,\mu\mathrm{F}}=3.33...$$

...ل دو سر خازن معادل برابر $V_{\text{باتری}}=100\,\mathrm{V}$ است و بنابراین ... C_1 و C_2 چنین می‌شود:

$$q_1=q_2=C_{12}V_{\text{باتری}}=(3.33\,\mu\mathrm{F})(100\,\mathrm{V})=3.33\times...$$

$$=333\,\mu\mathrm{C}$$

(ث) اختلاف پتانسیل دو سر خازن ۱ چنین می‌شود:

$$V_1=\frac{q_1}{C_1}=\frac{3.33\times10^{-4}\,\mathrm{C}}{10.0\times10^{-6}\,\mathrm{F}}=33.3\,\mathrm{V}$$

(ج) انرژی ذخیره شده در این خازن برابر است با

$$U_1=\frac{1}{2}C_1V_1^2=\frac{1}{2}(10.0\times10^{-6}\,\mathrm{F})(33.3\,\mathrm{V})^2=55.5\times10^{-3}\,\mathrm{J}=55.5\,\mathrm{mJ}$$

(چ) همان‌طور که در قسمت ت بیان کردیم $q_2=q_1=3.33\times10^{-4}\,\mathrm{C}$ است.

(ح) اختلاف پتانسیل دو سر خازن ۲ چنین می‌شود:

$$V_2=V-V_1=100\,\mathrm{V}-33.3\,\mathrm{V}=66.7\,\mathrm{V}$$

(خ) انرژی ذخیره شده در خازن ۲ برابر است با

$$U_2=\frac{1}{2}C_2V_2^2=\frac{1}{2}(5.00\times10^{-6}\,\mathrm{C})(66.7\,\mathrm{V})^2$$

$$=1.11\times10^{-2}\,\mathrm{J}=11.1\,\mathrm{mJ}$$

۳۵۰۰ فرض کنید یک الکترون ساکن، باری نقطه‌ای است. چگالی انرژی u ی میدان الکتریکی در فاصله‌ی شعاعی (الف) $r=1.00\,\mathrm{mm}$، (ب) $r=1.00\,\mu\mathrm{m}$، (پ) $r=1.00\,\mathrm{nm}$، و (ت) $r=1.00\,\mathrm{pm}$ چقدر است؟ (ث) وقتی $r\to0$ میل کند، u چقدر می‌شود؟

حل انرژی در واحد حجم برابر است با

$$u=\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2=\frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{e}{4\pi\varepsilon_0r^2}\right)^2=\frac{e^2}{32\pi^2\varepsilon_0r^4}$$

(الف) در $r=1.00\times10^{-3}\,\mathrm{m}$، به‌ازای $e=1.60\times10^{-19}\,\mathrm{C}$ و $\varepsilon_0=8.85\times10^{-12}\,\mathrm{C^2/N\cdot m^2}$ به $u=9.16\times10^{-18}\,\mathrm{J/m^3}$ می‌رسیم.

(ب) به همان ترتیب در $r=1.00\times10^{-6}\,\mathrm{m}$، به $u=9.16\times10^{-6}\,\mathrm{J/m^3}$ می‌رسیم.

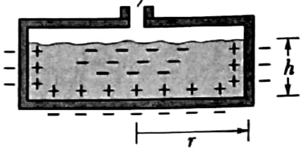
(پ) به همان ترتیب در $r=1.00\times10^{-9}\,\mathrm{m}$، به $u=9.16\times10^{6}\,\mathrm{J/m^3}$ می‌رسیم.

(ت) به همان ترتیب در $r=1.00\times10^{-12}\,\mathrm{m}$، به $u=9.16\times10^{18}\,\mathrm{J/m^3}$ می‌رسیم.

(ث) از رابطه‌ی بالا درمی‌یابیم $u\propto r^{-4}$ است. پس، برای $r\to0$، چگالی انرژی $u\to\infty$ میل می‌کند.

۳۶۰۰ به‌عنوان یک مهندس ایمنی، شما باید عمل ذخیره‌سازی مایعات رسانای قابل اشتعال را در یک محفظه‌ی نارسانا بازرسی کنید. شرکت تولیدکننده‌ی یکی از انواع این مایعات، از یک محفظه‌ی کوتاه با دیواره‌های استوانه‌ای پلاستیکی به شعاع $r=0.20\,\mathrm{m}$ استفاده کرده و آن را تا ارتفاع $h=10\,\mathrm{cm}$ که ارتفاع داخلی کامل محفظه نیست، پر کرده است (شکل ۲۵-۴۴). بازرسی شما نشان می‌دهد که در حین جابه‌جایی

محفظه، سطح خارجی آن غالباً باری منفی با چگالی باری به بزرگی $۲/۰\mu C/m^۲$ (تقریباً به‌طور یکنواخت) به‌دست می‌آورد. چون مایع داخل محفظه یک ماده‌ی رساناست، بار روی محفظه موجب جدایی بارها در داخل مایع می‌شود. (الف) چقدر بار منفی در مرکز این حجم مایع القا شده است؟ (ب) فرض کنید ظرفیت بخش مرکزی مایع نسبت به زمین ۳۵pF است. انرژی پتانسیل مربوط به بار منفی در این خازن مؤثر چقدر است؟ (پ) اگر جرقه‌ای بین زمین و بخش مرکزی مایع (از طریق دریچه‌ی ورودی) رخ دهد، آن انرژی پتانسیل می‌تواند موجب تقویت جرقه شود. کمینه‌ی انرژی لازم برای آنکه جرقه موجب اشتعال مایع شود برابر با ۱۰mJ است. آیا در این وضعیت، جرقه می‌تواند مایع را مشتعل کند؟



شکل ۲۵-۴۴ مسئله‌ی ۳۶

حل (الف) نخست، مساحت سطح باردار شده‌ی حجم استوانه‌ای را محاسبه می‌کنیم:

$$A=۲\pi rh+\pi r^۲=۲\pi(۰/۲۰m)(۰/۱۰m)+\pi(۰/۲۰m)^۲$$
$$=۰/۲۵m^۲$$

از روی شکل درمی‌یابیم که گرچه پایین این حجم باردار شده است، ولی بالای آن بدون بار است. بنابراین بار $q=\sigma A=(۲/۰\times۱۰^{-۶}C/m^۲)(۰/۲۵m^۲)=-۰/۵۰\mu C$ روی سطح خارجی قرار می‌گیرد و در نتیجه (طبق فرض مسئله) همان بار q در سطح داخلی مایع القا می‌شود.

(ب) انرژی ذخیره شده، طبق معادله ی ۲۵-۲۱ چنین می‌شود:

$$U=\frac{q^۲}{۲C}=\frac{(۵/۰\times۱۰^{-۷}C)^۲}{۲(۳۵\times۱۰^{-۱۲}F)}=۳/۶\times۱۰^{-۳}J=۳/۶mJ$$

(پ) کمینه‌ی انرژی لازم برای شعله‌ور شدن مایع ۱۰mJ است. نتیجه‌ی بالا حدوداً ۲/۸ برابر کمتر است و بنابراین در این حالت یک جرقه نمی‌تواند مایع را مشتعل کند. با این حال عامل ۲/۸ به حدّ کافی عاملی اطمینان‌بخش از لحاظ ایمنی نیست.

۳۷۰۰ ILW WWW صفحه‌های موازی یک خازن، با مساحت صفحه‌های $۸/۵۰cm^۲$ و فاصله‌ی صفحه‌های پُر شده از هوایی برابر با ۳/۰۰mm، توسط یک باتری ۶/۰۰V باردار شده است. سپس باتری برداشته شده و فاصله‌ی جدایی صفحه‌ها (بدون تخلیه‌ی بار) تا ۸/۰۰mm افزایش داده می‌شود. با چشم‌پوشی از فریزشدگی خطوط میدان (الف) اختلاف پتانسیل میان صفحه‌ها، (ب) انرژی ذخیره شده‌ی اولیه، (پ) انرژی ذخیره شده‌ی نهایی، و (ت) کار لازم برای افزایش فاصله‌ی صفحه‌ها را به‌دست آورید.

حل (الف) q را بار روی صفحه‌ی مثبت در نظر بگیرید. ظرفیت یک خازن تخت با $\varepsilon_0 A/d_i$ داده می‌شود، چون $q=CV=\varepsilon_0 AV_i/d_i$ می‌شود. پس از این‌که صفحه‌ها از هم دور شوند، بسار فاصله‌ی آنها d_f و اختلاف پتانسیل آنها V_f می‌شود. بنابراین اکنون $q=\varepsilon_0 AV_f/d_f$ است. در نتیجه داریم

$$V_f=\frac{d_f}{\varepsilon_0 A}q=\frac{d_f}{\varepsilon_0 A}\frac{\varepsilon_0 A}{d_i}=V_i=\frac{d_f}{d_i}V_i$$

که به‌ازای $d_i=۳/۰۰\times۱۰^{-۳}m$، $V_i=۶/۰۰V$ و $d_f=۸/۰۰\times۱۰^{-۳}m$ به $V_f=۱۶/۰V$ می‌انجامد.

(ب) انرژی ذخیره شده‌ی اولیه در خازن چنین است:

$$U_i=\frac{۱}{۲}CV_i^۲=\frac{\varepsilon_0 AV_i^۲}{۲d_i}$$
$$=\frac{(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲}C^۲/N.m^۲)(۸/۵۰\times۱۰^{-۴}m^۲)(۶/۰۰V)^۲}{۲(۳/۰۰\times۱۰^{-۳}m)}$$
$$=۴/۵۱\times۱۰^{-۱۱}J=۴۵/۱pJ$$

(پ) انرژی ذخیره شده‌ی نهایی برابر است با

$$U_f=\frac{۱}{۲}\frac{\varepsilon_0 A}{d_f}V_f^۲=\frac{۱}{۲}\frac{\varepsilon_0 A}{d_f}\left(\frac{d_f}{d_i}V_i\right)^۲=\frac{d_f}{d_i}\left(\frac{\varepsilon_0 AV_i^۲}{d_i}\right)$$
$$=\frac{d_f}{d_i}U_i$$

که به‌ازای $d_f/d_i=۸/۰۰/۳/۰۰$ به $U_f=۱/۲۰\times۱۰^{-۱۰}J=۱۲۰pJ$ می‌انجامد.

(ت) کار لازم برای دور کردن صفحه‌ها چنین می‌شود:

$$W=U_f-U_i=۱/۲۰\times۱۰^{-۱۰}J-۴/۵۱\times۱۰^{-۱۱}J$$
$$=۷/۵۲\times۱۰^{-۱۱}J=۷۵/۲\ pJ$$

۳۸۰۰ در شکل ۲۵-۲۹، اختلاف پتانسیل $V=۱۰۰V$ به دو سر یک آرایش خازنی با ظرفیت‌های $C_۱=۱۰/۰\mu F$، $C_۲=۵/۰۰\mu F$، و $C_۳=۱۵/۰\mu F$ اعمال شده است. (الف) بار $q_۳$، (ب) اختلاف پتانسیل $V_۳$، و (پ) انرژی ذخیره شده‌ی $U_۳$ در خازن ۳، (ت) $q_۱$، (ث) $V_۱$، و (ج) $U_۱$ برای خازن ۱، (چ) $q_۲$، (ح) $V_۲$، و (خ) $U_۲$ برای خازن ۲ چقدر است؟

حل (الف) بدیهی است که بار عبوری از $C_۳$ همان بار کل است و بنابراین $q_۳=C_{eq}V$ می‌شود. ظرفیت خازن معادل برابر است با

$$C_{eq}=\frac{C_۳(C_۱+C_۲)}{C_۱+C_۲+C_۳}=\frac{(۱۵/۰\mu F)(۱۰/۰\mu F+۵/۰۰\mu F)}{۱۰/۰\mu F+۵/۰۰\mu F+۱۵/۰\mu F}$$
$$=۷/۵۰\mu F$$

و از آنجا $q_۳$ چنین می‌شود:

$$q_۳=C_{eq}V_{باتری}=(۷/۵۰\times۱۰^{-۶}F)(۱۰۰V)=۷/۵۰\times۱۰^{-۴}C=۷۵۰\mu C$$

Scanned by CamScanner

...ه در قسمت‌های بعد، بارهای q_1 و q_2 پرسیده شده است، خوب ... جا آنها را نیز محاسبه کنیم. برای محاسبه‌ی بار روی C_1 و ...همین ... است که پتانسیل دو سر خازن‌های C_1 و C_2 را به‌دست آوریم. ... منظور به ظرفیت معادل خازن‌های C_1 و C_2 که برابر $C_{12}=$ ... می‌شود، نیاز داریم. با توجه به اینکه از خازن معادل C_{12} ... بار q_3 می‌گذرد، داریم

$$V_{12}=\frac{q_3}{C_{12}}=\frac{7{,}50\times10^{-4}\,\mathrm{C}}{15{,}0\times10^{-6}\,\mathrm{F}}=50{,}0\,\mathrm{V}$$

...حتی می‌توان بار روی خازن‌های C_1 و C_2 را به‌دست آوریم:

$$q_1=C_1V_{12}=(10{,}0\times10^{-6}\,\mathrm{C})(50{,}0\,\mathrm{V})=5{,}00\times10^{-4}\,\mathrm{C}$$
$$q_2=C_2V_{12}=(5{,}00\times10^{-6}\,\mathrm{C})(50{,}0\,\mathrm{V})=2{,}50\times10^{-4}\,\mathrm{C}$$

...سیل دو سر خازن C_3 چنین می‌شود:

$$V_3=V_{\text{باتری}}-V_{12}=100\,\mathrm{V}-50{,}0\,\mathrm{V}=50{,}0\,\mathrm{V}$$

...ژی ذخیره شده در خازن C_3 برابر است با

$$U_3=\frac{1}{2}C_3V_3^2=\frac{1}{2}(15{,}0\times10^{-6}\,\mathrm{F})(50{,}0\,\mathrm{V})^2$$
$$=1{,}88\times10^{-2}\,\mathrm{J}$$

...قسمت الف $q_1=5{,}00\times10^{-4}\,\mathrm{C}$ به‌دست آوردیم.

...قسمت الف $V_1=V_{12}=50{,}0\,\mathrm{V}$ به‌دست آوردیم.

...ژی ذخیره شده در خازن C_1 برابر است با

$$U_1=\frac{1}{2}C_1V_1^2=\frac{1}{2}(10{,}0\times10^{-6}\,\mathrm{F})(50{,}0\,\mathrm{V})^2=1{,}25\times10^{-2}\,\mathrm{J}$$

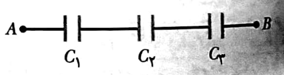
...قسمت الف $q_2=2{,}50\times10^{-4}\,\mathrm{C}$ به‌دست آوردیم.

...قسمت الف $V_2=V_{12}=50{,}0\,\mathrm{V}$ به‌دست آوردیم.

...ژی ذخیره شده در خازن C_2 برابر است با

$$U_2=\frac{1}{2}C_2V_2^2=\frac{1}{2}(5{,}00\times10^{-6}\,\mathrm{F})(50{,}0\,\mathrm{V})^2=6{,}25\times10^{-3}\,\mathrm{J}$$

... GO در شکل ۲۵-۴۵، $C_1=10{,}0\,\mu\mathrm{F}$، $C_2=20{,}0\,\mu\mathrm{F}$، و $C_3=25$... است. اگر هیچ خازنی نتواند اختلاف پتانسیلی بیشتر از ... را بدون فروریزش الکتریکی تحمل کند، (الف) بزرگی اختلاف ... بیشینه‌ای که می‌تواند بین صفحه‌های A و B وجود داشته باشد و ...ژی بیشینه‌ای که می‌تواند در این آرایش سه خازنی ذخیره شود، ...؟



شکل ۲۵-۴۵ مسئله‌ی ۳۹

... (الف) چون خازن‌ها به‌طور متوالی بسته شده‌اند، هر کدام بار ... را ذخیره می‌کنند. $V=q/C$ است و بنابراین اختلاف پتانسیل ... خازن C_1 که کم‌ترین ظرفیت را دارد، از همه بیشتر است ... بیشینه‌ی اختلاف پتانسیل ممکن (۱۰۰V) را به خازن ۱

متناسب می‌کنیم. از آنجا بار روی خازن‌ها $q=C_1V_1=(10{,}0\times10^{-6}\,\mathrm{F})(100\,\mathrm{V})=1{,}00\times10^{-3}\,\mathrm{C}$ می‌شود. در نتیجه اختلاف پتانسیل دو سر خازن ۲، $V_2=q/C_2=50{,}0\,\mathrm{V}$ و اختلاف پتانسیل دو سر خازن ۳، $V_3=q/C_3=40{,}0\,\mathrm{V}$ می‌شود. بنابراین بیشینه‌ی اختلاف پتانسیل ممکن بین نقاط A و B برابر با $V=V_1+V_2+V_3=190\,\mathrm{V}$ می‌شود.

(ب) با استفاده از $U=\frac{1}{2}CV^2$، در یکاهای SI خواهیم داشت:

$$U_{\max}=U_1+U_2+U_3=\frac{1}{2}(C_1V_1^2+C_2V_2^2+C_3V_3^2)$$
$$=\frac{1}{2}\left[(1{,}00\times10^{-5})(100)^2+(2{,}00\times10^{-5})(50{,}0)^2+(2{,}50\times10^{-5})(40{,}0)^2\right]$$
$$=0{,}0950\,\mathrm{J}=95{,}0\,\mathrm{mJ}$$

بخش ۲۵-۵ خازن با دی‌الکتریک

۴۰● یک خازن تخت پُرشده از هوا دارای ظرفیت ۱٫۳pF است. فاصله‌ی صفحه‌های آن را دو برابر می‌کنیم و میان آنها موم قرار می‌دهیم. ظرفیت جدید خازن ۲٫۶pF می‌شود. ثابت دی‌الکتریک موم را به‌دست آورید.

حل اگر ظرفیت اولیه را با $C_i=\varepsilon_0A/d$ نمایش دهیم، ظرفیت نهایی $C_f=\varepsilon_0\kappa A/2d$ می‌شود. بنابراین $C_f/C_i=\kappa/2$ می‌شود و از آنجا خواهیم داشت:

$$\kappa=2\frac{C_f}{C_i}=2\left(\frac{2{,}6\,\mathrm{pF}}{1{,}3\,\mathrm{pF}}\right)=4{,}0$$

۴۱● یک کابل هم‌محور در خطّ انتقالی به‌کار گرفته شده است که دارای شعاع داخلی ۰٫۱۰mm و شعاع خارجی ۰٫۶۰mm است. ظرفیت بر متر را برای این کابل محاسبه کنید. فرض کنید فضای میان این رساناها با پلی‌استیرن پر شده است.

حل ظرفیت خازن استوانه‌ای در حضور دی‌الکتریک بار رابطه‌ای زیر داده می‌شود:

$$C=\kappa C_0=\frac{2\pi\kappa\varepsilon_0L}{\ln(b/a)}$$

که C_0 ظرفیت بدون دی‌الکتریک، κ ثابت دی‌الکتریک، L طول، a شعاعی داخلی، و b شعاع خارجی کابل است. از آنجا، ظرفیت در واحد طول کابل چنین می‌شود

$$\frac{C}{L}=\frac{2\pi\kappa\varepsilon_0}{\ln(b/a)}=\frac{2\pi(2{,}6)(8{,}85\times10^{-12}\,\mathrm{F/m})}{\ln[(0{,}60\,\mathrm{mm})/(0{,}10\,\mathrm{mm})]}$$
$$=8{,}1\times10^{-11}\,\mathrm{F/m}=81\,\mathrm{pF/m}$$

۴۲● یک خازن تخت پُرشده از هوا دارای ظرفیت ۵۰pF است. (الف) اگر مساحت هر صفحه‌ی آن ۰٫۳۵m² باشد، فاصله‌ی جدایی صفحه‌های آن چقدر است؟ (ب) اگر اکنون ناحیه‌ی میان این صفحه‌ها با ماده‌ای با ثابت دی‌الکتریک $\kappa=5{,}6$ پُر شود، ظرفیت خازن چقدر می‌شود؟

Scanned by CamScanner

حل (الف) از $C=\varepsilon_0 A/d$ استفاده می‌کنیم و از آنجا d را به‌دست می‌آوریم:

$$d=\frac{\varepsilon_0 A}{C}=\frac{(8.85\times10^{-12}\,C^2/N\cdot m^2)(0.35\,m^2)}{50\times10^{-12}\,F}=6.2\times10^{-2}\,m$$

(ب) $C\propto\kappa$ است. بنابراین ظرفیت جدید چنین می‌شود:

$$C'=C\left(\frac{\kappa}{\kappa_{هوا}}\right)=(50\,pF)\left(\frac{5.6}{1.0}\right)=2.8\times10^2\,pF$$

●۴۳ از شما خواسته شده است که یک خازن پُرشده از هوا به ظرفیت $7.4\,pF$ را به خازنی تبدیل کنید که تحت اختلاف پتانسیل بیشینه‌ی $652\,V$، انرژی $7.4\,\mu J$ را ذخیره کند. اگر هیچ‌گونه خطایی مجاز نباشد، باید از کدام دی‌الکتریک جدول ۲۵-۱ برای پر کردن فضای بین صفحه‌های این خازن استفاده کنید؟

حل ظرفیت یک خازن در حضور دی‌الکتریک با $C=\kappa C_0$ داده می‌شود که C_0 ظرفیت خازن پیش از قرار دادن دی‌الکتریک است. آنگاه انرژی ذخیره شده با $U=\frac{1}{2}CV^2=\frac{1}{2}\kappa C_0 V^2$ داده می‌شود و از آنجا خواهیم داشت:

$$\kappa=\frac{2U}{C_0V^2}=\frac{2(7.4\times10^{-6}\,J)}{(7.4\times10^{-12}\,F)(652\,V)^2}=4.7$$

طبق جدول ۲-۱ کتاب مبانی فیزیک، این ثابت دی‌الکتریک پیرکس است و بنابراین باید از پیرکس استفاده کنیم.

●●۴۴ قرار است خازنی با ظرفیت نزدیک به $1\,nF$ و پتانسیل فروریزشی بیشتر از $10000\,V$ بسازید. به ذهن‌تان می‌رسد از یک لیوان پیرکس بلند به‌عنوان دی‌الکتریک استفاده کنید و سطح‌های خمیده‌ی داخلی و خارجی آن را با ورقه‌هایی آلومینیومی بپوشانید که به‌عنوان صفحه‌های خازن عمل کنند. بلندی لیوان $15\,cm$، شعاع داخلی آن $3.6\,cm$ و شعاع خارجی آن $3.8\,cm$ است. (الف) ظرفیت و (ب) پتانسیل فروریزش این خازن چقدر است؟

حل (الف) ظرفیت خازن استوانه‌ای در حضور دی‌الکتریک برابرست با

$$C=2\pi\varepsilon_0\kappa\frac{L}{\ln(b/a)}=2\pi(8.85\times10^{-12}\,F/m)(4.7)\frac{0.15\,m}{\ln(3.8\,cm/3.6\,cm)}=0.73\times10^{-9}\,F=0.73\,nF$$

که در آن از ثابت دی‌الکتریک پیرکس $(\kappa=4.7)$ استفاده کرده‌ایم.

(ب) قدرت دی‌الکتریک پیرکس، یعنی بیشینه‌ی مقدار میدان الکتریکی‌ای که پیرکس می‌تواند بدون سوختن عمل کند برابر $14\,kV/mm$ است. بنابراین پتانسیل شکست چنین می‌شود:

$$|V|=\int_a^b E\,ds=E(b-a)=(14\,kV/mm)(38\,mm-36\,mm)=28\,kV$$

●●۴۵ خازن تخت معینی با دی‌الکتریکی با ثابت دی‌الکتریک $\kappa=5.5$ پر شده است. مساحت صفحه‌های این خازن $0.034\,m^2$ و فاصله‌ی صفحه‌های آن $2.0\,mm$ است. اگر میدان الکتریکی میان صفحه‌ها از $200\,kN/C$ بیشتر شود، خازن خراب می‌شود (اتصال کوتاه شده و می‌سوزد). انرژی بیشینه‌ای که می‌شود در خازن ذخیره کرد، چقدر است؟

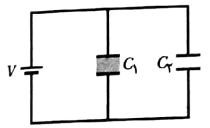
حل میدان الکتریکی درست بیرون یک رسانای منزوی واقع در یک دی‌الکتریک با $E=\sigma/\kappa\varepsilon_0$ داده می‌شود (معادله‌ی ۲۵-۲۹) که به‌ازای $\sigma=q/A$ چنین به‌دست می‌دهد:

$$|\vec{E}|=\frac{q}{\kappa\varepsilon_0 A}=200\times10^3\,N/C$$

که به‌ازای $\kappa=5.5$ و $A=0.034\,m^2$، $q=3.3\times10^{-7}\,C$ را به‌دست می‌دهد. آنگاه U چنین می‌شود:

$$U=\frac{q^2}{2C}=\frac{q^2d}{2\kappa\varepsilon_0 A}=\frac{(3.3\times10^{-7}\,C)^2(2.0\times10^{-3}\,m)}{2(5.5)(8.85\times10^{-12}\,F/m)(0.034\,m^2)}=6.6\times10^{-5}\,J=66\,\mu J$$

●●۴۶ در شکل ۲۵-۴۶، چقدر بار توسط باتری $12.0\,V$ روی خازن‌های موازی ذخیره شده است؟ یکی از آنها با هوا، و دیگری با دی‌الکتریکی با ثابت دی‌الکتریک $\kappa=3.00$ پر شده است؛ مساحت صفحه‌های هر دو خازن برابر با $5.00\times10^{-3}\,m^2$ و فاصله‌ی صفحه‌های هر دو $2.00\,mm$ است.



شکل ۲۵-۴۶ مسئله‌ی ۴۶

حل اختلاف پتانسیل دو سر هر خازن برابر اختلاف پتانسیل باتری $V=12.0\,V$ است. از طرفی، ظرفیت خازن‌ها را به‌راحتی می‌توانیم محاسبه کنیم

$$C_2=\frac{\varepsilon_0 A}{d}=\frac{(8.85\times10^{-12}\,F/m)(5.00\times10^{-3}\,m^2)}{2.00\times10^{-3}\,m}=2.21\times10^{-11}\,F=22.1\,pF$$

$$C_1=\frac{\kappa\varepsilon_0 A}{d}=\frac{(3)(8.85\times10^{-12}\,F/m)(5.00\times10^{-3}\,m^2)}{2.00\times10^{-3}\,m}=6.64\times10^{-11}\,F=66.4\,pF$$

در نتیجه $q_1=C_1V=8.00\times10^{-10}\,C$ و $q_2=C_2V=2.66\times10^{-10}\,C$ می‌شود و بنابراین بار کل روی خازن‌ها $q_{کل}=q_1+q_2=1.06\times10^{-9}\,C$ می‌شود.

روش دیگر آن بود که ظرفیت معادل دو خازن موازی را به‌دست آوریم و سپس از آنجا بار کل به راحتی از رابطه‌ی $q_{کل}=C_{eq}V_{باتری}$ به‌دست می‌آید.

Scanned by CamScanner

ILW ... مادهی معینی دارای ...
... ۱۸MV/m است. اگر از این ماده به‌عنوان دی‌الکتریک در ... تخت استفاده شود، مساحت کمینه‌ی صفحه‌های خازن باید ... تا ظرفیت $۷٫۰\times۱۰^{-۲}\ \mu F$ به‌دست آید و تضمین شود که خازن ... اختلاف پتانسیلی برابر با ۴٫۰kV را تحمل کند.

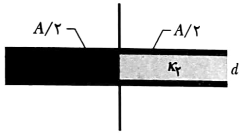
... ظرفیت با $C=C_۰=\kappa\varepsilon_۰A/d$ داده می‌شود که κ ثابت ... A مساحت هر صفحه، و d فاصله‌ی صفحه‌هاست. میدان ... میان صفحه‌ها با $E=V/d$ داده می‌شود که V اختلاف پتانسیل ... صفحه‌هاست. بنابراین $d=V/E$ و از آنجا $C=\kappa\varepsilon_۰AE/V$ ... برای A خواهیم داشت:

$$A=\frac{CV}{\kappa\varepsilon_۰E}$$

... مساحت صفحه‌ها کمینه باشد، میدان الکتریکی باید بیشترین ... داشته باشد، بی‌آنکه شکست الکتریکی رخ دهد. یعنی

$$A=\frac{(۷٫۰\times۱۰^{-۸}F)(۴٫۰\times۱۰^{۳}V)}{۲٫۸(۸٫۸۵\times۱۰^{-۱۲}F/m)(۱۸\times۱۰^{۶}V/m)}=۰٫۶۳...$$

... شکل ۲۵-۴۷ خازنی تخت با مساحت صفحه‌های $A=...$ و فاصله‌ی صفحه‌های $d=۵٫۵۶\,mm$ را نشان ... نیمه‌ی سمت چپ بین صفحه‌ها با ماده‌ای با ثابت دی‌الکتریک $\kappa_۱$ ... پر شده است؛ نیمه‌ی سمت راست این فضا با ماده‌ای با ثابت ... $\kappa_۲=۱۲٫۰$ پر شده است. ظرفیت این خازن چقدر است؟



شکل ۲۵-۴۷ مسئله‌ی ۴۸

... روش منطقی حلّ چنین مسئله‌ای این است که ظرفیت را به ... اول به‌دست آوریم:

$$C=\frac{q}{V}=\frac{q_۱+q_۲}{V}\quad,\quad E=\frac{E_۰}{\kappa}=\frac{q}{\varepsilon_۰\kappa A}\quad,\quad V=Ed$$

... $q_۲$ هر کدام روی $A/۲$ می‌نشینند، خواهیم داشت:

$$C=\frac{(\varepsilon_۰\kappa_۱A/۲+\varepsilon_۰\kappa_۲A/۲)E}{Ed}=\frac{\varepsilon_۰A}{d}\left(\frac{\kappa_۱+\kappa_۲}{۲}\right)$$

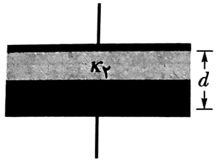
... از اول از ظرفیت معادل دو خازن موازی استفاده کنیم:

$$C=C_۱+C_۲=\frac{\varepsilon_۰(A/۲)\kappa_۱}{d}+\frac{\varepsilon_۰(A/۲)\kappa_۲}{d}=\frac{\varepsilon_۰A}{d}\left(\kappa_۱+...\right)$$

... SI چنین به‌دست می‌دهد:

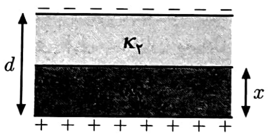
$$C=\left[\frac{(۸٫۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۵٫۵۶\times۱۰^{-۴})}{۵٫۵۶\times۱۰^{-۳}}\right]\left[\frac{۷٫۰۰+۱۲٫۰...}{۲}\right]$$
$$=۸٫۴۱\times۱۰^{-۱۲}F=۸٫۴۱pF$$

... شکل ۲۵-۴۸ یک خازن تخت با مساحت صفحه‌های $A=۷٫۸۹\,cm^۲$ و فاصله‌ی صفحه‌های $d=۴٫۶۲\,mm$ را نشان می‌دهد. نیمه‌ی بالایی فضای بین صفحه‌ها با ماده‌ای با ثابت دی‌الکتریک $\kappa_۱=۱۱٫۰$ پر شده است؛ نیمه‌ی پایینی این فضا با ماده‌ای با ثابت دی‌الکتریک $\kappa_۲=۱۲٫۰$ پر شده است. ظرفیت این خازن چقدر است؟



شکل ۲۵-۴۸ مسئله‌ی ۴۹

حل روش اول. روش منطقی برای حلّ چنین مسئله‌هایی این است که ظرفیت را به روش معمول محاسبه کنیم.



$$\Delta V=-\int_d^x E_۲ds-\int_x^۰ E_۱ds$$

که در آن

$$E_۱=\frac{E_۰}{\kappa_۱}=\frac{q_۰}{\varepsilon_۰\kappa_۱A_۱}\quad,\quad E_۲=\frac{E_۰}{\kappa_۲}=\frac{q_۰}{\varepsilon_۰\kappa_۲A}$$

در نتیجه

$$\Delta V=-\int_d^x\frac{q}{\varepsilon_۰\kappa_۲A}ds-\int_x^۰\frac{q}{\varepsilon_۰\kappa_۱A}ds$$
$$=-\frac{q}{\varepsilon_۰A}\left[\frac{۱}{\kappa_۲}(x-d)+\frac{۱}{\kappa_۱}(۰-x)\right]$$
$$=-\frac{q}{\varepsilon_۰A}\left[x\left(\frac{۱}{\kappa_۲}-\frac{۱}{\kappa_۱}\right)-\frac{d}{\kappa_۲}\right]$$

با توجه به شکل، ارتفاع دی‌الکتریک‌ها برابر با $x=d/۲$ است و از آنجا خواهیم داشت:

$$\Delta V=-\frac{q}{\varepsilon_۰A}\left[\frac{d}{۲}\left(\frac{۱}{\kappa_۲}-\frac{۱}{\kappa_۱}\right)-\frac{d}{\kappa_۲}\right]$$
$$=-\frac{q}{\varepsilon_۰A}\left[-\frac{d}{۲\kappa_۱}-\frac{d}{۲\kappa_۲}\right]=\frac{qd}{۲\varepsilon_۰A}\left[\frac{۱}{\kappa_۱}+\frac{۱}{\kappa_۲}\right]$$
$$=\frac{qd}{۲\varepsilon_۰A}\left[\frac{\kappa_۱+\kappa_۲}{\kappa_۱\kappa_۲}\right]$$

و در نتیجه ظرفیت خازن چنین می‌شود

$$C=\frac{q}{\Delta V}=\frac{۲\varepsilon_۰A}{d}\left[\frac{\kappa_۱\kappa_۲}{\kappa_۱+\kappa_۲}\right]$$

Scanned by CamScanner

روش دوم. با اینکه توجیه فیزیکی ممکنی برای در نظر گرفتن این آرایش به‌عنوان دو خازن متوالی نداریم، با این حال به‌نظر می‌رسد که می‌توانیم این آرایش را به‌صورت مجموع دو خازن متوالی نیز در نظر بگیریم.

$$C_۱=\varepsilon_۰\kappa_۱\frac{A}{d/۲}\ ,\ C_۲=\varepsilon_۰\kappa_۲\frac{A}{d/۲}$$

و از آنجا

$$C_{eq}=\frac{C_۱C_۲}{C_۱+C_۲}=\frac{\left(۲\frac{\varepsilon_۰A\kappa_۱}{d}\right)\left(۲\frac{\varepsilon_۰A\kappa_۲}{d}\right)}{\left(۲\frac{\varepsilon_۰A\kappa_۱}{d}\right)+\left(۲\frac{\varepsilon_۰A\kappa_۲}{d}\right)}$$

$$=\frac{۲\varepsilon_۰A}{d}\left[\frac{\kappa_۱\kappa_۲}{\kappa_۱+\kappa_۲}\right]$$

که همان نتیجه‌ی روش اول است.

بنابراین، از این پس می‌توانیم چنین آرایش‌هایی را به صورت خازن‌های متوالی در نظر بگیریم. به عبارت دیگر، این روش اثباتی بر چنین مدعایی بود.

در هر حال مقدار عددی ظرفیت خازن معادل در یکاهای SI چنین می‌شود:

$$C=\frac{۲(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۷/۸۹\times۱۰^{-۲})(۱۱/۰)(۱۲/۰)}{۴/۶۲\times۱۰^{-۳}}$$

$$=۱/۷۳\times۱۰^{-۱۱}\text{F}$$

در حل مسئله‌ی ۴۸، ظرفیت معادل برابر با $C_۱=\frac{\varepsilon_۰A}{d}\left(\frac{\kappa_۱+\kappa_۲}{۲}\right)$ **و در اینجا** $C_۲=\frac{۲\varepsilon_۰A}{d}\left[\frac{\kappa_۱\kappa_۲}{\kappa_۱+\kappa_۲}\right]$ **شد. خوب است دو حالت خاص را برای هر دو بررسی کنیم. توقع داریم هر دو به‌ازای** $\kappa_۱=\kappa_۲$ **به ظرفیت مورد نظر** $C=\kappa\varepsilon_۰A/d$ **بیانجامند.**

برای آرایش اول داریم

$$C_۱=\frac{\varepsilon_۰A}{d}\left(\frac{۲\kappa}{۲}\right)=\varepsilon_۰\kappa\frac{A}{d}$$

و برای آرایش دوم

$$C_۲=\frac{۲\varepsilon_۰A}{d}\left[\frac{\kappa^۲}{۲\kappa}\right]=\varepsilon_۰\kappa\frac{A}{d}$$

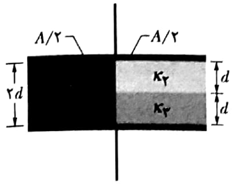
ولی درباره ی $\kappa_۲\gg\kappa_۱$ **هیچ پیش‌زمینه‌ی ذهنی نداریم و خوب است رابطه‌هایی برای این حالت خاص به‌دست آوریم. برای آرایش اول خواهیم داشت:**

$$C_۱=\frac{\varepsilon_۰A}{d}\left(\frac{\kappa_۱}{۲}\right)=\frac{\varepsilon_۰\kappa_۱A}{۲d}$$

و برای آرایش دوم

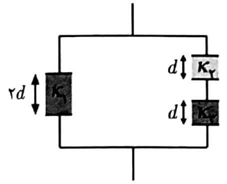
$$C_۲\approx\frac{۲\varepsilon_۰A}{d}\left[\frac{\kappa_۱\kappa_۲}{\kappa_۱\left(۱+\frac{\kappa_۲}{\kappa_۱}\right)}\right]=\frac{۲\varepsilon_۰\kappa_۲A}{d}$$

۵۰ ●●● شکل ۲۵-۴۹ خازنی تخت با مساحت صفحه‌های $A=۱۰/۵\text{cm}^۲$ و فاصله‌ی بین صفحه‌های $۲d=۷/۱۲\text{mm}$ را نشان می‌دهد. نیمه‌ی چپ فضای بین صفحه‌ها با ماده‌ای با ثابت دی‌الکتریک $\kappa_۱=۲۱/۰$ پر شده است؛ نیمه‌ی بالایی سمت راست این فضا با ماده‌ای با ثابت دی‌الکتریک $\kappa_۲=۴۲/۰$، و نیمه‌ی پایینی سمت راست آن با ماده‌ای با ثابت دی‌الکتریک $\kappa_۳=۵۸/۰$ پر شده است. ظرفیت این خازن چقدر است؟



شکل ۲۵-۴۹ مسئله‌ی ۵۰

حل در اینجا از نتایج مسئله‌های ۴۸ و ۴۹ استفاده می‌کنیم. چنین آرایشی را می‌توانیم به صورت زیر در نظر بگیریم:



که در آن ظرفیت خازن‌ها برابر است با

$$C_۱=\varepsilon_۰\kappa_۱\frac{A/۲}{۲d}=\varepsilon_۰\kappa_۱\frac{A}{۴d}$$

$$C_۲=\varepsilon_۰\kappa_۲\frac{A/۲}{d}=\varepsilon_۰\kappa_۲\frac{A}{۲d}$$

$$C_۳=\varepsilon_۰\kappa_۳\frac{A/۲}{d}=\varepsilon_۰\kappa_۳\frac{A}{۲d}$$

خازن‌های $C_۲$ و $C_۳$ با هم متوالی‌اند و بنابراین ظرفیت معادل‌شان برابر است با

$$C_{۲۳}=\frac{C_۲C_۳}{C_۲+C_۳}=\frac{\left(\varepsilon_۰\frac{A}{۲d}\right)^۲\kappa_۲\kappa_۳}{\varepsilon_۰\frac{A}{۲d}(\kappa_۲+\kappa_۳)}=\varepsilon_۰\frac{A}{۲d}\frac{\kappa_۲\kappa_۳}{\kappa_۲+\kappa_۳}$$

خازن‌های $C_{۲۳}$ و $C_۱$ با هم موازی‌اند و ظرفیت معادل کلّ آرایش چنین می‌شود:

$$C_{eq}=C_۱+C_{۲۳}=\varepsilon_۰\kappa_۱\frac{A}{۴d}+\varepsilon_۰\frac{A}{۲d}\frac{\kappa_۲\kappa_۳}{\kappa_۲+\kappa_۳}$$

$$=\varepsilon_۰\frac{A}{۲d}\left(\frac{\kappa_۱}{۲}+\frac{\kappa_۲\kappa_۳}{\kappa_۲+\kappa_۳}\right)$$

$$=\varepsilon_۰\frac{A}{۲d}\left(\frac{\kappa_۱\kappa_۲+\kappa_۱\kappa_۳+۲\kappa_۲\kappa_۳}{۲\kappa_۲+۲\kappa_۳}\right)$$

$$=\varepsilon_۰\frac{A}{۴d}\left(\kappa_۱+\frac{۲\kappa_۲\kappa_۳}{\kappa_۲+\kappa_۳}\right)$$

Scanned by CamScanner

...دی آن در اینجا (در یکاهای SI) چنین می‌شود:

$$C_{eq}=\frac{(8.85\times10^{-12})(10.5\times10^{-4})}{4(3.56)\times10^{-3}}\left(21.0+\frac{2(42.0)(...)}{42.0+...}\right)$$

$$=4.55\times10^{-11}\,F=45.5\,pF$$

...۶ دی‌الکتریک‌ها و قانون گاؤس

... خازنی تخت دارای ظرفیت $100\,pF$، مساحت صفحه‌های ... و دی‌الکتریکی از جنس میکا $(\kappa=5.4)$ است که فضای ...های آن را کاملاً پر کرده است. تحت اختلاف پتانسیل $50\,V$، ...ی میدان الکتریکی E در میکا، (ب) بزرگی بار آزاد روی ... (پ) بزرگی بار سطحی القا شده روی میکا را محاسبه کنید.

(الف) میدان الکتریکی در ناحیه‌ی میان صفحه‌ها با $E=V/d$ ... که V اختلاف پتانسیل میان صفحه‌ها و d فاصله‌ی جدایی ... ظرفیت خازن تخت با $C=\kappa\varepsilon_0 A/d$ داده می‌شود که A ... صفحه و κ ثابت دی‌الکتریک است. از اینجا $d=\kappa\varepsilon_0 A/C$ ... قرار دادن در $E=V/d$ چنین به‌دست می‌دهد:

$$E=\frac{VC}{\kappa\varepsilon_0 A}=\frac{(50\,V)(100\times10^{-12}\,F)}{5.4(8.85\times10^{-12}\,F/m)(100\times10^{...}}$$

$$=1.0\times10^{4}\,V/m$$

... روی صفحه‌ها برابر است با

$$q_f=CV=(100\times10^{-12}\,F)(50\,V)=5.0\times10^{...}$$

$$=5.0\,nC$$

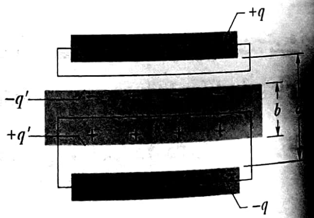
... بار سطحی القا شده‌ی q' و بار آزاد q_f را می‌شناسیم. از ...۳۵ داریم:

$$q'=q\left(1-\frac{1}{\kappa}\right)=(5.0\times10^{-9}\,C)\left(1-\frac{1}{5.4}\right)$$

$$=4.1\times10^{-9}\,C=4.1\,nC$$

...یش شکل ۲۵-۱۷، فرض کنید به هنگام قرار دادن بره‌ی ... باتری قطع نشود. (الف) ظرفیت، (ب) بار روی صفحه‌های ... میدان الکتریکی در فضای خالی، و (ت) میدان الکتریکی در بره ... بره قرار داده شد، محاسبه کنید.

...وجه کنید که وقتی باتری وصل باشد، پتانسیل ثابت می‌ماند و ...کند. ولی در هر صورت ظرفیت خازن، چه خازن به باتری ... چه نباشد، ثابت می‌ماند. بنابراین خواهیم داشت:



(الف) ظرفیت خازن دارای همان مقدار $13.4\,pF$ خواهد بود.

(ب) برای بار روی صفحه‌های خازن داریم

$$q=CV_0=(13.4\times10^{-12}\,F)(85.5\,V)=1.15\,nC$$

(پ) از قانون گاؤس داریم

$$E_0=\frac{1.15\times10^{-9}\,C}{(8.85\times10^{-12}\,C^2/N\cdot m^2)(115\times10^{-4}\,m^2)}$$

$$=1.13\times10^{4}\,N/C$$

(ت) میدان الکتریکی در حضور دی‌الکتریک، با استفاده از معادله‌ی ۲۵-۳۴، چنین می‌شود:

$$E=\frac{E_0}{\kappa}=\frac{1.13\times10^{4}\,N/C}{2.61}=4.32\times10^{3}\,N/C$$

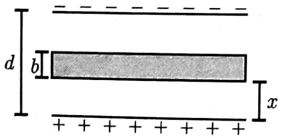
۵۳۰۰ خازنی تخت دارای صفحه‌هایی به مساحت $0.12\,m^2$ و فاصله‌ی جدایی $1.2\,cm$ است. یک باتری این صفحه‌ها را تا اختلاف پتانسیل $120\,V$ بادار می‌کند و سپس برداشته می‌شود. سپس یک بره‌ی دی‌الکتریک به ضخامت $4.0\,mm$ و ثابت دی‌الکتریک ۴٫۸ به‌طور متقارن در میان این صفحه‌ها قرار داده می‌شود. (الف) ظرفیت خازن، پیش از آنکه بره قرار داده شود، چقدر است؟ (ب) ظرفیت خازن، پس از قرار دادن بره چقدر می‌شود؟ بار آزاد q (پ) پیش و (ت) پس از آنکه بره قرار داده شد، چقدر است؟ بزرگی میدان الکتریکی (ث) در فضای میان صفحه‌ها و دی‌الکتریک و (ج) در خود دی‌الکتریک چقدر است؟ (چ) وقتی بره در فضای میان صفحه‌ها قرار گرفت، اختلاف پتانسیل دو سر صفحه‌ها چقدر می‌شود؟ (ح) در حین قرار دادن بره، چقدر کار خارجی صورت می‌گیرد؟

حل (الف) در ابتدا، ظرفیت برابر است با

$$C_0=\frac{\varepsilon_0 A}{d}=\frac{(8.85\times10^{-12}\,C^2/N\cdot m^2)(0.12\,m)^2}{1.2\times10^{-2}\,m}$$

$$=8.85\times10^{-12}\,F\approx 89\,pF$$

(ب) نخست اختلاف پتانسیل میان صفحه‌ها را به‌دست می‌آوریم.



$$\Delta V=-\int_d^{b+x}E_0\,ds-\int_{b+x}^{x}E\,ds-\int_x^{0}E_0\,ds$$

$$=-\int_d^{b+x}\frac{\sigma}{\varepsilon_0}ds-\int_{b+x}^{x}\frac{\sigma}{\kappa\varepsilon_0}ds-\int_x^{0}\frac{\sigma}{\varepsilon_0}ds$$

$$=-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left[b+x-d-\frac{1}{\kappa}(x-b-x)-x\right]$$

$$= -\frac{\sigma}{\varepsilon_۰}\left[b - d + \frac{b}{\kappa}\right] = \frac{q}{\varepsilon_۰ A}\left[\frac{b}{\kappa} - b + d\right]$$

$$= \frac{q}{\varepsilon_۰ A}\left[\frac{\kappa d - b(\kappa - ۱)}{\kappa}\right]$$

از آنجا ظرفیت خازن چنین می‌شود:

$$C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{q}{\dfrac{q[\kappa d - b(\kappa - ۱)]}{\varepsilon_۰ A \kappa}} = \frac{\kappa \varepsilon_۰ A}{\kappa d - b(\kappa - ۱)}$$

$$= \frac{\kappa \varepsilon_۰ A}{\kappa(d - b) + b}$$

$$= \frac{(۴٫۸)(۸٫۸۵ \times ۱۰^{-۱۲}\ \mathrm{C^۲/N\cdot m^۲})(۰٫۱۲\mathrm{m^۲})}{(۴٫۸)(۱٫۲ - ۰٫۴۰)(۱۰^{-۲}\ \mathrm{m}) + (۴٫۰ \times ۱۰^{-۳}\ \mathrm{m})}$$

$$= ۱٫۲ \times ۱۰^{-۱۰}\mathrm{F} = ۰٫۱۲\mathrm{pF}$$

(پ) چون باتری قطع شده است، بار پیش و پس از قرارداده شدن دی‌الکتریک برابر است و بنابراین داریم:

$$q = q_۰ = C_۰ V_۰ = (۸٫۸۵ \times ۱۰^{-۱۲}\ \mathrm{F})(۱۲۰\mathrm{V}) = ۱۰٫۶\mathrm{nC} \approx ۱۱\mathrm{nC}$$

(ت) میدان الکتریکی در فضای میان صفحه‌ها، با استفاده از قانون گاوس چنین می‌شود:

$$E_۰ = \frac{q}{\varepsilon_۰ A} = \frac{۱۰٫۶ \times ۱۰^{-۹}\mathrm{C}}{(۸٫۸۵ \times ۱۰^{-۱۲}\ \mathrm{C^۲/N\cdot m^۲})(۰٫۱۲\mathrm{m^۲})}$$

$$= ۱٫۰ \times ۱۰^{۴}\ \mathrm{V/m} = ۱۰\mathrm{kV/m}$$

می‌توانستیم همین نتیجه را با استفاده از $E_۰ = V/d$ نیز به دست آوریم.

(ث) میدان داخلی دی‌الکتریک از $E = E_۰/\kappa$ به‌دست می‌آید:

$$E = \frac{E_۰}{\kappa} = \frac{۱٫۰ \times ۱۰^{۴}\ \mathrm{V/m}}{۴٫۸} = ۲٫۱ \times ۱۰^{۳}\ \mathrm{V/m} = ۲٫۱\mathrm{kV/m}$$

(ج) چون بار تغییر نمی‌کند، $q_۰ = CV$ است. در نتیجه اختلاف پتانسیل بین دو صفحه چنین می‌شود:

$$V = \frac{q_۰}{C} = \frac{۱٫۰۶ \times ۱۰^{-۸}\mathrm{C}}{۱٫۲ \times ۱۰^{-۱۰}\mathrm{F}} = ۸۸\mathrm{V}$$

(توجه کنید که اگر باتری قطع نشده بود، پتانسیل ثابت و بار متغیر می‌شد).

روش دیگر چنین است:

$$V = E_۰(d - b) + Eb = (۱۰\mathrm{kV/m})(۰٫۰۱۲\mathrm{m} - ۰٫۰۰۴۰\mathrm{m}) + (۲٫۱\ \mathrm{kV/m})(۰٫۴۰ \times ۱۰^{-۳}\ \mathrm{m}) = ۸۸\mathrm{V}$$

(چ) کار انجام شده برابر است با

$$W_{\text{خارجی}} = \Delta U = \frac{q^۲}{۲}\left(\frac{۱}{C} - \frac{۱}{C_۰}\right)$$

$$= \frac{(۱۰٫۶ \times ۱۰^{-۹}\mathrm{C})^۲}{۲}\left[\frac{۱}{۸٫۸۵ \times ۱۰^{-۱۲}\mathrm{F}} - \frac{۱}{۱٫۲ \times ۱۰^{-۱۰}\mathrm{F}}\right]$$

$$\approx -۱٫۷ \times ۱۰^{-۷}\ \mathrm{J} = -۰٫۱۷\mu\mathrm{J}$$

۵۴●● صفحه‌های یک خازن تخت به مساحت سطح $۱۰۰\mathrm{cm^۲}$ به اندازه‌ی $۸٫۹ \times ۱۰^{-۷}\ \mathrm{C}$، ولی با علامت‌های مخالف باردار شده است. میدان الکتریکی در داخل ماده‌ی دی‌الکتریکی که فضای میان صفحه‌ها را پر کرده است برابر با $۱٫۴ \times ۱۰^{۶}\ \mathrm{V/m}$ است. (الف) ثابت دی‌الکتریک این ماده را محاسبه کنید. (ب) بزرگی بار القا شده روی هر سطح دی‌الکتریک را تعیین کنید.

حل (الف) از قانون گاوس در حضور دی‌الکتریک استفاده می‌کنیم:

$$\kappa \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q/\varepsilon_۰ \quad \Rightarrow \quad \kappa E A = q/\varepsilon_۰$$

در نتیجه ثابت دی‌الکتریک κ چنین می‌شود:

$$= \frac{۸٫۹ \times ۱۰^{-۷}\mathrm{C}}{(۸٫۸۵ \times ۱۰^{-۱۲}\mathrm{C^۲/N\cdot m^۲})(۱٫۴ \times ۱۰^{-۶}\ \mathrm{N/C})(۱۰۰ \times ۱۰^{-۴}\ \mathrm{m^۲})}$$

$$= ۷٫۲$$

(ب) بار القاشده، طبق معادله‌ی ۲۵-۳۵ کتاب، برابر است با

$$q' = q\left(۱ - \frac{۱}{\kappa}\right) = (۸٫۹ \times ۱۰^{-۷}\ \mathrm{C})\left(۱ - \frac{۱}{۷٫۲}\right)$$

$$= ۷٫۶ \times ۱۰^{-۷}\ \mathrm{C}$$

۵۵●● فضای میان دو پوسته‌ی کروی رسانای هم‌مرکز به شعاع‌های $b = ۱٫۷۰\mathrm{cm}$ و $a = ۱٫۲۰\mathrm{cm}$ با ماده‌ای با ثابت دی‌الکتریک $\kappa = ۲۳٫۵$ پر شده است. اختلاف پتانسیل $V = ۷۳٫۰\mathrm{V}$ بین پوسته‌های داخلی و خارجی اعمال شده است. (الف) ظرفیت این وسیله، (ب) بار آزاد q ی روی پوسته داخلی، و (پ) بار q' القا شده روی سطح پوسته‌ی داخلی را تعیین کنید.

حل (الف) خازنی کروی داریم. ظرفیت یک خازن کروی طبق معادله‌ی ۲۵-۱۷ کتاب برابر است با

$$C_۰ = ۴\pi\varepsilon_۰\left(\frac{ab}{b - a}\right)$$

چون فضای میان صفحه‌ها با دی‌الکتریک پر شده است، این ظرفیت با عامل κ بزرگ‌تر می‌شود. در نتیجه، ظرفیت جدید در یکاهای SI چنین می‌شود:

$$C = (۴\pi\varepsilon_۰)\kappa\left(\frac{ab}{b - a}\right) = \frac{۲۳٫۵}{۸٫۹۹ \times ۱۰^{۹}}\left(\frac{(۰٫۰۱۲۰)(۰٫۰۱۷۰)}{۰٫۰۱۷۰ - ۰٫۰۱۲۰}\right)$$

$$= ۰٫۱۰۷\mathrm{nF}$$

(ب) چون پتانسیل را قطع نکرده‌ایم، بار روی صفحه مثبت برابر است با

$$q = CV = (۰٫۱۰۷ \times ۱۰^{-۹}\ \mathrm{F})(۷۳٫۰\mathrm{V}) = ۷٫۷۹\mathrm{nC}$$

(پ) بار القا شده طبق معادله‌ی ۲۵-۳۵ با بار آزاد رابطه دارد. از آنجا خواهیم داشت:

Scanned by CamScanner

فصل بیست و ششم

جریان و مقاومت الکتریکی

بخش ۲۶-۱ جریان الکتریکی

۱۰ در مدت $4.0\,\mathrm{min}$، جریان $5.0\,\mathrm{A}$ در یک سیم برقرار می‌شود. از هر مقطع عرضی این سیم (الف) چند کولن و (ب) چند الکترون می‌گذرد؟

حل (الف) باری که از هر مقطع مقاومت عبور می‌کند حاصل‌ضرب جریان در زمان است. چون $4.0\,\mathrm{min} = (4.0\,\mathrm{min})(60\,\mathrm{s/min}) = 240\,\mathrm{s}$ است، بار چنین می‌شود:

$$q = it = (5.0\,\mathrm{A})(240\,\mathrm{s}) = 1.2\times10^{3}\,\mathrm{C}$$

(ب) تعداد الکترون N با $q = Ne$ داده می‌شود که e بزرگی بار هر الکترون است. بنابراین خواهیم داشت:

$$N = q/e = (1200\,\mathrm{C})/(1.60\times10^{-19}\,\mathrm{C}) = 7.5\times10^{21}$$

۲۰۰ یک کره رسانای منزوی، شعاعی برابر $10\,\mathrm{cm}$ دارد. سیمی جریان $1.0000020\,\mathrm{A}$ را به این کره می‌رساند. سیم دیگری جریان $1.0000000\,\mathrm{A}$ را از آن خارج می‌کند. چقدر زمان می‌برد تا پتانسیل این کره به اندازه‌ی $1000\,\mathrm{V}$ افزایش یابد؟

حل فرض کنید بار روی کره در بازه‌ی زمانی Δt به‌اندازه‌ی Δq افزایش می‌یابد. بنابراین در این بازه‌ی زمانی، پتانسیل کره به اندازه‌ی مقدار زیر افزایش می‌یابد:

$$\Delta V = \frac{\Delta q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

که در آن r شعاع کره است. این بدین معنی است که

$$\Delta q = 4\pi\varepsilon_0 r\Delta V$$

از طرفی $q = it$ است و از آنجا $i\Delta q = (i_{\text{ورودی}} - i_{\text{خروجی}})\Delta t$ می‌شود که در آن $i_{\text{ورودی}}$ جریان ورودی به کره و $i_{\text{خروجی}}$ جریان خروجی از آن است. بنابراین Δt چنین می‌شود:

$$\Delta t = \frac{\Delta q}{i_{\text{ورودی}} - i_{\text{خروجی}}} = \frac{4\pi\varepsilon_0 r\Delta V}{i_{\text{ورودی}} - i_{\text{خروجی}}}$$

$$= \frac{(0.10\,\mathrm{m})(1000\,\mathrm{V})}{(8.99\times10^{9}\,\mathrm{F/m})(1.0000020\,\mathrm{A} - 1.0000000\,\mathrm{A})}$$

$$= 5.6\times10^{-3}\,\mathrm{s}$$

۳۰۰ تسمه‌ی بارداری، به پهنای $50\,\mathrm{cm}$ در بین یک چشمه‌ی بار و یک کره با $30\,\mathrm{m/s}$ در حرکت است. این تسمه بار را با آهنگ $100\,\mu\mathrm{A}$ به داخل کره انتقال می‌دهد. چگالی سطحی بار روی تسمه را محاسبه کنید.

حل چگالی سطحی بار با رابطه‌ی $\sigma = q/A$ داده می‌شود. فرض کنید a پهنای تسمه و x طول متغیر آن است. بنابراین $\sigma = q/ax$ می‌شد و از آنجا خواهیم داشت:

$$dq = \sigma a\,dx \;\Rightarrow\; \frac{dq}{dt} = \sigma a\frac{dx}{dt} = \sigma av$$

با توجه به اینکه $dq/dt = i$ است، σ چنین می‌شود

$$\sigma = \frac{i}{av} = \frac{100\times10^{-6}\,\mathrm{A}}{(50\times10^{-2}\,\mathrm{m})(30\,\mathrm{m/s})} = 6.7\times10^{-6}\,\mathrm{C/m^2}$$

بخش ۲۶-۲ چگالی جریان

۴۰ بخشی از *نظامنامه‌ی الکتریکی ملی*[1] (در ایالات متحده) که بیشینه‌ی جریان‌های مجاز برای سیم‌های مسی عایق‌بندی شده با قطرهای مختلف را مشخص می‌کند، در جدول زیر ارائه شده است. چگالی جریان مجاز را بر حسب تابعی از قطر سیم رسم کنید. کدام نمره‌ی سیم دارای بیشترین چگالی جریان مجاز است؟ ("نمره" یک سیم راهی برای شناختن قطر سیم‌هاست، و $1\,\mathrm{mil} = 10^{-3}\,\mathrm{in}$.)

نمره‌ی سیم	۴	۶	۸	۱۰	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸
قطر، میل	۲۰۴	۱۶۲	۱۲۹	۱۰۲	۸۱	۶۴	۵۱	۴۰
جریان مجاز، A	۷۰	۵۰	۳۵	۲۵	۲۰	۱۵	۶	۳

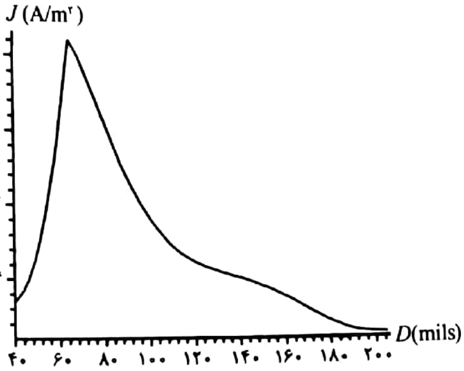
حل بزرگی بردار چگالی جریان را در یکاهای SI به‌دست می‌آوریم. به این منظور مقادیر قطر را که برحسب میل هستند، نخست با تقسیم بر ۱۰۰۰ به اینچ تبدیل کرده و سپس با ضرب در ۰٫۰۲۵۴ آنها را به متر تبدیل می‌کنیم. بر فرض، قطر سیم نمره‌ی ۱۴ برابر با $D = 64\,\mathrm{mil} = 0.0016\,\mathrm{m}$ است و با توجه به اینکه داریم

$$J = \frac{i}{A} = \frac{i}{\pi R^{2}} = \frac{4i}{\pi D^{2}}$$

[1] National Electric Code

Scanned by CamScanner

چگالی جریان اتمی آن $J=7{,}2\times10^{6}\ A/m^2$ می‌شود. سایر مقادیر چگالی جریان نیز به همین ترتیب به‌دست می‌آیند و اگر بررسی کنیم بیشینه‌ی چگالی جریان ایمنی مربوط به همین نمره می‌شود. در پایین، نمودار J در یکاهای SI برحسب تابعی از قطر در یکاهای میل رسم شده است.



۵● WWW باریکه‌ای شامل $2{,}0\times10^{8}$ یون مثبت دوبار یونیده در هر سانتی‌مترمکعب است، که همگی با تندی $1{,}0\times10^{5}\ m/s$ رو به سمت شمال در حرکت‌اند. (الف) بزرگی و (ب) جهت چگالی جریان $\vec{J}$ چیست؟ (پ) برای محاسبه‌ی جریان کلِ i در این باریکه‌ی یونی، به چه کمیت دیگری نیاز دارید؟

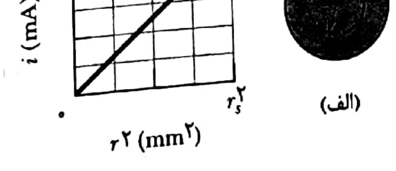
حل (الف) بزرگی چگالی جریان با $J=nqv_d$ داده می‌شود که n تعداد ذره‌ها در واحد حجم، q بار روی هر ذره، و v_d تندی (سوق) رانشی ذره‌هاست. با توجه به اینکه، $n=2{,}0\times10^{8}/cm^3=2{,}0\times10^{14}\ m^{-3}$، $q=2e$ و $v_d=1{,}0\times10^{5}\ m/s$ است، خواهیم داشت:

$$J=(2{,}0\times10^{14}\ m^{-3})(2\times1{,}60\times10^{-19}\ C)(1{,}0\times10^{5}\ m/s)$$
$$=6{,}4\ A/m^2$$

(ب) چون ذره‌ها باردار مثبت‌اند، چگالی انرژی در همان جهت حرکت آنها، یعنی به سوی شمال است. زیرا جهت J طبق تعریف در جهت حرکت بارهای مثبت است.

(پ) خیر، نمی‌توان محاسبه کرد. زیرا طبق تعریف $i=JA$ است و چون سطح مقطع باریکه را نمی‌شناسیم، i را نمی‌توانیم محاسبه کنیم.

۶● یک سیم استوانه‌ای معین حامل جریان است. دایره‌ای به شعاع r حول محور مرکزی آن در شکل ۲۶-۲۴ الف رسم می‌کنیم تا جریان i ی داخل این دایره را تعیین کنیم. شکل ۲۶-۲۴ ب جریان i را بر حسب r^2 نشان می‌دهد. محور قائم با $i_s=4{,}0\ mA$ و محور افقی با $r_s^2=4{,}0\ mm^2$ مقیاس‌بندی شده است. (الف) آیا چگالی جریان یکنواخت است؟ (ب) اگر بله، بزرگی آن چقدر است؟



شکل ۲۶-۲۴ مسئله‌ی ۶

حل (الف) مساحت دایره متناسب با r^2 است. بنابراین محور افقی نمودار ب همان مساحت سطح سیم، به جز عامل π است. پس، نتیجه می‌گیریم که جریان به‌طور خطی با A تغییر می‌کند و بنابراین i/A مقدار ثابتی است. بنابراین، چگالی جریان یکنواخت است.

(ب) از روی نمودار در می‌یابیم که در $r^2=4{,}0\ mm^2$، جریان $i=5{,}0\ mA$ است. بنابراین بزرگی چگالی جریان برابر است با

$$J=\frac{i}{\pi r^2}=\frac{0{,}0050\ A}{\pi(40\times10^{-6}\ m^2)}=4{,}0\times10^{3}\ A/m^2$$

۷● فیوز یک مدار الکتریکی، سیمی است که چنان طراحی شده که اگر جریان عبوری آن از یک مقدار از پیش تعیین شده بیشتر شود، ذوب شده و در نتیجه مدار باز می‌شود. فرض کنید ماده‌ای به کار رفته در فیوز وقتی ذوب می‌شود که چگالی جریان عبوری به $440\ A/cm^2$ افزایش یابد. قطر یک سیم استوانه‌ای که باید برای محدود ساختن جریان به $0{,}50\ A$ استفاده شود، چقدر است؟

حل سطح مقطع سیم با $A=\pi r^2$ داده می‌شود که r شعاع (نصف ضخامت آن) است. بزرگی بردار چگالی جریان $J=i/A=i/\pi r^2$ است و بنابراین داریم:

$$r=\sqrt{\frac{i}{\pi J}}=\sqrt{\frac{0{,}50\ A}{\pi(440\times10^{-2}\ A/m^2)}}=1{,}9\times10^{-4}\ m$$

پس، قطر سیم $d=2r=2(1{,}9\times10^{-4}\ m)=3{,}8\times10^{-2}\ m=0{,}38\ mm$

۸● جریان کوچک ولی قابل اندازه‌گیری $1{,}2\times10^{-10}\ A$ در سیم مسی به قطر $2{,}5\ mm$ جریان دارد. تعداد حامل‌های بار بر واحد حجم $8{,}49\times10^{28}\ m^{-3}$ است. با فرض آنکه جریان یکنواخت باشد (الف) چگالی جریان و (ب) تندی سوق الکترون را محاسبه کنید.

حل (الف) بزرگی بردار چگالی جریان برابر است با

$$J=\frac{i}{A}=\frac{i}{\pi d^2/4}=\frac{4(1{,}2\times10^{-10}A)}{\pi(2{,}5\times10^{-3}\ m)^2}=2{,}4\times10^{-5}\ A/m^2$$

(ب) تندی سوق الکترون‌ها چنین می‌شود

$$v_d=\frac{J}{ne}=\frac{2{,}4\times10^{-5}\ A/m^2}{(8{,}49\times10^{28}/m^3)(1{,}60\times10^{-19}C)}$$
$$=1{,}8\times10^{-15}\ m/s$$

۹●● بزرگی $J(r)$ چگالی جریان در یک سیم استوانه‌ای معین بر حسب تابعی از فاصله‌ی شعاعی از مرکز مقطع سیم به صورت $J(r)=Br$ داده شده است، که r بر حسب متر، J بر حسب آمپر بر مترمربع، و $B=2{,}00\times10^{5}\ A/m^3$ است. این تابع تا شعاع $2{,}00\ mm$ بیرون از سیم به‌کار می‌آید. چه جریانی در پهنای یک حلقه‌ی نازک هم‌مرکز با سیم وجود دارد، در صورتی که پهنای شعاعی این حلقه $10{,}0\ \mu m$ و در فاصله‌ی شعاعی $1{,}20\ mm$ باشد؟

Scanned by CamScanner

حل توجه کنید که پهنای شعاعی $\Delta r = ۱۰\,\mu m$ در مقایسه با فاصله‌ی شعاعی $\Delta r = ۱٫۲۰\,mm$ به حدّ کافی کوچک است و می‌توانیم تقریب زیر را بپذیریم:

$$I = \int J\,dA = \int (Br)(۲\pi r)\,dr = Br۲\pi r\Delta r$$

بنابراین، جریان محصور در پهنای حلقه چنین می‌شود:

$$I = ۲\pi B r^{۲}\Delta r$$
$$= ۲\pi(۲٫۰۰\times ۱۰^{۵}\,A/m^{۲})(۱٫۲۰\times ۱۰^{-۳}\,m)^{۲}(۱۰\times ۱۰^{-۶}\,m)$$
$$= ۱۸٫۱\,\mu A$$

۱۰ ●● بزرگی J ی چگالی جریان در یک سیم معین با مقطعی دایره‌ای به شعاع $R = ۲٫۰۰\,mm$ با $J = (۳٫۰۰\times ۱۰^{۸})r^{۲}$ داده می‌شود که J بر حسب آمپر بر مترمربع و فاصله‌ی شعاعی r بر حسب متر است. جریان عبوری از بخش بیرونی که بین $r = ۰٫۹۰۰R$ و $r = R$ محدود شده، چقدر است؟

حل فرض کنید $\vec{J}$ در راستای سیم (بدون شارش شعاعی) باشد. آنگاه با استفاده از معادله‌ی ۲۶-۴ خواهیم داشت

$$i = \int \vec{J}\cdot d\vec{A} = \int J\,dA = \int_{۰٫۹۰۰R}^{R} (kr^{۲})۲\pi r\,dr$$
$$= \frac{۱}{۲}k\pi(R^{۴} - ۰٫۶۵۶R^{۴})$$

که در آن $k = ۳٫۰۰\times ۱۰^{۸}$ در یکاهای SI است. بنابراین اگر $R = ۰٫۰۰۲۰۰\,m$ باشد، از آنجا به $i = ۲٫۵۹\times ۱۰^{-۳}\,A = ۲٫۵۹\,mA$ می‌رسیم.

۱۱ ●● جریان عبوری از سیمی به شعاع $R = ۳٫۴۰\,mm$ چقدر است درصورتی که بزرگی چگالی جریان با (الف) $J_a = J_۰ r/R$ و (ب) $J_b = J_۰(۱-r/R)$ داده شود، که در آن r فاصله‌ی شعاعی و $J_۰ = ۵٫۵۰\times ۱۰^{۴}\,A/m^{۲}$ است. (پ) چه عاملی چگالی جریان را در نزدیکی سطح سیم بیشینه می‌کند؟

حل (الف) جریان حاصل از این چگالی جریان یکنواخت، چنین می‌شود:

$$i = \int_{\text{استوانه}} J_a\,dA = \frac{J_۰}{R}\int_{۰}^{R} r(۲\pi r\,dr) = \frac{۲}{۳}\pi R^{۲}J_۰$$
$$= \frac{۲}{۳}\pi(۳٫۴۰\times ۱۰^{-۳}\,m)^{۲}(۵٫۵۰\times ۱۰^{۴}\,A/m^{۲}) = ۱٫۳۳\,A$$

(ب) در این حالت داریم

$$i = \int_{\text{استوانه}} J_b\,dA = \int_{۰}^{R} J_۰\left(۱-\frac{r}{R}\right)۲\pi r\,dr$$
$$= \int_{۰}^{R} ۲\pi J_۰ r\,dr - \int_{۰}^{R} ۲\pi J_۰\frac{r^{۲}}{R}\,dr$$
$$= \pi J_۰ r^{۲}\Big|_{۰}^{R} - \frac{۲\pi J_۰}{۳R}r^{۳}\Big|_{۰}^{R} = \pi J_۰ R^{۲} - \frac{۲\pi}{۳}J_۰ R^{۲}$$
$$= \frac{\pi R^{۲}}{۳}J_۰ = \frac{\pi}{۳}(۳٫۴۰\times ۱۰^{-۳}\,m)^{۲}(۵٫۵۰\times ۱۰^{۴}\,A/m^{۲})$$
$$= ۰٫۶۶۶\,A$$

(پ) اختلاف نتیجه‌ی این دو مقدار بالا به این برمی‌گردد که J_b در نزدیک مرکز استوانه (که در آنجا مساحت سطح کوچک‌تر است) بزرگ‌تر است. ولی جریان عبوری و در نتیجه چگالی جریان میانگین عبوری از سطح مقطع سیم برای J_b کوچک‌تر است. پس J_A، چگالی جریان را در نزدیکی سطح سیم بیشینه می‌کند.

۱۲ ●● در نزدیکی سطح زمین، چگالی پروتون‌ها در باد خورشیدی (جریانی از ذرات حاصل از خورشید) $۸٫۷۰\,cm^{-۳}$، و تندی آنها $۴۷۰\,km/s$ است. (الف) چگالی جریان این پروتون‌ها را به‌دست آورید. (ب) اگر میدان مغناطیسی کره زمین این پروتون‌ها را منحرف نکند، چه جریان کلی به سطح زمین می‌رسد؟

حل (الف) چون $۱\,cm^{۳} = ۱۰^{-۶}\,m^{۳}$ است، بزرگی بردار چگالی جریان برابر است با

$$J = nev = \left(\frac{۸٫۷۰}{۱۰^{-۶}\,m^{۳}}\right)(۱٫۶۰\times ۱۰^{-۱۹}\,C)(۴۷۰\times ۱۰^{۳}\,m/s)$$
$$= ۶٫۵۴\times ۱۰^{-۷}\,A/m^{۲}$$

(ب) گرچه مساحت سطح کل زمین $۴\pi R_E^{۲}$ است، ولی مساحتی که باید در محاسبه‌ی جریان دریافتی زمین محاسبه شود، سطح مقطعی است که باریکه با آن برخورد می‌کند. در واقع باریکه با هدفی با مساحت دایره‌ای $\pi R_E^{۲}$ مواجه می‌شود. بنابراین خواهیم داشت:

$$i = AJ = \pi R_E^{۲}J = \pi(۶٫۳۷\times ۱۰^{۶}\,m)^{۲}(۶٫۵۴\times ۱۰^{-۷}\,A/m^{۲})$$
$$= ۸٫۳۴\times ۱۰^{۷}\,A$$

۱۳ ●● GO ILW چقدر طول می‌کشد تا الکترون‌ها از باتری یک اتومبیل به موتور استارت آن برسند؟ فرض کنید جریان $۳۰۰\,A$ است و الکترون‌ها از طریق یک سیم مسی با سطح مقطع $۰٫۲۱\,cm^{۲}$ و طول $۰٫۸۵\,m$ حرکت می‌کنند. تعداد حامل‌های بار بر واحد حجم $۸٫۴۹\times ۱۰^{۲۸}\,m^{-۳}$ است.

حل از $v_d = J/ne$ که در آن $J = i/A$ است، استفاده می‌کنیم. بنابراین داریم

$$t = \frac{L}{v_d} = \frac{L}{i/Ane} = \frac{LAne}{i}$$
$$= \frac{(۰٫۸۵\,m)(۰٫۲۱\times ۱۰^{-۴}\,m^{۲})(۸٫۴۹\times ۱۰^{۲۸}/m^{۳})(۱٫۶۰\times ۱۰^{-۱۹}\,C)}{۳۰۰\,A}$$
$$= ۸٫۱\times ۱۰^{۲}\,s \approx ۱۳\,min$$

بخش ۲۶-۳ مقاومت و مقاومت ویژه

۱۴ ● اگر جریانی به کوچکی $۵۰\,mA$ از نزدیکی قلب انسان عبور کند، شخص ممکن است بر اثر برق‌گرفتگی کشته شود. یک برقکار که با دستان عرق‌کرده کار می‌کند، تماسی کامل با دو رسانایی پیدا می‌کند که هر یک را در یکی از دستان خود نگه داشته است اگر مقاومت او $۲۰۰۰\,\Omega$ باشد، چه ولتاژی ممکن است به مرگ او بیانجامد؟

Scanned by CamScanner

حل اختلاف پتانسیل V و جریان i با $V=iR$ به هم مربوطند. بنابراین ولتاژ مرگبار چنین می‌شود:

$$V=(50\times10^{-3}\,A)(2000\,\Omega)=100\,V$$

۱۵● پیچه‌ای از ۲۵۰ دور سیم مسی عایق‌بندی شده‌ی نمره‌ی ۱۶ (قطر $=1{,}3\,mm$) ساخته شده که در یک لایه روی استوانه‌ای به شعاع $12\,cm$ پیچیده شده است. مقاومت این پیچه چقدر است؟ ضخامت عایق روی سیم را نادیده بگیرید. (از جدول ۲۶-۱ استفاده کنید.)

حل مقاومت پیچه با $R=\rho L/A$ داده می‌شود که L طول سیم، ρ مقاومت ویژه‌ی مس، و A مساحت مقطع سیم است. چون طول هر دور برابر با $2\pi r$ است، خواهیم داشت:

$$L=n2\pi r=(250)(2\pi)(0{,}12\,m)=60\pi\,m$$

اگر r_w شعاع خود سیم باشد، آنگاه مساحت مقطع سیم

$$A=\pi r_w^2=\pi(0{,}65\times10^{-3}\,m)^2=1{,}3\times10^{-6}\,m^2$$

می‌شود. مقاومت ویژه مس را نیز از جدول ۲۶-۱ کتاب مبانی فیزیک می‌شناسیم: $1{,}69\times10^{-8}\,\Omega\cdot m$. در نتیجه R چنین می‌شود:

$$R=\frac{\rho L}{A}=\frac{(1{,}69\times10^{-8}\,\Omega\cdot m)(60\pi\,m)}{1{,}3\times10^{-6}\,m^2}=2{,}4\,\Omega$$

۱۶● از مس و آلومینیوم در خطوط انتقال ولتاژ بالا که باید حامل جریان $60{,}0\,A$ باشند، استفاده می‌شود. مقاومت بر واحد طول $0{,}150\,\Omega/km$ است. چگالی مس و آلومینیوم به‌ترتیب برابر با $8960\,kg/m^3$ و $2600\,kg/m^3$ است. (الف) بزرگی J ی چگالی جریان و (ب) جرم بر واحد طول λ ی یک کابل مسی و (پ) J و (ت) λ برای یک کابل آلومینیومی را محاسبه کنید.

حل (الف) از $J=i/A$ استفاده می‌کنیم. مساحت مقطع A را از $R=\rho\frac{L}{A}$ به‌دست می‌آوریم. در نتیجه J برای کابل مسی چنین می‌شود:

$$J_{cu}=\frac{i\left(\frac{R}{L}\right)}{\rho_{cu}}=\frac{(60{,}0\,A)(0{,}150\times10^{-3}\,\Omega/m)}{1{,}69\times10^{-8}\,\Omega\cdot m}$$

$$=5{,}32\times10^{5}\,A/m^2$$

(ب) می‌دانیم $m=\rho_m V$ می‌شود که ρ_m چگالی جرمی و V حجم کابل است. V را می‌توانیم به صورت AL بنویسیم و از آنجا $m/L=\rho_m$ می‌شود. بنابراین برای کابل مسی خواهیم داشت:

$$(m/L)_{cu}=(\rho_m A)_{cu}=(\rho_{m,cu})\left(\frac{\rho_{cu}}{R/L}\right)=\frac{\rho_{m,cu}\rho_{cu}}{R/L}$$

توجه کنید در رابطه‌ی بالا $\rho_{m,cu}$ چگالی جرمی مس و ρ_{cu} مقاومت ویژه‌ی مس است و بنابراین داریم:

$$(m/L)_{cu}=\frac{(8960\,kg/m^3)(1{,}69\times10^{-8}\,\Omega m)}{0{,}150\times10^{-3}\,\Omega/m}=1{,}01\,kg/m$$

(پ) به همان ترتیب J برای کابل آلومینیومی چنین می‌شود

$$J_{Al}=\frac{j\left(\frac{R}{L}\right)}{\rho_{Al}}=\frac{(60{,}0\,A)(0{,}150\times10^{-3}\,\Omega/m)}{2{,}75\times10^{-8}\,\Omega/m}$$

$$=3{,}27\times10^{5}\,A/m^2$$

(ث) به همان ترتیب جرم هر متر کابل آلومینیوم چنین می‌شود

$$(m/L)_{Al}=\frac{\rho_{m,Al}\rho_{Al}}{R/L}$$

$$=\frac{(2700\,kg/m^3)(2{,}75\times10^{5}\,A/m)}{0{,}150\times10^{-3}\,\Omega/m}$$

$$=0{,}495\,kg/m$$

۱۷● سیمی از جنس نیکروم (آلیاژی از نیکل ـ کروم ـ آهن که معمولاً در المنت‌های وسایل گرم‌کننده به‌کار می‌رود) دارای طول $1{,}0\,m$ و سطح مقطع $1{,}0\,mm^2$ است. این سیم حامل جریان $4{,}0\,A$ است هرگاه به دو سر آن اختلاف پتانسیل $2{,}0\,V$ اعمال شود. رسانندگی σ ی نیکروم را محاسبه کنید.

حل رسانندگی نیکروم چنین می‌شود:

$$\sigma=\frac{1}{\rho}=\frac{L}{RA}=\frac{L}{(V/i)A}=\frac{Li}{VA}$$

$$=\frac{(1{,}0\,m)(4{,}0\,A)}{(2{,}0\,V)(1{,}0\times10^{-6}\,m^2)}=2{,}0\times10^{6}(\Omega\cdot m)^{-1}$$

۱۸● سیمی به طول $4{,}00\,m$ و قطر $6{,}00\,mm$ دارای مقاومت $15{,}0\,m\Omega$ است. اختلاف پتانسیل $23{,}0\,V$ به دو سر این سیم اعمال می‌شود. (الف) جریان سیم چقدر است؟ (ب) بزرگی چگالی جریان چقدر است؟ (پ) مقاومت ویژه‌ی ماده‌ی سازنده‌ی سیم را محاسبه کنید. (ت) با استفاده از جدول ۲۶-۱، جنس آن ماده را تعیین کنید.

حل (الف) جریان در سیم برابر است با

$$i=\frac{V}{R}=\frac{23{,}0\,V}{15{,}0\times10^{-3}\,\Omega}=1{,}53\times10^{3}\,A$$

(ب) سطح مقطع سیم $A=\pi r^2=\pi D^2/4$ است که D قطر سیم است. بنابراین بزرگی بردار چگالی جریان چنین می‌شود

$$J=\frac{i}{A}=\frac{4i}{\pi D^2}=\frac{4(1{,}53\times10^{-3}\,A)}{\pi(6{,}00\times10^{-3}\,m)^2}=5{,}41\times10^{7}\,A/m^2$$

(پ) مقاومت ویژه برابر است با

$$\rho=RA/L=(15{,}0\times10^{-3}\,\Omega)(\pi)(6{,}00\times10^{3}\,m)^2/[4(4{,}00\,m)]$$

$$=10{,}6\times10^{-8}\,\Omega\cdot m$$

(ت) از جدول ۲۶-۱ کتاب درمی‌یابیم که ماده از جنس پلاتین است.

Scanned by CamScanner

۱۹○ مقاومت ویژه‌ی سیمی به قطر ۱٫۰mm، طول ۲٫۰m، و مقاومت ۵۰mΩ چقدر است؟

حل مقاومت سیم با $R=\rho L/A$ داده می‌شود که ρ مقاومت ویژه، L طول سیم و A سطح مقطع آن است. در این حالت داریم

$$A=\pi r^۲=\pi(۰٫۵۰\times۱۰^{-۳}\,\text{m})^۲=۷٫۸۵\times۱۰^{-۷}\,\text{m}^۲$$

و از آنجا ρ چنین می‌شود

$$\rho=\frac{RA}{L}=\frac{(۵۰\times۱۰^{-۳}\,\Omega)(۷٫۸۵\times۱۰^{-۷}\,\text{m}^۲)}{۲٫۰\,\text{m}}=۲٫۰\times۱۰^{-۸}\,\Omega\cdot\text{m}$$

۲۰○ مقاومت سیم معینی برابر با R است. مقاومت سیم دیگری که از همان جنس ساخته شده، ولی طول و قطر آن نصف شده باشد، چقدر است؟

حل قطر سیم را با D نمایش می‌دهیم. با توجه به اینکه $R\propto L/A$ و $A=\pi D^۲/۴$ است، مقاومت سیم دوم با رابطه‌ی زیر داده می‌شود:

$$R_۲=R_۱\left(\frac{A_۱}{A_۲}\right)\left(\frac{L_۲}{L_۱}\right)=R\left(\frac{D_۱}{D_۲}\right)^۲\left(\frac{L_۲}{L_۱}\right)$$

$$=R(۲)^۲\left(\frac{۱}{۲}\right)=۲R$$

۲۱○○ ILW لامپ یک چراغ قوه‌ی معمولی در ۰٫۳۰A و ۲٫۹V (مقادیر جریان و ولتاژ در شرایط کاری) عمل می‌کند. اگر مقاومت رشته‌ی تنگستنی این لامپ در دمای اتاق (۲۰°C) برابر با ۱٫۱Ω باشد، دمای این رشته وقتی که لامپ روشن است، چقدر می‌شود؟

حل با توجه به اینکه ضرب انبساط خطی تنگستن در کتاب موجود نیست، بنابراین به نظر می‌رسد که باید از انبساط طولی و سطحی رشته‌ی تنگستن چشم‌پوشی کنیم و از رابطه‌ی تقریبی $R=R_۰(۱+\alpha\Delta T)$ استفاده کنیم. از طرفی در دمای کاری T داریم:

$$R=\frac{V}{i}=\frac{۲٫۹\,\text{V}}{۰٫۳۰\,\text{A}}=۹٫۶۷\,\Omega$$

و آنگاه برای دمای T خواهیم داشت

$$T=T_۰+\frac{۱}{\alpha}\left(\frac{R}{R_۰}-۱\right)$$

$$=۲۰^\circ\text{C}+\left(\frac{۱}{۴٫۵\times۱۰^{-۳}/^\circ\text{C}}\right)\left(\frac{۹٫۶۷\,\Omega}{۱٫۱\,\Omega}-۱\right)$$

$$\approx۱٫۸\times۱۰^{۳}\,^\circ\text{C}$$

که بیش از ۲۰۰۰K می‌شود.

۲۲○○ *بادبادک‌بازی در حین توفان.* این افسانه که بنیامین فرانکلین یک بادبادک را در حین یک توفان هوا کرده است صرفاً یک افسانه است، چرا که او نه احمق بود و نه می‌خواست خودکشی کند. فرض کنید نخ [سیمی] بادبادک به شعاع ۲٫۰۰mm مستقیماً تا ارتفاع ۰٫۸۰۰km رو به بالا امتداد یابد و با لایه‌ای ۰٫۵۰۰ میلی‌متری از آب به مقاومت ویژه‌ی ۱۵۰Ω·m پوشیده شود. اگر اختلاف پتانسیل بین دو سر نخ برابر با ۱۶۰MV باشد، جریان عبوری از لایه‌ی آب چقدر است؟ خطر، ناشی از این جریان نیست، بلکه ناشی از احتمال برخورد آذرخش به نخ است که می‌تواند جریانی به بزرگی ۵۰۰۰۰۰A داشته باشد (که مقداری بسیار بیشتر از آن است که صرفاً کشنده باشد.)

حل طبق فرض، شعاع نخ بادبادک برابر $r=۲٫۰۰\text{mm}$ و ضخامت لایه‌ی آبی که روی آن را پوشانده برابر $t=۰٫۵۰۰\text{mm}$ است. در نتیجه مساحت مقطع لایه‌ی آب برابر است با

$$A=\pi\left[(r+t)^۲-r^۲\right]$$

$$=\pi\left[(۲٫۵۰\times۱۰^{-۳}\,\text{m})^۲-(۲٫۰۰\times۱۰^{-۳}\,\text{m})^۲\right]$$

$$=۷٫۰۷\times۱۰^{-۶}\,\text{m}^۲$$

آنگاه با استفاده از معادله‌ی ۲۶-۱۶ کتاب، مقاومت نخ خیس چنین می‌شود

$$R=\frac{\rho L}{A}=\frac{(۱٫۵۰\,\Omega\cdot\text{m})(۸۰۰\,\text{m})}{۷٫۰۷\times۱۰^{-۶}\,\text{m}^۲}$$

$$=۱٫۷۰\times۱۰^{۱۰}\,\Omega$$

بنابراین جریان عبوری از لایه‌ی آب برابر است با

$$i=\frac{V}{R}=\frac{۱٫۶۰\times۱۰^{-۸}\,\text{V}}{۱٫۷۰\times۱۰^{۱۰}\,\Omega}$$

$$=۹٫۴۲\times۱۰^{-۳}\,\text{A}=۹٫۴۲\,\text{mA}$$

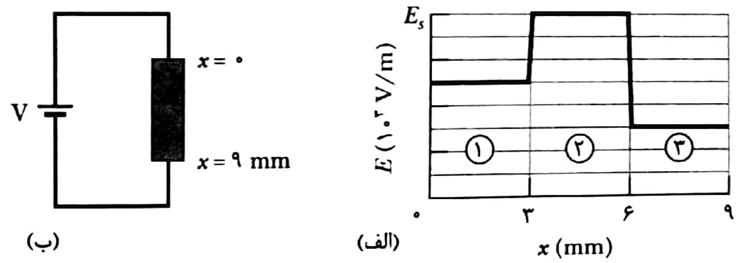
۲۳○○ هرگاه اختلاف پتانسیل ۱۱۵V به دو سر سیمی به طول ۱۰m و شعاع ۰٫۱۰mm اعمال شود، بزرگی چگالی جریان برابر با $۱٫۴\times۱۰^۴\,\text{A/m}^۲$ می‌شود. مقاومت ویژه‌ی این سیم را به‌دست آورید.

حل از رابطه‌ی $J=E/\rho$ استفاده می‌کنیم که E بزرگی میدان الکتریکی یکنواخت در سیم، J بزرگی چگالی جریان و ρ مقاومت ویژه‌ی ماده است. میدان الکتریکی با $E=V/L$ داده می‌شود که V اختلاف پتانسیل دو سر سیم و L طول سیم است. بنابراین $J=V/L\rho$ می‌شود و از آنجا خواهیم داشت:

$$\rho=\frac{V}{LJ}=\frac{۱۱۵\,\text{V}}{(۱۰\,\text{m})(۱٫۴\times۱۰^۴\,\text{A/m}^۲)}=۸٫۲\times۱۰^{-۴}\,\Omega\cdot\text{m}$$

۲۴○○ GO شکل ۲۶-۲۵ الف بزرگی $E(x)$ میدان‌های الکتریکی‌ای را نشان می‌دهد که توسط یک باتری در میله‌ی مقاوم الکتریکی‌ای به طول ۹٫۰۰mm ایجاد شده‌اند (شکل ۲۶-۲۵ ب). محور قائم با $E_s=۴٫۰۰\times۱۰^۳\,\text{V/m}$ مقیاس‌بندی شده است. این میله از سه بخش با جنس‌های یکسان ولی شعاع‌های مختلف تشکیل شده است. (نمودار طرح‌وار شکل ۲۶-۲۵ ب این اختلاف شعاع‌ها را مشخص نمی‌کند.) شعاع بخش ۳ برابر با ۲٫۰۰mm است. شعاع (الف) بخش ۱ و (ب) بخش ۲ چقدر است؟

Scanned by CamScanner



شکل ۲۶-۲۵ مسئله‌ی ۲۴

حل (الف) چون جنس هر سه ماده یکی است، مقاومت ویژه‌ی هر سه یکسان است و بنابراین میدان الکتریکی در میله‌های مختلف، با توجه به معادله‌ی ۲۶-۱۱ ($\vec{E}=\rho\vec{J}$) مستقیماً متناسب با چگالی‌های جریان آنهاست. بنابراین طبق نمودار الف نسبت $J_1/J_2/J_3$ به‌صورت ۲٫۵۰/۴٫۰۰/۱٫۵۰ درمی‌آید. از طرفی چون میله‌ها به طور متوالی بسته شده‌اند، جریان‌های آنها باید با هم برابر باشد. بنابراین داریم:

$$J_1A_1=J_3A_3\ ,\ J_2A_2=J_3A_3$$

چون $A=\pi r^2$ است، این معادله‌ها با توجه به چگالی‌های جریان که پیشتر معرفی کردیم، چنین به‌دست می‌دهند

$$4.00r_2^2=1.50r_3^2\ ,\ 2.50r_1^2=1.50r_3^2$$

بنابراین به‌ازای $r_3=2.00\,\mathrm{mm}$، رابطه‌ی آخر به $r_1=1.55\,\mathrm{mm}$ می‌انجامد.

۲۵●● ILW سیمی با مقاومت $6.0\,\Omega$ را با عبور از یک دستگاه حدیده طوری می‌کشند که طول جدید آن سه برابر طول اولیه شود. با فرض آنکه مقاومت ویژه و چگالی سیم تغییر نکند، مقاومت سیم بلندتر را پیدا کنید.

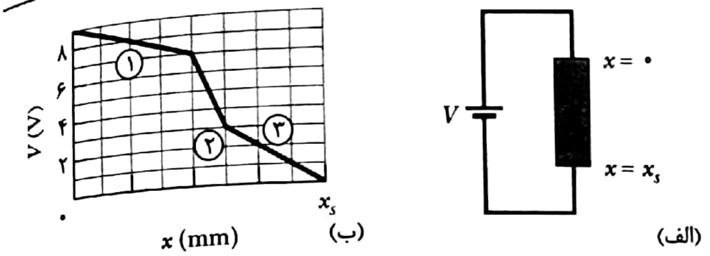
حل با توجه به اینکه چگالی ماده تغییر نمی‌کند، حجم سیم ثابت می‌ماند. اگر L_0 طول اولیه، L طول جدید، A_0 مساحت مقطع اولیه و A مساحت مقطع جدید باشد آنگاه $L_0A_0=LA$ می‌شود و از آنجا خواهیم داشت:

$$A=\frac{L_0A_0}{L}=\frac{L_0A_0}{3L_0}=\frac{A_0}{3}$$

بنابراین مقاومت جدید چنین می‌شود:

$$R=\frac{\rho L}{A}=\frac{\rho(3L_0)}{A_0/3}=9\frac{\rho L_0}{A_0}=9R_0=9(6.0\,\Omega)=54\,\Omega$$

۲۶●● در شکل ۲۶-۲۶ الف، یک باتری $9.00\,\mathrm{V}$ به مقاومتی نواری متصل شده است که شامل سه بخش با سطح مقطع‌های یکسان، ولی رسانندگی متفاوت‌اند. شکل ۲۶-۲۶ ب، پتانسیل الکتریکی $V(x)$ را بر حسب مکان x در طول این نوار نشان می‌دهد. محور افقی با $x_s=8.00\,\mathrm{mm}$ مقیاس‌بندی شده است. بخش ۳ دارای رسانندگی $3.00\times10^7(\Omega\cdot\mathrm{m})^{-1}$ است. رسانندگی بخش‌های (الف) ۱ و (ب) ۲ چقدر است؟



شکل ۲۶-۲۶ مسئله‌ی ۲۶

حل بدیهی است که قدرمطلق شیب قطعه‌خط‌های مستقیم نمودار ب برابر با بزرگی میدان‌های الکتریکی مربوطه است. بنابراین با توجه به اینکه $J=i/A$ و $\vec{J}=\sigma\vec{E}$ است، برای سه بخش خواهیم داشت:

$$J_1=\frac{i}{A}=\sigma_1E_1=\sigma_1(0.500\times10^3\,\mathrm{V/m})$$

$$J_2=\frac{i}{A}=\sigma_2E_2=\sigma_2(4.00\times10^3\,\mathrm{V/m})$$

$$J_3=\frac{i}{A}=\sigma_3E_3=\sigma_3(1.00\times10^3\,\mathrm{V/m})$$

توجه کنید که چون مقادیر i و A طبق صورت مسئله برابرند، چگالی‌های جریان در هر سه بخش برابرند و بنابراین $J_1=J_2=J_3$ است.

(الف) از بالا درمی‌یابیم

$$\sigma_1=2\sigma_3=2(3.00\times10^7/\Omega\cdot\mathrm{m})=6.00\times10^7(\Omega\cdot\mathrm{m})^{-1}$$

(ب) و به همان ترتیب

$$\sigma_2=\sigma_3/4=(3.00\times10^7/\Omega\cdot\mathrm{m})/4=7.50\times10^6(\Omega\cdot\mathrm{m})^{-1}$$

۲۷●● WWW دو رسانا از یک ماده ساخته شده‌اند و طول یکسانی دارند. رسانای A، سیم توپری به قطر $1.0\,\mathrm{mm}$ است. رسانای B لوله‌ای توخالی به قطر خارجی $2.0\,\mathrm{mm}$ و قطر داخلی $1.0\,\mathrm{mm}$ است. نسبت مقاومتی R_A/R_B که نسبت به دو سرِ رساناها اندازه‌گیری می‌شود، چقدر است؟

حل مقاومت رسانای A با رابطه‌ی زیر داده می‌شود:

$$R_A=\frac{\rho L}{\pi r_A^2}=\frac{4\rho L}{\pi D_A^2}$$

که در آن D_A قطر رسانای توپر است. اگر D_o قطر خارجی و D_i قطر داخلی رسانای توخالی باشد، مقاومت رسانای B چنین می‌شود:

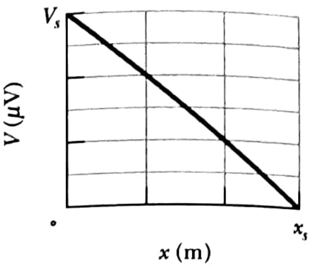
$$R_B=\frac{4\rho L}{\pi(D_o^2-D_i^2)}$$

بنابراین R_A/R_B برابر است با

$$\frac{R_A}{R_B}=\frac{D_o^2-D_i^2}{D_A^2}=\frac{(2.0\,\mathrm{mm})^2-(1.0\,\mathrm{mm})^2}{(1.0\,\mathrm{mm})^2}=3.0$$

۲۸●● GO شکل ۲۶-۲۷ پتانسیل الکتریکی $V(x)$ را در طول یک سیم مسی حامل جریان، از نقطه‌ی با پتانسیل بالاتر $V_s=12.0\,\mu\mathrm{V}$ در $x=0$ تا نقطه‌ی صفرِ پتانسیل در $x_s=3.00\,\mathrm{m}$ نشان می‌دهد. شعاع این سیم برابر با

Scanned by CamScanner



شکل ۲۶-۲۷ مسئله‌ی ۲۸

حل مساحت مقطع با $A=\pi r^2=\pi(0.002\,m)^2$ داده می‌شود. مقاومت ویژه‌ی مس با استفاده از جدول ۲۶-۱ برابر با $\rho=1.69\times10^{-8}\,\Omega\cdot m$ است. بنابراین به‌ازای $L=3.00\,m$، قانون اهم به $V=iR=i\rho L/A$ می‌انجامد و از آنجا خواهیم داشت:

$$12.0\times10^{-6}\,V=i(1.69\times10^{-8}\,\Omega\cdot m)(3.00\,m)/\pi(0.00200\,m)^2$$

که به $i=0.00297\,A\approx3.00\,mA$ می‌انجامد.

۲۹●● اختلاف پتانسیل ۳٫۰۰nV در دو سر سیمی مسی به طول ۲٫۰۰cm برقرار شده است که دارای شعاع ۲٫۰۰mm است. چقدر بار از طریق مقطع این سیم در مدت ۳٫۰۰ms سوق پیدا می‌کند؟

حل نخست مقاومت را به‌دست می‌آوریم

$$R=\rho_{cu}\frac{L}{A}=(1.69\times10^{-8}\,\Omega\cdot m)\frac{2.00\times10^{-2}\,m}{\pi(2.00\times10^{-3}\,m)^2}$$

$$=2.69\times10^{-5}\,\Omega$$

بنابراین جریان چنین می‌شود

$$i=\frac{V}{R}=\frac{3.00\times10^{-9}\,V}{2.69\times10^{-5}\,\Omega}=1.11\times10^{-4}\,A$$

و از آنجا خواهیم داشت:

$$\Delta Q=i\Delta t=(1.11\times10^{4}\,A)(3.00\times10^{-3}\,s)$$

$$=3.35\times10^{-7}\,C$$

۳۰●● اگر نمره‌ی سیمی ۶ عدد زیاد شود، قطر سیم نصف می‌شود؛ اگر نمره‌ی سیمی ۱ عدد زیاد شود، قطر آن با ضریب $2^{1/6}$ کم می‌شود (جدول مسئله‌ی ۴ را ببینید). با دانستن این مطالب و اینکه ۱۰۰۰ft سیم نمره‌ی ۱۰ دارای مقاومت تقریبی ۱٫۰۰Ω است، مقاومت ۲۵ft سیم مسی نمره‌ی ۲۲ را برآورد کنید.

حل قطر سیم نمره‌ی ۲۲ برابر با $\frac{1}{4}$ قطر سیم نمره‌ی ۱۰ است. با استفاده از $R=\rho L/A$ نتیجه می‌گیریم که مقاومت ۲۵ft از سیم مسی با نمره‌ی ۲۲ چنین می‌شود:

$$R=(1.00\,\Omega)(25\,ft/1000\,ft)(4)^2=0.400\,\Omega$$

۳۱●● یک کابل الکتریکی شامل ۱۲۵ رشته سیم نازک است که مقاومت هر یک ۲٫۶۵μΩ است. اختلاف پتانسیل یکسانی به دو سر همه‌ی این رشته‌ها اعمال می‌شود و به جریان کلّ ۰٫۷۵۰A می‌انجامد. (الف) جریان موجود در هر رشته چقدر است؟ (ب) اختلاف پتانسیل اعمال شده چقدر است؟ (پ) مقاومت کابل چقدر است؟

حل (الف) جریان در هر رشته برابر است با

$$i=\frac{0.750\,A}{125}=6.00\times10^{-3}\,A=6.00\,mA$$

(ب) اختلاف پتانسیل اعمال شده برابر است با

$$V=iR=(6.00\times10^{-3}\,A)(2.65\times10^{-6}\,\Omega)=1.59\times10^{-8}\,V$$

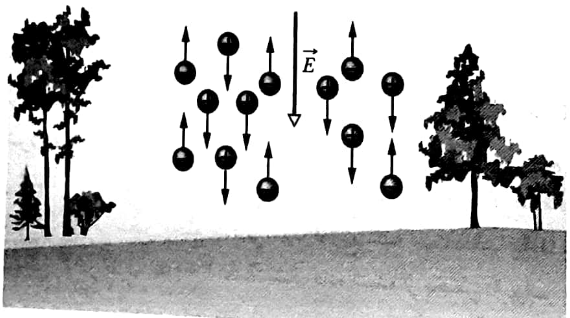
(پ) پتانسیل دو سر کابل برابر مقدار بالاست و بنابراین داریم

$$R_{eq}=\frac{1.59\times10^{-8}\,V}{0.750\,A}=2.12\times10^{-8}\,\Omega$$

همین نتیجه را می‌توانستیم از رابطه‌ی زیر نیز به‌دست آوریم

$$R_{eq}=\frac{R}{n}=\frac{2.65\times10^{-6}\,\Omega}{125}=2.12\times10^{-8}\,\Omega$$

۳۲●● جوّ پایین‌تر زمین شامل یون‌های منفی و مثبتی است که توسط عناصر پرتوزای موجود در خاک و پرتوهای کیهانی برآمده از فضا تولید شده‌اند. در یک ناحیه‌ی معین، شدت میدان الکتریکی ۱۲۰V/m و جهت این میدان مستقیماً رو به پایین است. این میدان موجب می‌شود یون‌های یک‌بار یونیده‌ی مثبت با چگالی $620\,cm^{-3}$، رو به پایین و یون‌های یک‌بار یونیده‌ی منفی با چگالی $550\,cm^{-3}$، رو به بالا سوق پیدا کنند (شکل ۲۶-۲۸). رسانندگی اندازه‌گیری شده‌ی هوا در آن ناحیه $2.70\times10^{-14}\,(\Omega\cdot m)^{-1}$ است. (الف) بزرگی چگالی جریان و (ب) تندی سوق یون‌ها را با فرض اینکه برای یون‌های مثبت و منفی یکسان باشد، محاسبه کنید.



شکل ۲۶-۲۸ مسئله‌ی ۳۲

حل (الف) برای چگالی جریان داریم

$$J=\sigma E=(2.70\times10^{-14}/\Omega\cdot m)(120\,V/m)$$

$$=3.24\times10^{12}\,A/m^2$$

(ب) از طرفی $J=nev_d$ است که در اینجا $n=n_++n_-$ می‌باشد. بنابراین تندی سوق v_d چنین می‌شود:

Scanned by CamScanner

$$v_d=\frac{\sigma E}{(n_+ + n_-)}=\frac{(2.70\times10^{-14}/\Omega\cdot m)(120\,V/m)}{\left[(620+550)/cm^3\right](1.60\times10^{-19}\,C)}$$

$$=1.73\,cm/s$$

۳۳●● یک قالب مستطیل‌شکلِ توپُر دارای مساحت مقطع عرضی $3.50\,cm^2$، طول از جلو تا عقب $15.8\,cm$ و مقاومت 935Ω است. ماده‌ی سازنده‌ی این قالب دارای 5.33×10^{22} الکترون رسانش در هر مترمکعب است. اختلاف پتانسیلی برابر با $35.8\,V$ بین عقب و جلوی قطعه برقرار شده است. (الف) جریان موجود در قطعه چقدر است؟ (ب) اگر چگالی جریان یکنواخت باشد، مقدار آن چقدر است؟ (پ) تندی سوق الکترون‌های رسانش و (پ) بزرگی میدان الکتریکی موجود در قطعه چقدر است؟

حل (الف) جریان در قطعه برابر است با

$$i=\frac{V}{R}=\frac{35.8\,V}{935\Omega}=3.83\times10^{-2}\,A=38.3\,mA$$

(ب) بزرگی چگالی جریان برابر است با

$$J=\frac{i}{A}=\frac{3.83\times10^{-2}\,A}{3.50\times10^{-4}\,m^2}=109\,A/m^2$$

(پ) تندی سوق از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید

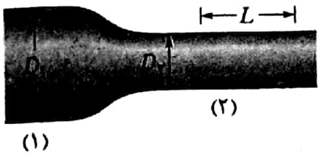
$$v_d=\frac{J}{ne}=\frac{109\,A/m^2}{(5.33\times10^{22}\,m^3)(1.60\times10^{-19}\,C)}$$

$$=1.28\times10^{-2}\,m/s=1.28\,cm/s$$

(ت) بزرگی میدان الکتریکی در قطعه چنین می‌شود

$$E=\frac{V}{L}=\frac{3.58\,V}{0.158\,m}=227\,V/m$$

۳۴●●● GO شکل ۲۶-۲۹ سیمی شامل دو بخش را نشان می‌دهد که بخش ۱ با قطر $D_1=4.00R$ از طریق ناحیه‌ای که به‌تدریج باریک می‌شود به بخش ۲ با قطر $D_2=2.00R$ متصل شده است. جنس سیم از مس است و جریانی از آن می‌گذرد. فرض کنید این جریان به‌طور یکنواختی در هر سطح مقطع عرضی سیم توزیع شده است. تغییر پتانسیل الکتریکی V در طول $L=2.00\,m$ نشان داده شده از بخش ۲ برابر با $10.0\,\mu V$ است. تعداد حامل‌های بار بر واحد حجم $8.49\times10^{28}\,m^{-3}$ است. تندی سوق الکترون‌های رسانش بخش ۱ چقدر است؟



شکل ۲۶-۲۹ مسئله‌ی ۳۴

حل تعداد الکترون‌های رسانش در واحد حجم مس $n=8.49\times10^{28}/m^3$ است. میدان الکتریکی در بخش ۲ برابر با $(10.0\,\mu V)/(2.00\,m)=5.00\,\mu V/m$ است. چون $\rho_{cu}=1.69\times10^{-8}\,\Omega\cdot m$ است، از $J=E/\rho$ برای بخش ۲ درمی‌یابیم:

$$J_2=\frac{5.00\,\mu V/m}{1.69\times10^{-8}\,\Omega\cdot m}=269\,A/m^2$$

از پایستگی جریان الکتریکی بخش‌های ۱ و ۲ نتیجه می‌گیریم:

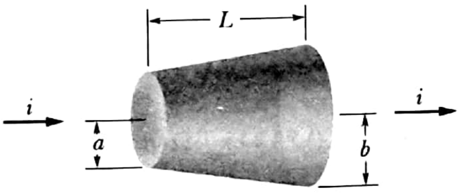
$$J_1A_1=J_2A_2 \quad\Rightarrow\quad J_1(4\pi R_1^2)=J_2(\pi R_2^2)$$

با توجه به اینکه $R_2=R_1/2$ است، از آنجا $J_1=74.0\,A/m^2$ می‌شود. از طرفی $J=nev_d$ است و از آنجا خواهیم داشت

$$u_d=\frac{J_1}{ne}=\frac{74.0\,A/m^2}{(8.49\times10^{28}/m^3)(1.60\times10^{-19}\,C)}$$

$$=5.44\times10^{-9}\,m/s$$

۳۵●●● GO در شکل ۲۶-۳۰، جریان در مخروط ناقصی با مقطع دایره‌ای و مقاومت ویژه‌ی $731\Omega\cdot m$ برقرار شده است که شعاع سمت چپ آن $a=2.00\,mm$، شعاع سمت راست آن $b=2.30\,mm$، و طول آن $L=1.94\,cm$ است. فرض کنید چگالی جریان در هر مقطع عمود بر طول این مخروط، یکنواخت باشد. مقاومت مخروط چقدر است؟

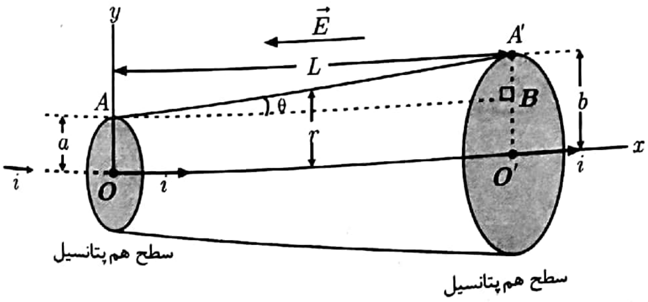


شکل ۲۶-۳۰ مسئله‌ی ۳۵

حل (الف) از تعریف مقاومت داریم

$$R=\frac{V}{i}=\frac{-\int_0^L \vec{E}\cdot d\vec{s}}{\int \vec{J}\cdot d\vec{A}}$$

برای محاسبه‌ی این عبارت، شکل بزرگ شدهٔ صورت مسئله را به‌صورت زیر می‌کشیم:

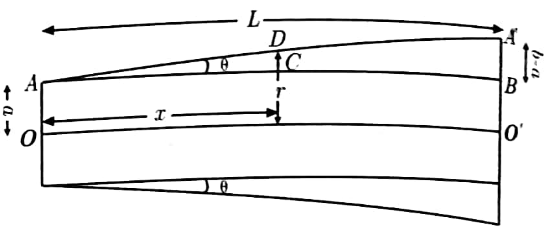


چگالی جریان یکنواخت است و از زیر انتگرال بیرون می‌آید. بنابراین داریم:

$$R=\frac{-\int_0^L E_x dx}{J\int dA}=\frac{E_x\int_0^L dx}{\frac{E_x}{\rho}\int dA}=\frac{\rho\int_0^L dx}{A}$$

Scanned by CamScanner

ولی توجه شود A مستقل از x نیست و بدین منظور برای بررسی بهتر، شکل بالا را می‌توانیم چنین نمایش دهیم:



آنگاه از تشابه مثلث‌های ACD و $AA'B$ خواهیم داشت:

$$\frac{r-a}{x}=\frac{b-a}{L} \quad\Rightarrow\quad r=\frac{b-a}{L}x+a$$

حال که رابطه‌ی r و x مشخص است، می‌توانیم رابطه‌ی R چنین بنویسیم

$$R=\rho\int_{\circ}^{L}\frac{dx}{\pi r^{2}}=\int_{\circ}^{L}dx\Big/\pi\left(\frac{b-a}{L}x+a\right)^{2}$$

برای محاسبه‌ی این انتگرال، تغییر متغیر زیر را می‌دهیم

$$\frac{b-a}{L}x=u \quad\Rightarrow\quad du=\frac{b-a}{L}dx \quad\Rightarrow\quad dx=\frac{L}{b-a}du$$

و از آنجا R چنین می‌شود:

$$R=\frac{\rho}{\pi}\frac{L}{b-a}\int_{\circ}^{b-a}\frac{du}{(u+a)^{2}}=\frac{\rho}{\pi}\frac{L}{b-a}\left[\frac{-1}{u+a}\right]_{\circ}^{b-a}$$

$$=\frac{\rho}{\pi}\frac{L}{b-a}\left[\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right]=\rho\frac{1}{\pi ab}$$

بنابراین مقدار عددی R برابر است با

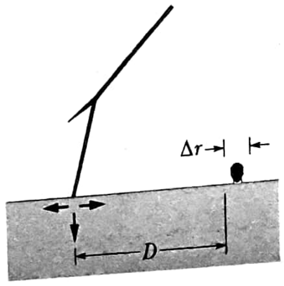
$$R=\frac{\rho L}{\pi ab}=\frac{(۷۳۱\Omega m)(۱{,}۹۴\times ۱۰^{-۲}\,m)}{\pi(۲{,}۰۰\times ۱۰^{-۳}\,m)(۲{,}۳۰\times ۱۰^{-۳}\,m)}=۹{,}۸۱\times ۱۰^{۵}\Omega=۹۸۱k\Omega$$

توجه کنید که اگر $b=a$ باشد، آنگاه $R=\rho L/\pi a^{2}=\rho L/A$ می‌شود که در آن $A=\pi a^{2}$ سطح مقطع استوانه است.

رابطه‌ی $R=\rho\int_{\circ}^{L}\frac{dx}{\pi r^{2}}$ را به روش دیگری نیز می‌توان به‌دست آورد. با در نظر گرفتن R متغیر به‌صورت $R=\rho\frac{x}{A}$ به رابطه‌ی زیر می‌رسیم:

$$dR=\rho\frac{dx}{A}=\rho\frac{dx}{\pi r^{2}} \quad\Rightarrow\quad R=\rho\int_{\circ}^{L}\frac{dx}{\pi r^{2}}$$

۳۶۰۰۰ GO *شنا در حین توفان.* شکل ۲۶-۳۰ شناگری را در فاصله‌ی $D=۳۵{,}۰m$ از محلِ اصابت یک آذرخش به آب، با جریان $I=۷۸kA$، نشان می‌دهد. مقاومت ویژه‌ی آب $۳۰\Omega\cdot m$، عرض شناگر در امتداد خطِ شعاعی حاصل از اصابت آذرخش $۰{,}۷۰m$، و مقاومت او در دو سوی این پهنا $۴{,}۰۰k\Omega$ است. فرض کنید که این جریان از طریق آب بر نیم‌کره‌ای به مرکز نقطه‌ی اصابت گسترش می‌یابد. جریان عبوری از شناگر چقدر است؟



شکل ۲۶-۳۱ مسئله‌ی ۳۶

حل

چون جریان I ی آذرخش به طور یکنواخت در نیم‌کره‌ای از آب پخش می‌شود، چگالی جریان در هر نقطه به شعاع r از نقطه‌ی اصابت آذرخش با استفاده از معادله‌ی ۲۶-۵ $(J=i/A)$ به‌دست می‌آید:

$$J=\frac{I}{۲\pi r^{۲}}$$

که $۲\pi r^{۲}$ مساحت سطح نیم‌کره است. از معادله‌ی ۲۶-۱۰ $(\rho=E/J)$ بزرگی میدان الکتریکی چنین می‌شود

$$E=\rho_{w}J=\frac{\rho_{w}I}{۲\pi r^{۲}}$$

که در آن ρ_{w} مقاومت ویژه‌ی آب $(=۳۰\Omega\cdot m)$ است. از معادله‌ی ۲۶-۱۸ $(\Delta V=-\int\vec{E}\cdot d\vec{s})$، اختلاف پتانسیل ΔV بین نقطه‌ای در فاصله‌ی شعاعی D و نقطه‌ای در فاصله‌ی شعاعی $D+\Delta r$ به‌دست می‌آید:

$$\Delta V=-\int_{D}^{D+\Delta r}Edr=-\int_{D}^{D+\Delta r}\frac{\rho_{w}I}{۲\pi r^{۲}}dr$$

$$=-\frac{\rho_{w}I}{۲\pi}\left[-\frac{1}{r}\right]_{D}^{D+\Delta r}$$

$$=\frac{\rho_{w}I}{۲\pi}\left(\frac{1}{D+\Delta r}-\frac{1}{D}\right)=-\frac{\rho_{w}I}{۲\pi}\frac{\Delta r}{D(D+\Delta r)}$$

که این، اختلاف پتانسیل دو سوی پهنای شناگر است که در آن موجب جریان i می‌شود. حال با استفاده از معادله‌ی ۲۶-۸ $(R=V/i)$، جریان عبوری i از شناگر را به دست می‌آوریم. با قراردادن ΔV به جای V در این معادله خواهیم داشت

$$i=\frac{V}{R}=\frac{\rho_{w}I}{۲\pi}\frac{\Delta r}{D(D+\Delta r)}\frac{1}{R}$$

$$=\frac{(۳۰\Omega\cdot m)(۷{,}۸\times ۱۰^{۴}A)}{۲\pi}\frac{۰{,}۷۰m}{(۳۵{,}۰m)(۳۵{,}۰m+۰{,}۷۰m)}\frac{1}{۴{,}۰۰\times ۱۰^{۳}\Omega}$$

$$=۵{,}۲\times ۱۰^{-۲}A=۵۲mA$$

بخش ۲۶-۴ قانون اهم

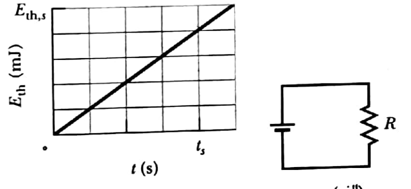
۳۷۰۰ بر مبنای مدل الکترون- آزادِ رسانش الکتریکی در فلزات، و نیز با استفاده از فیزیک کلاسیک نشان دهید که مقاومت ویژه‌ی فلزها با $\sqrt{T}$ متناسب است، که T دما بر حسب کلوین است (معادله‌ی ۱۹-۳۱ را ببینید).

Scanned by CamScanner

حل از معادله‌ی ۲۶-۲۲ می‌دانیم $\rho = m/e^۲ n\tau$ است. چون m، e و n مقادیر ثابتی هستند نتیجه می‌گیریم که $\rho \propto \tau^{-۱}$ است. از طرفی می‌دانیم مسافت آزاد میانگین برای برخورد الکترون‌ها را می‌توانیم به‌صورت $\lambda = \tau v_{eff}$ بنویسیم که v_{eff} تندی مؤثر الکترون است. پس $v_{eff} \propto \tau^{-۱}$ است و از اینجا می‌توانیم نتیجه بگیریم که $\rho \propto v_{eff}$ است. v_{eff} را می‌توان تقریباً تا سرعت میانگین الکترون‌ها معادل گرفت که در فصل ۱۵ (جلد اول کتاب) نشان داده شده متناسب با $\sqrt{T}$ است. پس $\rho \propto \sqrt{T}$ می‌شود.

بخش ۲۶-۵ توان، نیمرسانا، آبَررسانا

۳۸● در شکل ۲۶-۳۲ الف، یک مقاومت ۲۰Ω به یک باتری بسته شده است. شکل ۲۶-۳۲ ب افزایش انرژی گرمایی E_{th} در این مقاومت را بر حسب تابعی از زمان t نشان می‌دهد. محور قائم با $E_{th,s} = ۲/۵۰\,mJ$ و محور افقی با $t_s = ۴/۰\,s$ مقیاس‌بندی شده است. پتانسیل الکتریکی دو سر باتری چقدر است؟



شکل ۲۶-۳۲ مسئله‌ی ۳۸

حل شیب منحنی برابر است با $P = ۵/۰۰ \times ۱۰^{-۴}\,W$. آنگاه با استفاده از $P = V^۲/R$، با توجه به اینکه $R = ۲۰\Omega$ است به $V = ۰/۱۰\,V$ می‌رسیم.

۳۹● نوع خاصی از یک اجاق سوسیس‌پز، با اعمال اختلاف پتانسیل ۱۲۰V به دو سر سوسیس کار می‌کند و امکان می‌دهد که سوسیس بر اثر انرژی گرمایی تولید شده در آن بپزد. جریان برابر ۱۰/۰A و انرژی لازم برای پختن یک سوسیس ۶۰/۰kJ است. اگر آهنگی که با آن انرژی اعمال می‌شود تغییر نکند، چقدر طول می‌کشد تا سه سوسیس به‌طور همزمان پخته شود؟

حل آهنگ تولید انرژی گرمایی برابر است با

$$P = iV = (۱۰/۰A)(۱۲۰V) = ۱/۲۰\,kW$$

از تقسیم این مقدار بر $۳(۶۰/۰kJ) = ۱۸۰kJ$، زمان لازم برای پختن $t = ۱۵۰s$ می‌شود.

۴۰● وقتی جریان ۳/۰۰A از یک وسیله‌ی مقاوم الکتریکی می‌گذرد، انرژی گرمایی با آهنگ ۱۰۰W در آن تولید می‌شود، مقاومت این وسیله چقدر است؟

حل با استفاده از رابطه‌ی ۲۶-۲۷ کتاب، مقاومت برابر است با

$$R = \frac{P}{i^۲} = \frac{۱۰۰W}{(۳/۰۰A)^۲} = ۱۱/۱\Omega$$

۴۱● اختلاف پتانسیل ۱۲۰V به بخاری برقی‌ای اعمال شده است که مقاومت آن وقتی‌که داغ می‌شود برابر ۱۴Ω است. (الف) انرژی الکتریکی با چه آهنگی به انرژی گرمایی منتقل می‌شود؟ (ب) اگر قیمت مصرف هر کیلووات-ساعت برابر با ۰/۰۵ دلار باشد، هزینه‌ی ۵/۰h کار این بخاری چقدر می‌شود؟

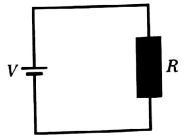
حل (الف) انرژی الکتریکی با آهنگ $P = V^۲/R$ به گرما تبدیل می‌شود، که در آن V اختلاف پتانسیل با دو سر گرمکن و R مقاومت گرمکن است. بنابراین داریم

$$P = \frac{(۱۲۰V)^۲}{۱۴\Omega} = ۱/۰ \times ۱۰^۳\,W = ۱/۰\,kW$$

(ب) هزینه چنین می‌شود:

$$= (۱/۰kW)(۵/۰h)(۵/۰cents/kW\cdot h) = ۲۵/۰cents = \$۰/۲۵$$

۴۲● در شکل ۲۶-۳۳، یک باتری با اختلاف پتانسیل $V = ۱۲V$ به یک مقاومت نواری با $R = ۶/۰\Omega$ متصل شده است. وقتی الکترونی از یک سر نوار به سر دیگر آن حرکت کند، (الف) الکترون‌ها در کدام جهت شکل حرکت می‌کنند، (ب) چقدر کار توسط میدان الکتریکی داخل نوار روی الکترون انجام می‌گیرد و (پ) چقدر انرژی توسط الکترون‌ها به انرژی گرمایی نوار منتقل می‌شود؟



شکل ۲۶-۳۳ مسئله‌ی ۴۲

حل (الف) جهت میدان الکتریکی، رو به پایین رشته‌ی مقاومت است و این بدین معنی است که جهت بردار چگالی جریان نیز رو به پایین است (طبق معادله‌ی $\vec{E} = \rho\vec{J}$). بنابراین، چون الکترون‌ها دارای بار منفی هستند، الکترون‌های رسانش رو به بالا از رشته‌ی مقاومت می‌گذرند.

(ب) $\Delta V = \Delta U/q$ است و بنابراین $W = \Delta U = e\Delta V = ۱۲eV$ می‌شود، که همچنین آن را می‌توان با استفاده از $e = ۱/۶ \times ۱۰^{-۱۹}C$ به‌صورت $۱/۹ \times ۱۰^{-۱۸}J$ نیز نوشت.

(پ) چون الکترون‌ها بر اثر این کار، به طور میانگین انرژی جنبشی به‌دست نمی‌آورند، به‌صورت گرمایی اتلاف می‌شوند. بنابراین پاسخ همان قسمت ب یعنی ۱۲eV یا $۱/۹ \times ۱۰^{-۱۸}J$ است.

۴۳● ILW مقاومت مجهولی به پایانه‌های یک باتری ۳/۰۰V بسته شده است. انرژی با آهنگ ۰/۵۴۰W در این مقاومت تلف می‌شود. سپس همین مقاومت به یک باتری ۱/۵۰V بسته می‌شود. اکنون انرژی با چه آهنگی تلف می‌گردد؟

Scanned by CamScanner

حل بنا به رابطه‌ی $P=V^2/R$، $P\propto V^2$ است. بنابراین توان تلف شده در حالت دوم چنین می‌شود:

$$P=\left(\frac{1.50\,V}{3.00\,V}\right)^2(0.540\,W)=0.135\,W$$

۴۴ • دانشجویی رادیوی ۹٫۰V و ۷٫۰W خود را با بالاترین صدا از ۹٫۰۰ صبح تا ۲٫۰۰ بعدازظهر روشن می‌گذارد. در این مدت چقدر بار از رادیو عبور کرده است؟

حل چون $P=iV$ است، بار مصرف شده چنین می‌شود:

$$q=it=Pt/V=(7.0\,W)(5.00\,h)(3600\,s/h)/9.0\,V$$
$$=1.4\times10^4\,C$$

۴۵ • ILW یک گرمکن تابشی ۱۲۵۰W برای عمل در پتانسیل ۱۱۵V ساخته شده است. (الف) در حین کار کردن گرمکن، جریان عبوری از آن چقدر است؟ (ب) مقاومت پیچه‌ی گرمکن چقدر است؟ (پ) چقدر انرژی گرمایی در ۱٫۰h تولید می‌شود؟

حل (الف) توان تلف شده، جریان گرمکن، و اختلاف پتانسیل دو سر گرمکن با رابطه‌ی $P\propto iV$ به هم مربوط می‌شوند. بنابراین داریم

$$i=\frac{P}{V}=\frac{1250\,W}{115\,V}=10.9\,A$$

(ب) طبق رابطه‌ی ۲۶-۸ کتاب، $V=iR$ است و از آنجا مقاومت R گرمکن چنین می‌شود:

$$R=\frac{V}{i}=\frac{115\,V}{10.9\,A}=10.6\,\Omega$$

(پ) انرژی گرمایی ایجاد شده در گرمکن، در زمان $t=1.0\,h=3600\,s$ برابر است با

$$E=Pt=(1250\,W)(3600\,s)=4.50\times10^6\,J=4.50\,MJ$$

۴۶ •• GO یک سیم مسی با سطح مقطع $2.00\times10^{-6}\,m^2$ و طول ۴٫۰۰m دارای جریان ۲٫۰۰A است که به‌طور یکنواختی در سرتاسر ساحت مقطع آن پخش شده است. (الف) بزرگی میدان الکتریکی در طول این سیم چقدر است؟ (ب) در مدت ۳۰min چقدر انرژی الکتریکی به انرژی گرمایی منتقل می‌شود؟

حل (الف) طبق رابطه‌ی ۲۶-۱۳ کتاب، $J=\sigma E$ است و چون $\sigma=1/\rho$ است خواهیم داشت:

$$E=\rho_{cu}J=\rho_{cu}\frac{I}{A}$$
$$=(1.69\times10^{-8}\,\Omega\cdot m)\left(\frac{2.00\,A}{2.00\times10^{-6}\,m^2}\right)$$
$$=1.69\times10^{-2}\,V/m$$

که در آن از جدول ۲۶-۱ برای مقاومت ویژه‌ی مس استفاده کردیم.

(ب) آهنگ تولید انرژی گرمایی برابر i^2R است و با فرض اینکه این آهنگ، یکنواخت باشد، انرژی گرمایی تولید شده $W=i^2Rt$ می‌شود و از آنجا خواهیم داشت:

$$W=i^2Rt=(i^2)\left(\frac{\rho L}{A}\right)(t)=\frac{i^2\rho_{cu}Lt}{A}$$
$$=(2.00\,A)^2(1.69\times10^{-8}\,\Omega\cdot m)(4.00\,m)(1800\,s)(2.00\times10^{-6}\,m^2)$$
$$=2.43\times10^2\,J$$

۴۷ •• GO یک اِلمنت گرم‌کننده با ثابت نگه داشتن اختلاف پتانسیل ۷۵٫۰V در دو سر طولی از یک سیم نیکرومی با سطح مقطع $2.60\times10^{-6}\,m^2$ ساخته شده است. مقاومت ویژه‌ی نیکروم $5.00\times10^{-7}\,\Omega\cdot m$ است. (الف) اگر توان تلف شده در این المنت ۵۰۰۰W باشد، طول آن چقدر است؟ (ب) اگر برای به‌دست آوردن همان آهنگ اتلاف، از اختلاف پتانسیل ۱۰۰V استفاده شود، طول المنت باید چقدر باشد؟

حل (الف) $P=V^2/R$ و $R=\rho L/A$ است. از آنجا طول گرمکن نیکرومی چنین می‌شود:

$$L=\frac{AV^2}{\rho P}=\frac{(2.60\times10^{-6}\,m^2)(75.0\,V)^2}{(5.00\times10^{-7}\,\Omega\cdot m)(5000\,W)}=5.85\,m$$

(ب) چون $L\propto V^2$ است، طول جدید چنین می‌شود:

$$L'=L\left(\frac{V'}{V}\right)^2=(5.85\,m)\left(\frac{100\,V}{75.0\,V}\right)^2=10.4\,m$$

۴۸ •• *تلاشی کفش‌ها.* کفش باران‌خورده‌ی یک شخص ممکن است متلاشی شود، در صورتی که "جریان زمین" حاصل از آذرخشی در نزدیکی آن، آبش را بخار کند. تبدیل ناگهانی آب به بخار آب باعث یک انبساط غیرمنتظره می‌شود که می‌تواند کفش شخص را از هم بگسلد. آب دارای چگالی ۱۰۰۰kg/m³ است و به ۲۲۵۶kJ/kg برای بخار شدن نیاز دارد. اگر جریان افقی به مدت ۲٫۰۰ms طول بکشد و با آبی به مقاومت ویژه‌ی ۱۵۰Ω·m، طول ۱۲٫۰cm، و سطح مقطع قائم $15\times10^{-5}\,m^2$ مواجه شود، به چه جریان متوسطی برای بخار کردن آب نیاز است؟

حل جرم آب موجود در طول $L=0.12\,m$ برابر است با

$$m=\rho AL=(1000\,kg/m^3)(15\times10^{-5}\,m^2)(0.120\,m)$$
$$=0.018\,kg$$

و در نتیجه انرژی لازم برای بخار کردن آب چنین می‌شود

$$Q=Lm=(2256\,kJ/kg)(0.018\,kg)=4.1\times10^2\,J$$

این انرژی گرمایی را مقاومت آب تأمین می‌کند که طبق قانون ژول برابر است با

$$Q=P\Delta t=I^2R\Delta t$$

Scanned by CamScanner

چون مقاومت طول L آب برابر است با

$$R=\frac{\rho_w L}{A}=\frac{(۱۵۰\Omega\cdot m)(۰/۱۲۰m)}{۱۵\times ۱۰^{-۵}m^{۲}}=۱/۲\times ۱۰^{۵}\Omega$$

آنگاه جریان متوسط مورد نیاز برای بخار کردن آب چنین می‌شود

$$U=\sqrt{\frac{Q}{R\Delta t}}=\sqrt{\frac{۴/۱\times ۱۰^{۴}J}{(۱/۲\times ۱۰^{۵}\Omega)(۲/۰\times ۱۰^{-۳}s)}}=۱۳A$$

••۴۹ لامپی ۱۰۰W به برق خروجی استاندارد ۱۲۰V متصل شده است. (الف) اگر این لامپ در یک ماه ۳۱ روز به‌طور پیوسته روشن گذاشته شود، هزینه‌ی مصرف آن چقدر می‌شود؟ فرض کنید قیمت هر کیلووات-ساعت انرژی الکتریکی برابر با ۰/۰۶ دلار باشد. (ب) مقاومت این لامپ چقدر است؟ (پ) جریان این لامپ چقدر است؟

حل

هزینه‌ی ماهانه چنین می‌شود:

$$(۱۰۰W)(۲۴h/day)(۳۱day/month)(۶cents/kW\cdot h)$$

$$=۴۴۶cents=\$۴/۴۶$$

در محاسبه‌ی بالا فرض شده است که یک ماه برابر ۳۱ روز است.

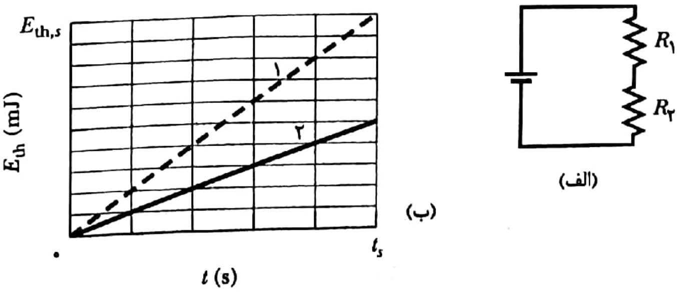
(ب) برای مقاومت لامپ داریم

$$R=\frac{V^{۲}}{P}=\frac{(۱۲۰V)^{۲}}{۱۰۰W}=۱۴۴\Omega$$

(پ) جریان لامپ چنین می‌شود:

$$i=\frac{P}{V}=\frac{۱۰۰W}{۱۲۰V}=۰/۸۳۳A$$

••۵۰ GO جریان عبوری از باتری و مقاومت‌های ۱ و ۲ در شکل ۲۶-۳۴ الف برابر با ۲/۰۰A است. انرژی از این جریان به انرژی گرمایی E_{th} در هر دو مقاومت منتقل می‌شود. منحنی‌های ۱ و ۲ در شکل ۲۶-۳۳ ب انرژی گرمایی E_{th} را به‌ترتیب برای مقاومت‌های ۱ و ۲ برحسب تابعی از زمان t نشان می‌دهد. محور قائم با $E_{th,s}=۴۰/۰mJ$ و محور افقی با $t_s=۵/۰۰s$ مقیاس‌بندی شده است. توان باتری چقدر است؟

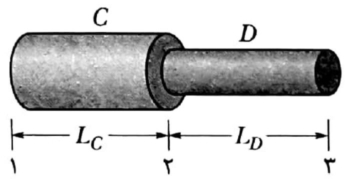


شکل ۲۶-۳۴ مسئله‌ی ۵۰

حل شیب منحنی‌های مستقیم ۱ و ۲ به‌ترتیب $P_۱=۸/۰۰mW$ و $P_۲=۴/۰۰mW$ را به‌دست می‌دهد. جمع آنها (طبق پایستگی انرژی) باید برابر با توان باتری باشد:

$$P_{باتری}=P_۱+P_۲=(۸/۰۰+۴/۰۰)mW=۱۲/۰mW$$

••۵۱ GO WWW سیم‌های C و D از مواد مختلفی ساخته شده‌اند و دارای طول $L_C=L_D=۱/۰m$ هستند. مقاومت ویژه و قطر سیم C به‌ترتیب برابر با $۲/۰\times ۱۰^{-۶}\Omega\cdot m$ و $۱/۰۰mm$، و این دو مقدار برای سیم D برابر با $۱/۰\times ۱۰^{-۶}\Omega\cdot m$ و $۰/۵۰mm$ است. این سیم‌ها مطابق شکل ۲۶-۳۵ به هم وصل شده‌اند و جریان $۲/۰A$ از آنها می‌گذرد. اختلاف پتانسیل الکتریکی میان (الف) نقطه‌های ۱ و ۲ و (ب) نقطه‌های ۲ و ۳ چقدر است؟ آهنگ اتلاف انرژی میان (پ) نقطه‌های ۱ و ۲ و (ت) نقطه‌های ۲ و ۳ چقدر است؟



شکل ۲۶-۳۵ مسئله‌ی ۵۱

حل (الف) مقاومت سیم C برابر است با

$$R_C=\rho_C\frac{L_C}{\pi r_C^{۲}}=(۲/۰\times ۱۰^{-۶}\Omega\cdot m)\frac{۱/۰m}{\pi(۰/۰۰۰۵۰m)^{۲}}=۲/۵۵\Omega$$

در نتیجه اختلاف پتانسیل نقاط ۱ و ۲ چنین می‌شود:

$$|V_۱-V_۲|=V_C=iR_C=(۲/۰A)(۲/۵۵\Omega)=۵/۱V$$

(ب) به همان ترتیب برای سیم D داریم

$$R_D=\rho_D\frac{L_D}{\pi r_D^{۲}}=(۱/۰\times ۱۰^{-۶}\Omega\cdot m)\frac{۱/۰m}{\pi(۰/۰۰۰۲۵m)}=۵/۱\Omega$$

و در نتیجه اختلاف پتانسیل نقاط ۲ و ۳ چنین می‌شود

$$|V_۲-V_۳|=V_D=iR_D=(۲/۰A)(۵/۰۹\Omega)\approx ۱۰V$$

(پ) آهنگ انرژی تلف شده در سیم C برابر است با

$$P_C=i^{۲}R_C=(۲/۰A)^{۲}(۲/۵۵\Omega)\approx ۱۰W$$

(ت) و به همان ترتیب برای سیم D داریم

$$P_D=i^{۲}R_C=(۲/۰A)(۵/۰۹\Omega)\approx ۲۰W$$

••۵۲ GO بزرگی چگالی جریان در یک سیم خاص با مقطع دایره‌ای به شعاع $۳/۰۰mm$ برابر با $J=(۲/۷۵\times ۱۰^{۱۰}A/m^{۴})r^{۲}$ است، که در آن r فاصله‌ی شعاعی رو به بیرون سیم است. پتانسیل اعمال‌شده به (دو سر) سیم برابر $۶۰/۰V$ است. در مدت $۱/۰۰h$ چقدر انرژی به انرژی گرمایی تبدیل می‌شود؟

حل فرض کنید جریان در امتداد سیم (و نه شعاعی) است و در نتیجه جریان با استفاده از معادله‌ی ۲۶-۴ چنین می‌شود:

$$i=\int\vec{J}\cdot d\vec{A}=\int|\vec{J}|dA=\int_{۰}^{R}kr^{۲}۲\pi r\,dr=\frac{۱}{۲}k\pi R^{۴}$$

$$=\frac{۱}{۲}(۲/۷۵\times ۱۰^{۱۰}A/m^{۴})\pi(۰/۰۰۳۰۰m)^{۴}=۳/۵۰A$$

Scanned by CamScanner

در نتیجه آهنگ تولید انرژی گرمایی

$$P = iV = (۳٫۵۰\,A)(۶۰٫۰\,V) = ۲۱۰\,W$$

می‌شود و با فرض آنکه این آهنگ ثابت باشد، انرژی گرمایی تولید شده در ۴۰s چنین می‌شود:

$$E_{th} = Pt = (۲۱۰\,W)(۳۶۰۰\,s) = ۷٫۵۶ \times ۱۰^{۵}\,J$$

۵۳●● اختلاف پتانسیل ۱۲۰V به یک بخاری برقی اعمال می‌شود که در حین کار ۵۰۰W تلف می‌کند. (الف) مقاومت این بخاری در حین کار کردن چقدر است؟ (ب) الکترون‌ها با چه آهنگی از هر مقطع اِلمنت گرم‌کننده‌ی این بخاری می‌گذرند؟

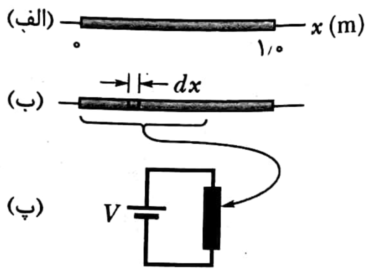
حل (الف) از $P = V^2/R$، مقاومت R گرمکن را به‌دست می‌آوریم:

$$R = \frac{V^2}{P} = \frac{(۱۲۰\,V)^2}{۵۰۰\,W} = ۲۸٫۸\,\Omega$$

(ب) چون $i = P/V$ است، آهنگ عبور الکترون‌ها چنین می‌شود:

$$\frac{i}{e} = \frac{P}{eV} = \frac{۵۰۰\,W}{(۱٫۶۰ \times ۱۰^{-۱۹}\,C)(۱۲۰\,V)} = ۲٫۶۰ \times ۱۰^{۱۹}\,s^{-1}$$

۵۴●●● GO شکل ۲۶-۳۶ الف میله‌ای از جنس یک مقاومت الکتریکی را نشان می‌دهد. مقاومت بر واحد طول این میله در جهت مثبت محور x افزایش می‌یابد. در هر نقطه‌ی x در طول این میله، مقاومت dR یک بخش (دیفرانسیلی) باریک به پهنای dx با $dR = ۵٫۰۰x\,dx$ داده می‌شود که dR بر حسب اهم و x بر حسب متر است. شکل ۲۶-۳۶ ب، چنین بخش باریکی را نشان می‌دهد. قرار است طولی از این میله بین $x = ۰$ و $x = L$ را ببرید و سپس آن را به یک باتری با اختلاف پتانسیل $V = ۵٫۰V$ وصل کنید (شکل ۲۶-۳۶ پ). به جریانی در طول این سیم نیاز دارید که انرژی را با آهنگ ۲۰۰W به انرژی گرمایی منتقل کند. در چه مکان $x = L$ای باید این میله را ببرید؟



شکل ۲۶-۳۶ مسئله‌ی ۵۴

حل با استفاده از $P = V^2/R$، مقاومت $R = (۵٫۰\,V)^2/۲۰۰\,W = ۰٫۱۲۵\,\Omega$ می‌شود. از طرفی طبق صورت مسئله $dR = ۵٫۰۰x\,dx$ است و بنابراین باید داشته باشیم

$$\int_0^L ۵٫۰۰x\,dx = ۰٫۱۲۵\,\Omega$$

و از آنجا $\frac{۲}{۵}L^2 = ۰٫۱۲۵$ و در نتیجه $L = ۰٫۲۲۴\,m$ می‌شود.

مسئله‌های تکمیلی

۵۵ یک گرمکن از جنس نیکروم، وقتی اختلاف پتانسیل اعمال شده ۱۱۰V و دمای سیم ۸۰۰°C باشد، ۵۰۰W تلف می‌کند. اگر با فرو بردن این سیم در یک حمام روغن سردکننده، دمای آن در ۲۰۰°C ثابت نگه داشته شود، آهنگ اتلاف چقدر خواهد شد؟ اختلاف پتانسیل اعمال شده یکسان، و αی نیکروم در دمای ۸۰۰°C برابر با $۴٫۰ \times ۱۰^{-۴}\,K^{-1}$ است.

حل R_H را مقاومت در دمای بالاتر (۸۰۰°C) و R_L را مقاومت در دمای پایین‌تر (۲۰۰°C) بگیرید. چون اختلاف پتانسیل برای هر دو دما یکی است، توان تلف شده در دمای پایین‌تر $P_L = V^2/R_L$، و توان تلف شده در دمای بالاتر $P_H = V^2/R_H$ است. بنابراین $P_L = (P_H/R_L)P_H$ می‌شود با چشم‌پوشی از تغییر ناچیز طول و سطح مقطع گرمکن با دما، $R_L = R_H + \alpha R_H \Delta T$ می‌شود که در آن تغییر دما $\Delta T = T_L - T_H = -۶۰۰°C = -۶۰۰K$ است. بنابراین داریم:

$$P_L = \frac{R_H}{R_H + \alpha R_H \Delta T} P_H = \frac{P_H}{۱ + \alpha \Delta T}$$

$$= \frac{۵۰۰\,W}{۱ + (۴٫۰ \times ۱۰^{-۴}/K)(-۶۰۰\,K)} = ۶۶۰\,W$$

۵۶ اختلاف پتانسیل ۱٫۲۰V به ۳۳٫۰m طول یک سیم مسی نمره‌ی ۱۸ (به قطر ۰٫۰۴۰۰in.) اعمال می‌شود. (الف) جریان، (ب) بزرگی چگالی جریان، (پ) بزرگی میدان الکتریکی داخل سیم، و (ت) آهنگی که با آن انرژی گرمایی در سیم ظاهر می‌شود چقدر است؟

حل (الف) جریان برابر است با

$$i = \frac{V}{R} = \frac{V}{\rho L/A} = \frac{\pi V d^2}{۴\rho L}$$

$$= \frac{\pi(۱٫۲۰\,V)\left[(۰٫۰۴۰۰\,in.)(۲٫۵۴ \times ۱۰^{-۲}\,m/in.)\right]^2}{۴(۱٫۶۹ \times ۱۰^{-۸}\,\Omega \cdot m)(۳۳٫۰\,m)} = ۱٫۷۴\,A$$

(ب) بزرگی بردار چگالی جریان برابر است با

$$|\vec{J}| = \frac{i}{A} = \frac{۴i}{\pi d^2} = \frac{۴(۱٫۷۴\,A)}{\pi\left[(۰٫۰۴۰۰\,in.)(۲٫۵۴ \times ۱۰^{-۲}\,m/in.)\right]^2}$$

$$= ۲٫۱۵ \times ۱۰^{۶}\,A/m^2$$

(پ) میدان الکتریکی چنین می‌شود:

$$E = \frac{V}{L} = \frac{۱٫۲۰\,V}{۳۳٫۰\,m} = ۳٫۶۳ \times ۱۰^{-۲}\,V/m$$

و نیز می‌توانستیم از $E = \rho J$ استفاده کنیم که در آن $\rho = ۱٫۶۹ \times ۱۰^{-۸}\,\Omega \cdot m$ است.

(ت) آهنگ تولید انرژی در سیم چنین می‌شود:

$$P = Vi = (۱٫۲۰\,V)(۱٫۷۴\,A) = ۲٫۰۹\,W$$

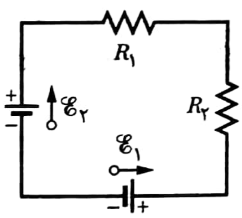
Scanned by CamScanner

فصل بیست و هفتم

مدارهای الکتریکی

بخش ۲۷-۱ مدارهای تک‌حلقه‌ای

۱ WWW در شکل ۲۷-۲۵، emf باتری‌های آرمانی عبارت‌اند از $\mathscr{E}_1 = ۱۲V$ و $\mathscr{E}_2 = ۶/۰V$ و مقاومت‌ها $R_1 = ۴/۰\Omega$ و $R_2 = ۸/۰\Omega$ هستند. (الف) جریان، آهنگ اتلاف در (ب) مقاومت ۱ و (پ) مقاومت ۲ و آهنگ انتقال انرژی در (ت) باتری ۱ و (ث) باتری ۲ چقدر است؟ آیا انرژی توسط (ج) باتری ۱ و (چ) باتری ۲ تولید یا مصرف می‌شود؟



شکل ۲۷-۲۵ مسئله‌ی ۱

حل (الف) حلقه‌ی جریان را پادساعتگرد در نظر می‌گیریم و قاعده‌ی حلقه را به کار می‌گیریم.

$$\mathscr{E}_1 - iR_2 - iR_1 - \mathscr{E}_2 = ۰$$

و از آنجا برای i خواهیم داشت:

$$i = \frac{\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2}{R_1 + R_2} = \frac{۱۲V - ۶/۰V}{۴/۰\Omega + ۸/۰\Omega} = ۰/۵۰A$$

علامت مثبت نشان‌دهنده‌ی آن است که جهت جریان را به درستی انتخاب کرده‌ایم.

(ب) توان تلف شده در مقاومت R_1 چنین می‌شود:

$$P_1 = i^2 R_1 = (۰/۵۰A)^2(۴/۰\Omega) = ۱/۰W$$

(پ) توان تلف شده در مقاومت R_2 چنین می‌شود:

$$P_2 = i^2 R_2 = (۰/۵۰A)^2(۸/۰\Omega) = ۲/۰W$$

(ت) باتری، انرژی را با آهنگ $P = i\mathscr{E}$ تهیه می‌کند، که $\mathscr{E}$ نیروی محرکه‌ی باتری است. بنابراین توان باتری ۱ چنین می‌شود.

$$P_1 = i\mathscr{E}_1 = (۰/۵۰A)^2(۱۲V) = ۶/۰W$$

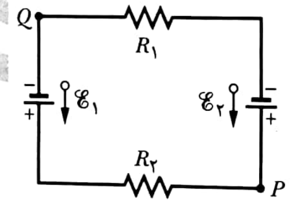
(ث) و به همان ترتیب برای باتری ۲ داریم

$$P_2 = i\mathscr{E}_2 = (۰/۵۰A)^2(۶/۰V) = ۳/۰W$$

(ج) در باتری ۱، جهت جریان همسو با emf است. بنابراین، این باتری برای مدار، انرژی تهیه می‌کند و تخلیه می‌شود.

(چ) در باتری ۲، جهت جریان در خلاف جهت emf است. بنابراین، این باتری برای مدار، انرژی جذب می‌کند و باردار می‌شود.

۲ در شکل ۲۷-۲۶، emf باتری‌های آرمانی عبارت‌اند از $\mathscr{E}_1 = ۱۵۰V$ و $\mathscr{E}_2 = ۵۰V$ و مقاومت‌ها $R_1 = ۳/۰\Omega$ و $R_2 = ۲/۰\Omega$ هستند. اگر پتانسیل در نقطه‌ی P برابر ۱۰۰V تعریف شود، پتانسیل در نقطه‌ی Q چقدر می‌شود؟



شکل ۲۷-۲۶ مسئله‌ی ۲

حل از مقایسه‌ی نیروهای محرکه‌ی دو باتری درمی‌یابیم که جریان مدار در سوی پادساعتگرد است. حال از نقطه‌ی P در جهت جریان به سوی نقطه‌ی Q حرکت می‌کنیم:

$$V_P - \mathscr{E}_2 - iR_1 = V_Q$$

که در آن $\mathscr{E}_2 = ۵۰V$ و $R_1 = ۳/۰\Omega$ است. برای محاسبه‌ی V_Q به جریان i مدار نیاز داریم. به این منظور، مدار را به‌طور کامل دور می‌زنیم و از قاعده‌ی حلقه استفاده می‌کنیم.

$$-\mathscr{E}_2 - iR_1 + \mathscr{E}_1 - iR_2 = ۰$$

از آنجا i چنین می‌شود:

$$i = \frac{\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2}{R_1 + R_2} = \frac{۱۵۰V - ۵۰V}{۳/۰\Omega + ۲/۰\Omega} = ۲۰A$$

و حال می‌توانیم V_Q را با استفاده از رابطه‌ی اول به‌دست آوریم:

$$V_Q = ۱۰۰V - ۵۰V - (۲۰A)(۳/۰\Omega) = -۱۰V$$

می‌توانستیم V_Q را از مسیر دیگری (خلاف جهت جریان) نیز محاسبه کنیم. در آن صورت داشتیم:

$$V_Q = V_P + iR_۲ - \mathscr{E}_۲$$
$$= ۱۰۰\text{V} + (۲۰\text{A})(۲٫۰\Omega) - ۱۵۰\text{V} = -۱۰\text{V}$$

۳• ILW باتری اتومبیلی با emf برابر ۱۲V و مقاومت داخلی ۰٫۰۴۰Ω، با جریان ۵۰A باردار می‌شود. مطلوب است (الف) اختلاف پتانسیل Vی دو سر پایانه‌های باتری، (ب) آهنگ P_r اتلاف انرژی در داخل باتری، (پ) آهنگ P_{emf} تبدیل انرژی به شکل شیمیایی. هرگاه این باتری برای تولید ۵۰A مورد نیاز استارت موتور به‌کار برده شود (ت) V و (ث) P_r چقدر می‌شوند؟

حل (الف) اختلاف پتانسیل برابر است با

$$V = \mathscr{E} + ir = ۱۲\text{V} + (۵۰\text{A})(۰٫۰۴۰\Omega) = ۱۴\text{V}$$

(ب) آهنگ اتلاف انرژی برابر است با

$$P_r = i^۲ r = (۵۰\text{A})^۲(۰٫۰۴۰\Omega) = ۱٫۰\times۱۰^۲\text{ W}$$

(پ) آهنگ تبدیل انرژی الکتریکی به انرژی شیمیایی برابر است با

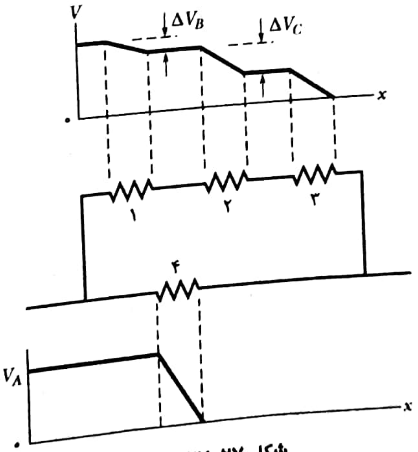
$$P_{\text{emf}} = i\mathscr{E} = (۵۰\text{A})(۱۲\text{V}) = ۶٫۰\times۱۰^۲\text{ W}$$

(ت) در این حالت اختلاف پتانسیل چنین می‌شود

$$V = \mathscr{E} - ir = ۱۲\text{V} - (۵۰\text{A})(۰٫۰۴۰\Omega) = ۱٫۰\times۱۰^۱\text{ W}$$

که همان مقدار قبلی است.

۴• GO شکل ۲۷-۲۷ مداری شامل چهار مقاومت را نشان می‌دهد که به یک مدار بزرگتر متصل شده‌اند. نمودار زیر این مدار، پتانسیل الکتریکی $V(x)$ را برحسب تابعی از مکان x در طول شاخه‌ی پایینی مدار نشان می‌دهد که از مقاومت ۴ می‌گذرد؛ پتانسیل V_A برابر ۱۲٫۰V است. نمودار بالای این مدار، پتانسیل الکتریکی $V(x)$ را برحسب مکان x در طول شاخه‌ی بالایی مدار نشان می‌دهد که از مقاومت‌های ۱، ۲، و ۳ می‌گذرد؛ اختلاف پتانسیل‌ها عبارت‌اند از $\Delta V_B = ۲٫۰۰\text{V}$ و $\Delta V_C = ۵٫۰۰\text{V}$. مقاومت ۳ برابر ۲۰۰Ω است. اندازه‌ی (الف) مقاومت ۱ و (ب) مقاومت ۲ چقدر است؟



شکل ۲۷-۲۷ مسئله‌ی ۴

حل (الف) از روی نمودار پایین درمی‌یابیم که کلِ افت پتانسیل در شاخه‌ی بالایی ۱۲٫۰V است. افت پتانسیل روی مقاومت‌های ۱ و ۲ به‌ترتیب ۲٫۰۰V و ۵٫۰۰V است. بنابراین افت پتانسیل روی مقاومت ۳ برابر ۵٫۰۰V می‌شود. با توجه به اینکه $R_۳ = ۲۰۰\Omega$ است، جریان عبوری از آن $(۵٫۰۰\text{V})/(۲۰۰\Omega) = ۲۵٫۰\text{mA}$ می‌شود. این جریان، همان جریان عبوری از مقاومت $R_۱$ نیز هست و با توجه به اینکه اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت $R_۱$ برابر ۲٫۰۰V است، $R_۱ = ۲٫۰۰\text{V}/۲۵٫۰\text{mA} = ۸۰٫۰\Omega$ می‌شود.

(ب) اختلاف پتانسیل دو سر $R_۲$ برابر اختلاف پتانسیل دو سر $R_۳$ است. بنابراین مقاومت آن نیز برابر با ۲۰۰Ω است.

۵• یک جریان ۵٫۰A توسط باتری‌ای با قابلیت باردار شدن مجدد و emf برابر با ۶٫۰V در یک مدار برقرار شده است. انرژی شیمیایی باتری چقدر کاهش پیدا می‌کند؟

حل انرژی شیمیایی باتری به اندازه‌ی $\Delta E = q\mathscr{E}$ کاهش می‌یابد که q باری است که در زمان $\Delta t = ۶٫۰\text{min}$ عبور می‌کند، و $\mathscr{E}$ نیروی محرکه‌ی باتری است. اگر i جریان باشد، $q = i\Delta t$ می‌شود و بنابراین داریم

$$\Delta E = i\mathscr{E}\Delta t = (۵٫۰\text{A})(۶٫۰\text{V})(۶٫۰\text{min})(۶۰\text{s/min})$$
$$= ۱٫۱\times۱۰^۴\text{ J}$$

۶• باتری یک چراغ‌قوه‌ی معمولی می‌تواند پیش از آنکه خراب شود حدود ۲٫۰W·h انرژی تولید کند. (الف) اگر قیمت یک باتری ۰٫۸۰ دلار باشد، هزینه‌ی عمل یک لامپ ۱۰۰W با استفاده از این باتری در مدت ۸٫۰h چقدر می‌شود؟ (ب) اگر انرژی با آهنگ ۰٫۰۶ دلار در هر کیلووات ساعت فراهم شود، این هزینه چقدر می‌شود؟

حل (الف) هزینه‌ی عملکرد برابر است با

$$(۱۰۰\text{W}\cdot۸٫۰\text{h}/۲٫۰\text{W}\cdot\text{h})(\$۰٫۸۰) = \$۳٫۲\times۱۰^۲$$

(ب) هزینه‌ی توان فراهم شده برابر است با

$$(۱۰۰\text{W}\cdot۸٫۰\text{h}/۱۰^۳\text{ W}\cdot\text{h})(\$۰٫۰۶) = \$۰٫۰۴۸ = ۴۸\text{cents}$$

۷• سیمی با مقاومت ۵٫۰Ω به یک باتری که emf آن ۲٫۰V و مقاومت داخلی آن ۱٫۰Ω است بسته شده است. در مدت ۲٫۰min، (الف) چقدر انرژی از انرژی شیمیایی باتری منتقل می‌شود؟ (ب) چقدر انرژی به صورت گرمایی در سیم تلف می‌شود؟ (پ) چقدر انرژی به صورت گرمایی در باتری تلف می‌شود؟

حل (الف) انرژی تبدیل شده برابر است با

$$U = Pt = \frac{\mathscr{E}^۲ t}{r+R} = \frac{(۲٫۰\text{V})^۲(۲٫۰\text{min})(۶۰\text{s/min})}{۱٫۰\Omega + ۵٫۰\Omega} = ۸۰\text{J}$$

(ب) مقدار انرژی گرمایی تولید شده برابر است با

Scanned by CamScanner

$$U' = i^{۲}Rt = \left(\frac{\mathscr{E}}{r+R}\right)^{۲} Rt$$

$$= \left(\frac{۲٫۰\,\mathrm{V}}{۱٫۰\Omega + ۵٫۰\Omega}\right)^{۲}(۵٫۰\Omega)(۲٫۰\,\mathrm{min})(۶۰\,\mathrm{s/min})$$

$$\approx ۶۷\,\mathrm{J}$$

(پ) اگر انرژی گرمایی مصرف شده در مقاومت داخلی را محاسبه کنیم، خواهیم داشت

$$U'_{۲} = i^{۲}rt = \left(\frac{۲٫۰\,\mathrm{V}}{۱٫۰\Omega + ۵٫۰\Omega}\right)^{۲}(۱٫۰\Omega)(۲٫۰\,\mathrm{min})(۶۰\,\mathrm{s/min})$$

$$\approx ۱۳\,\mathrm{J}$$

اگر توجه کنید درمی‌یابید که این مقدار برابر با تفاوت پاسخ‌های قسمت‌های الف و ب است. پس، دلیل تفاوت بین قسمت‌های الف و ب به خاطر مصرف انرژی در مقاومت داخلی است.

۸• یک نوع باتری اتومبیل با emf برابر $۱۲٫۰\,\mathrm{V}$ دارای بار اولیه‌ی $۱۲۰\,\mathrm{A\cdot h}$ است. با فرض آنکه پتانسیل دو سر پایانه‌های باتری تا زمانی که باتری کاملاً تخلیه شود ثابت بماند، این باتری برای چند ساعت می‌تواند انرژی را با آهنگ $۱۰۰\,\mathrm{W}$ تولید کند؟

حل اگر P آهنگ تخلیه‌ی انرژی باتری و Δt زمان آن باشد، آنگاه $\Delta E = P\Delta t$ انرژی تخلیه شده در زمان Δt می‌شود. اگر q بار عبوری از باتری در زمان Δt و $\mathscr{E}$ نیروی محرکه‌ی الکتریکی باتری باشد، آنگاه $\Delta E = q\mathscr{E}$ می‌شود. با برابر قرار دادن دو عبارت ΔE و حلّ نتیجه‌ی آن برای Δt خواهیم داشت:

$$\Delta t = \frac{q\mathscr{E}}{P} = \frac{(۱۲۰\,\mathrm{A\cdot h})(۱۲٫۰\,\mathrm{V})}{۱۰۰\,\mathrm{W}} = ۱۴٫۴\,\mathrm{h}$$

۹• برحسب الکترون‌ـ ولت چقدر کار باید انجام گیرد تا یک باتری آرمانی با emf برابر با $۱۲٫۰\,\mathrm{V}$، الکترونی را از پایانه‌ی مثبت به پایانه‌ی منفی باتری برساند؟ (ب) اگر در هر ثانیه $۳٫۴۰\times۱۰^{۱۸}$ الکترون از باتری عبور کند، توان باتری بر حسب وات چقدر است؟

حل (الف) کار انجام شده توسط باتری به تغییر انرژی پتانسیل مربوط است:

$$q\Delta V = eV = e(۱۲٫۰\,\mathrm{V}) = ۱۲٫۰\,\mathrm{eV}$$

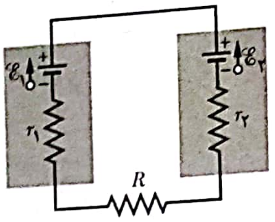
(ب) توان باتری برابر است با

$$P = iV = neV$$

$$= (۳٫۴۰\times۱۰^{۱۸}/\mathrm{s})(۱٫۶۰\times۱۰^{-۱۹}\,\mathrm{C})(۱۲٫۰\,\mathrm{V})$$

$$= ۶٫۵۳\,\mathrm{W}$$

۱۰•• (الف) در شکل ۲۷-۲۸ مقدار R باید چقدر باشد تا جریان مدار $۱٫۰\,\mathrm{mA}$ باشد؟ $\mathscr{E}_۱ = ۲٫۰\,\mathrm{V}$، $\mathscr{E}_۲ = ۳٫۰\,\mathrm{V}$ و $r_۱ = r_۲ = ۳٫۰\,\Omega$ است. (ب) آهنگی که با آن انرژی گرمایی در R ظاهر می‌شود چقدر است؟



شکل ۲۷-۲۸ مسئله‌ی ۱۰

حل چون $\mathscr{E}_۲ > \mathscr{E}_۱$ است، جریان در سوی پادساعتگرد خواهد بود. آنگاه از قاعده‌ی حلقه خواهیم داشت:

$$-\mathscr{E}_۱ - ir_۱ - iR - ir_۲ + \mathscr{E}_۲ = ۰$$

و از آنجا مقاومت R را به‌دست می‌آوریم:

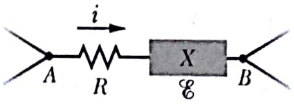
$$R = \frac{\mathscr{E}_۲ - \mathscr{E}_۱}{i} - r_۱ - r_۲ = \frac{۳٫۰\,\mathrm{V} - ۲٫۰\,\mathrm{V}}{۱٫۰\times۱۰^{-۳}\,\mathrm{A}} - ۳٫۰\Omega - ۳٫۰\Omega$$

$$= ۹٫۹\times۱۰^{۲}\,\Omega$$

(ب) آهنگ ایجاد انرژی گرمایی در مقاومت R چنین می‌شود:

$$P = i^{۲}R = (۱٫۰\times۱۰^{-۳}\,\mathrm{A})^{۲}(۹٫۹\times۱۰^{۲}\,\Omega) = ۹٫۹\times۱۰^{-۴}\,\mathrm{W}$$

۱۱•• در شکل ۲۷-۲۹ بخش AB ی مدار، وقتی جریان $i = ۱٫۰\,\mathrm{A}$ در جهت نشان داده شده از آن می‌گذرد، انرژی را با آهنگ $۵۰\,\mathrm{W}$ جذب می‌کند. اندازه‌ی مقاومت $R = ۲٫۰\,\Omega$ است. (الف) اختلاف پتانسیل میان A و B چقدر است؟ وسیله‌ی emf ای که با X مشخص شده است، مقاومت داخلی ندارد. (ب) emf آن چقدر است؟ (پ) آیا نقطه‌ی B به پایانه‌ی مثبت X وصل شده است یا به پایانه‌ی منفی آن؟



شکل ۲۷-۲۹ مسئله‌ی ۱۱

حل (الف) اگر i جریان و ΔV اختلاف پتانسیل باشد، آنگاه توان جذب شده با $P = i\Delta V$ داده می‌شود. توجه کنید که چون انرژی جذب می‌شود، پتانسیل A از B بیشتر و ΔV_{AB} مثبت است. در نتیجه داریم

$$\Delta V_{AB} = \frac{P}{i} = \frac{۵۰\,\mathrm{W}}{۱٫۰\,\mathrm{A}} = ۵۰\,\mathrm{V}$$

(ب) از نقطه‌ی A به سوی نقطه‌ی B در جهت جریان حرکت و اختلاف پتانسیل را محاسبه می‌کنیم:

$$V_A - iR - \mathscr{E} = V_B$$

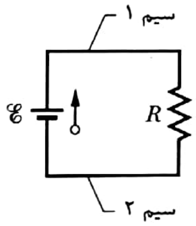
که $\mathscr{E}$ نیروی محرکه‌ی الکتریکی منبع X است. از آنجا $\mathscr{E}$ چنین می‌شود:

$$\mathscr{E} = V_A - V_B - iR = ۵۰\,\mathrm{V} - (۱٫۰\,\mathrm{A})(۲٫۰\,\Omega) = ۴۸\,\mathrm{V}$$

(پ) مقدار مثبت $\mathscr{E}$ نشان‌دهنده‌ی این است که سوی نیروی محرکه‌ی الکتریکی به سمت چپ است. یعنی پایانه‌ی منفی آن در نقطه‌ی B است.

Scanned by CamScanner

۱۲●● شکل ۲۷-۳۰ وسیله‌ای به مقاومت $R = 6.00\,\Omega$ را نشان می‌دهد که توسط دو سیم مسی به یک باتری آرمانی با emf برابر با $\mathscr{E} = 12.0\,V$ بسته شده است. طول هر سیم ۲۰٫۰cm و شعاع آن ۱٫۰۰mm است. در هنگام بررسی چنین مدارهایی در این فصل، معمولاً از اختلاف پتانسیل در طول سیم‌ها و انتقال انرژی به انرژی گرمایی در آن چشم‌پوشی می‌کنیم. صحت چنین چشم‌پوشی‌ای را در مدار شکل ۲۷-۳۰ تحقیق کنید: اختلاف پتانسیل دو سر (الف) مقاومت و (ب) هر یک از دو بخش سیم چقدر است؟ انرژی با چه آهنگی به (پ) مقاومت و (ت) هر بخش از سیم‌ها منتقل می‌شود؟



شکل ۲۷-۳۰ مسئله‌ی ۱۲

حل (الف) برای هر دو سیم $R_{سیم} = \rho L/A$ و $A = \pi r^2$ است. در نتیجه داریم:

$$R_{سیم} = (1.69\times10^{-8}\,\Omega\cdot m)(0.200\,m)/\pi(0.00100\,m)^2$$
$$= 0.00107\,\Omega$$

بنابراین مقاومت کل $R_{کل} = 2R_{سیم} + 6.00\,\Omega$ می‌شود. از تقسیم نیروی محرکه‌ی باتری ($\mathscr{E} = 12.0\,V$) بر این مقدار، جریان عبوری از مدار به‌دست می‌آید: $i = 1.99\,A$. از اینجا می‌توانیم اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت ۶٫۰۰Ω را به‌دست آوریم:

$$V_R = (1.99\,A)(6.00\,\Omega) \approx 12.0\,V$$

(ب) به همین ترتیب، اختلاف پتانسیل دو سر هر سیم چنین می‌شود:

$$V_{سیم} = (1.99\,A)(0.00107\,\Omega) \approx 2.15\times10^{-3}\,V$$
$$= 2.15\,mV$$

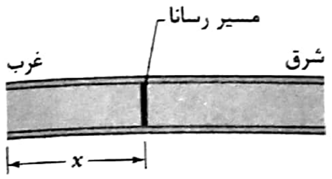
(پ) آهنگ اتلاف انرژی در مقاومت چنین می‌شود:

$$P_R = i^2R = (1.99\,A)^2(6.00\,\Omega) \approx 24.0\,W$$

(ت) به‌همان ترتیب آهنگ اتلاف انرژی در سیم به‌دست می‌آید:

$$P_{سیم} = i^2R_{سیم} = (1.99\,A)^2(0.00107\,\Omega) \approx 4.30\times10^{-3}\,W$$
$$= 4.30\,mW$$

۱۳●● یک کابل زیرزمینی به طول ۱۰km از شرق به غرب امتداد دارد و شامل دو سیم موازی است که مقاومت هر کدام ۱۳Ω/km است. وقتی یک مسیر رسانا به مقاومت R سیم‌ها را به هم متصل کند، اتصال الکتریکی کوتاهی در فاصله‌ی x از انتهای غربی این کابل ایجاد می‌شود (شکل ۲۷-۳۱). آنگاه مقاومت سیم‌ها و اتصال کوتاه، وقتی از انتهای شرقی کابل اندازه‌گیری شود برابر با ۱۰۰Ω و وقتی از انتهای غربی اندازه‌گیری شود برابر با ۲۰۰Ω است. (الف) x و (ب) R چقدرند؟



شکل ۲۷-۳۱ مسئله‌ی ۱۳

حل (الف) طبق صورت مسئله $L = 10\,km$ و $\alpha = 13\,\Omega/km$ است. با اندازه‌گیری مقاومت نسبت به شرق داریم:

$$R_1 = 100\,\Omega = 2\alpha(L-x) + R$$

و با اندازه‌گیری مقاومت نسبت به غرب داریم:

$$R_2 = 200\,\Omega = 2\alpha x + R$$

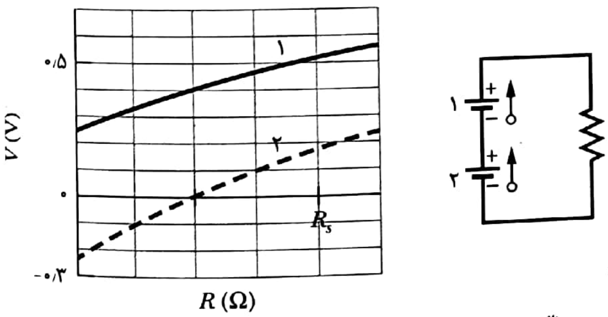
از تفریق R_1 از R_2 خواهیم داشت:

$$x = \frac{R_2 - R_1}{4\alpha} + \frac{L}{2} = \frac{200\,\Omega - 100\,\Omega}{4(13\,\Omega/km)} + \frac{10\,km}{2} = 6.9\,km$$

(ب) همچنین از جمع R_1 با R_2 خواهیم داشت

$$R = \frac{R_1 + R_2}{2} - \alpha L = \frac{100\,\Omega + 200\,\Omega}{2} - (13\,\Omega/km)(10\,km)$$
$$= 20\,\Omega$$

۱۴●● GO در شکل ۲۷-۳۲ الف هر دو باتری دارای emf ای برابر با $\mathscr{E} = 1.20\,V$ هستند و مقاومت خارجی R، مقاومتی متغیر است. شکل ۲۷-۳۲ ب پتانسیل الکتریکی V ی میان پایانه‌های هر باتری را برحسب تابعی از R نشان می‌دهد: منحنی ۱ مربوط به باتری ۱ است و منحنی ۲ مربوط به باتری ۲. محور افقی با $R_s = 0.20\,\Omega$ مقیاس‌بندی شده است. مقاومت داخلی (الف) باتری ۱ و (ب) باتری ۲ چقدر است؟



(ب) (الف)

شکل ۲۷-۳۲ مسئله‌ی ۱۴

حل (الف) و (ب) نیروی محرکه‌ی باتری‌ها را $\mathscr{E}_1$ و $\mathscr{E}_2$ می‌گیریم. آنگاه از قاعده‌ی حلقه خواهیم داشت:

$$\mathscr{E}_2 - ir_2 + \mathscr{E}_1 - ir_1 - iR = 0$$

و از آنجا i چنین می‌شود:

$$i = \frac{\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2}{r_1 + r_2 + R}$$

ولتاژ پایانه‌ی باتری ۱ برابر با $\mathscr{E}_{1T}$ است که خود برابر $\mathscr{E}_1 - ir_1$ است. به همین ترتیب ولتاژ پایانه‌ی باتری ۲ برابر با $\mathscr{E}_{2T} = \mathscr{E}_2 - ir_2$ است. بنابراین خواهیم داشت:

Scanned by CamScanner

$$\mathcal{E}_{۱T}=\mathcal{E}_۲-\frac{\mathcal{E}_۱+\mathcal{E}_۲}{r_۱+r_۲+R}r_۱ \quad , \quad \mathcal{E}_{۲T}=\mathcal{E}_۲-\frac{\mathcal{E}_۱+\mathcal{E}_۲}{r_۱+r_۲+R}r_۲$$

طبق صورت مسئله $\mathcal{E}_۱=\mathcal{E}_۲=۱٫۲۰\text{V}$ است. از منحنی شکل ب درمی‌یابیم که به‌ازای $R=۰٫۱۰\Omega$، $\mathcal{E}_{۱T}=۰٫۴۰\text{V}$ و $\mathcal{E}_{۲T}=۰$ است. با قرار دادن این مقادیر در دو معادله‌ی بالا و حلّ هم‌زمان آنها، $r_۱$ و $r_۲$ به‌دست می‌آید. از آنجا $r_۱=۰٫۲۰\Omega$ و $r_۲=۰٫۳۰\Omega$ می‌شود.

۱۵۰۰ ILW جریان در یک مدار تک‌حلقه‌ای با مقاومت R برابر با $۵٫۰\text{A}$ است. وقتی مقاومت اضافی $۲٫۰\Omega$ به‌طور متوالی به R بسته شود، جریان به $۴٫۰\text{A}$ افت می‌کند. مقاومت R چقدر است؟

حل چون مقاومت داخلی وسیله‌ی emf برای هر دو مدار یکسان است، از آن چشم‌پوشی می‌کنیم. برای مدار اول $\mathcal{E}=Ri$ و برای مدار دوم $\mathcal{E}=(R+R')i'$ می‌شود که $i=۵٫۰\text{A}$، $i'=۴٫۰\text{A}$ و $R'=۲٫۰\Omega$ است. بنابراین از برابر قرار دادن طرف راست معادله‌های بالا، برای R خواهیم داشت:

$$R=\frac{i'R'}{i-i'}=\frac{(۴٫۰\text{A})(۲٫۰\Omega)}{۵٫۰\text{A}-۴٫۰\text{A}}=۸٫۰\Omega$$

۱۶۰۰۰ هرگاه یک مقاومت ۵۰۰Ω به دو سر یک پیل خورشیدی بسته شود، اختلاف پتانسیل $۰٫۱۰\text{V}$ و هرگاه به مقاومتی ۱۰۰۰Ω بسته شود، اختلاف پتانسیل $۰٫۱۵\text{V}$ ایجاد می‌شود. (الف) مقاومت داخلی و (ب) emf پیل خورشیدی چقدر است؟ (پ) مساحت این پیل $۵٫۰\text{cm}^۲$ و آهنگ دریافت انرژی از نور بر واحد سطح آن برابر با $۲٫۰\text{mW/cm}^۲$ است. بازده‌ی این پیل برای تبدیل انرژی نور به انرژی گرمایی در یک مقاومت خارجی ۱۰۰۰Ω چقدر است؟

حل نیروی محرکه‌ی الکتریکی سلول خورشیدی را با $\mathcal{E}$ و اختلاف پتانسیل دو سر آن را با V نمایش می‌دهیم. بنابراین برای هر دو حالت داریم

$$V=\mathcal{E}-ir=\mathcal{E}-\left(\frac{\mathcal{E}}{r+R}\right)r=\mathcal{E}\left(۱-\frac{r}{r+R}\right)$$

که برای دو حالت، به‌ترتیب چنین به‌دست می‌دهد:

$$۰٫۱۰=\mathcal{E}\left(۱-\frac{r}{r+۵۰۰}\right)\ ,\ ۰٫۱۵=\mathcal{E}\left(۱-\frac{r}{r+۱۰۰۰}\right)$$

(الف) از تقسیم دو رابطه‌ی بالا بر هم خواهیم داشت

$$\frac{\dfrac{۵۰۰}{r+۵۰۰}}{\dfrac{۱۰۰۰}{r+۱۰۰۰}}=\frac{۰٫۱۰}{۰٫۱۵} \Rightarrow \frac{(r+۱۰۰۰)}{۲(r+۵۰۰)}=\frac{۲٫۰}{۳٫۰}$$

و از آنجا $r=۱٫۰\times۱۰^۳\Omega$ می‌شود.

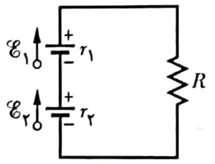
(ب) با قرار دادن $r=۱٫۰\times۱۰^۳\ \Omega$ در هر یک از دو معادله‌ی بالا به $\mathcal{E}=۰٫۳۰\text{V}$ می‌رسیم.

(پ) بازده سلول چنین می‌شود:

$$\frac{P_{\text{دریافتی}}}{P_{\text{دریافتی}}}=\frac{V^۲/R}{P_{\text{دریافتی}}}=\frac{(۰٫۱۵\text{V})^۲/(۱٫۰\times۱۰^۳\ \Omega)}{(۵٫۰\text{cm}^۲)(۲٫۰\times۱۰^{-۳}\ \text{W/cm}^۲)}$$

$$=۲٫۲\times۱۰^{-۳}=\%۰٫۲۲$$

۱۷۰۰۰ در شکل ۲۷-۳۳، باتری ۱ دارای emf ای برابر با $\mathcal{E}_۱=۱۲٫۰\text{V}$ و مقاومت داخلی $r_۱=۰٫۰۱۶\Omega$ و باتری ۲ دارای emf برابر با $\mathcal{E}_۲=۱۲٫۰\text{V}$ و مقاومت داخلی $r_۲=۰٫۰۱۲\Omega$ است. باتری‌ها به‌طور متوالی به مقاومت خارجی R بسته شده‌اند. (الف) به‌ازای چه مقداری از R، اختلاف پتانسیل دو سر یکی از باتری‌ها صفر می‌شود؟ (ب) این، کدام باتری است؟



شکل ۲۷-۳۳ مسئله‌ی ۱۷

حل نیروی محرکه‌ی الکتریکی باتری‌ها را $\mathcal{E}_۱$ و $\mathcal{E}_۲$ در نظر می‌گیریم و در پایان محاسبات $\mathcal{E}_۱=\mathcal{E}_۲=۱۲٫۰\text{V}$ قرار می‌دهیم. باتری‌ها به‌طور متوالی بسته شده‌اند و بنابراین ولتاژهای آنها با هم جمع می‌شود. مقاومت کل در مدار $R_{\text{کل}}=R+r_۱+r_۲$ می‌شود که طبق صورت مسئله $r_۱>r_۲$ است. چون باتری ۱ دارای مقاومت داخلی بزرگ‌تری است از $V=\mathcal{E}-ir$ نتیجه می‌گیریم که ولتاژ دو سر این باتری می‌تواند صفر شود.

(الف) جریان در مدار برابر است با

$$i=\frac{\mathcal{E}_۱+\mathcal{E}_۲}{r_۱+r_۲+R}$$

برای آنکه ولتاژ دو سر پایانه‌ی باتری ۱ صفر شود، باید $\mathcal{E}_۱=ir_۱$ باشد. با قراردادن $i=\mathcal{E}_۱/r_۱$ از این رابطه به‌جای i در معادله‌ی بالا و حلّ نتیجه‌ی آن برای R خواهیم داشت:

$$R=\frac{\mathcal{E}_۲r_۱-\mathcal{E}_۱r_۲}{\mathcal{E}_۲}=\frac{(۱۲٫۰\text{V})+(۰٫۰۱۶\Omega)-(۱۲٫۰\text{V})(۰٫۰۱۲\Omega)}{۱۲٫۰\text{V}}$$

$$=۰٫۰۰۴۰\Omega$$

توجه کنید که معادله‌ی بالا به‌ازای $\mathcal{E}_۱=\mathcal{E}_۲$ به $R=r_۱-r_۲$ می‌انجامد.

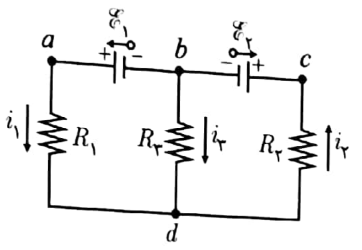
(ب) همان‌طور که پیشتر گفتیم، این امر برای باتری ۱ می‌تواند رخ دهد.

بخش ۲۷-۳ مدارهای چندحلقه‌ای

۱۸۰ در شکل ۲۷-۹، اگر $\mathcal{E}_۱=۴٫۰\text{V}$، $\mathcal{E}_۲=۱٫۰\text{V}$، $R_۱=R_۲=۱۰\Omega$، $R_۳=۵٫۰\Omega$ و باتری آرمانی باشد، اختلاف پتانسیل V_d-V_c میان نقطه‌های d و c چقدر است؟

حل دو حلقه‌ی جریان در جهت‌های $i_۱$ و $i_۲$ شکل در نظر می‌گیریم و قاعده‌ی حلقه را در این دو حلقه به‌کار می‌گیریم.

Scanned by CamScanner



$$\mathscr{E}_1 - i_1R_1 + i_3R_3 = ۰ \Rightarrow ۴٫۰ - ۱۰i_1 + ۵٫۰i_3 = ۰$$

$$\mathscr{E}_2 - i_2R_2 + i_3R_3 = ۰ \Rightarrow ۱٫۰ + ۱۰i_2 + ۵٫۰i_3 = ۰$$

یک معادله‌ی دیگر هم از انشعاب جریان‌ها داریم

$$i_3 = i_2 - i_1$$

از حلّ هم‌زمان این سه معادله به پاسخ‌های زیر برای جریان‌ها می‌رسیم:

$$i_1 = ۰٫۲۷۵\text{A} \quad , \quad i_2 = ۰٫۰۲۵۰\text{A} \quad , \quad i_3 = -۰٫۲۵۰\text{A}$$

که این نشان‌دهنده‌ی آن است که جهت i_3 رو به بالاست. حال اختلاف پتانسیل بین نقاط d و c را از سه مسیر تعیین می‌کنیم.

مسیر اول: $d \to R_2 \to c$

$$V_d - V_c = i_2R_2 = (۰٫۰۲۵\text{A})(۱۰\Omega) = ۰٫۲۵\text{V}$$

مسیر دوم: $d \to R_3 \to b \to c$

$$V_d - V_c = i_3R_3 - \mathscr{E}_2 = (۰٫۲۵۰\text{A})(۵٫۰\Omega) - ۱٫۰\text{V} = ۰٫۲۵\text{V}$$

مسیر سوم: $d \to R_1 \to b \to c$

$$V_d - V_c = -i_1R_1 + \mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2$$
$$= -(۰٫۲۷۵\text{A})(۱۰\Omega) + ۴٫۰\text{V} - ۱٫۰\text{V} = ۰٫۲۵\text{V}$$

۱۹● مقاومت کلّ $۳٫۰۰\Omega$ از اتصال مقاومتی نامعلوم به یک مقاومت $۱۲٫۰\Omega$ به‌دست آمده است. (الف) مقدار این مقاومت مجهول باید چقدر باشد و (ب) آیا مقاومت‌ها به‌طور متوالی بسته شده‌اند یا موازی؟

حل

(الف) چون $R_{eq} < R$ است، دو مقاومت $(R = ۱۲٫۰\Omega)$ و R_x باید به‌طور موازی متصل شده باشند:

$$R_{eq} = ۳٫۰۰\Omega = \frac{R_xR}{R+R_x} = \frac{R_x(۱۲٫۰\Omega)}{۱۲٫۰\Omega + R_x}$$

و از آنجا R_x به‌دست می‌آید:

$$R_x = \frac{R_{eq}R}{R-R_{eq}} = \frac{(۳٫۰۰\Omega)(۱۲٫۰\Omega)}{(۱۲٫۰\Omega - ۳٫۰۰\Omega)} = ۴٫۰۰\Omega$$

(ب) همان‌طور که در بالا بیان کردیم، مقاومت‌ها باید به‌طور موازی وصل شوند.

۲۰● هرگاه مقاومت‌های ۱ و ۲ به‌طور متوالی بسته شوند، مقاومت معادل آنها $۱۶٫۰\Omega$ می‌شود. هرگاه آنها به‌طور موازی بسته شوند، مقاومت معادلشان $۳٫۰\Omega$ می‌شود. اندازه‌ی (الف) مقاومت کوچکتر و (ب) مقاومت بزرگتر چقدر است؟

حل

(الف) و (ب) اندازه‌ی مقاومت‌ها را R_1 و R_2 در نظر بگیرید که $R_1 < R_2$ است. براساس صورت مسئله داریم:

$$\frac{R_1R_2}{R_1+R_2} = ۳٫۰\Omega \quad , \quad R_1 + R_2 = ۱۶\Omega$$

از حلّ همزمان این دو معادله درمی‌یابیم $R_1 = ۴٫۰\Omega$ و $R_2 = ۱۲\Omega$ می‌شود.

۲۱● چهار مقاومت $۱۸٫۰\Omega$ به‌طور موازی به دو سر یک باتری آرمانی $۲۵٫۰\text{V}$ بسته شده‌اند. جریان عبوری از باتری چقدر است؟

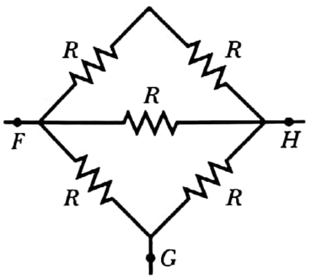
حل مقاومت معادل چهار مقاومت ۱۸٫۰ اهمی موازی برابر است با

$$\frac{۱}{R_{eq}} = \sum_{i=۱}^{۲} \frac{۱}{R_i} = \frac{۴}{R} \Rightarrow R_{eq} = \frac{R}{۴} = \frac{۱۸٫۰\Omega}{۴} = ۴٫۵۰\Omega$$

و در نتیجه جریان عبوری از باتری چنین می‌شود:

$$i_{\text{کل}} = \frac{V}{R_{eq}} = \frac{۲۵٫۰\text{V}}{۴٫۵۰\Omega} = ۵٫۵۶\text{A}$$

۲۲● شکل ۲۷-۳۴ پنج مقاومت ۵٫۰۰ اهمی را نشان می‌دهد. مقاومت معادل بین نقطه‌های (الف) F و H، و (ب) F و G را بیابید. (راهنمایی: برای هر جفت نقطه، یک باتری را تصور کنید که به دو سر آن جفت بسته شده است.)



شکل ۲۷-۳۴ مسئله‌ی ۲۲

حل

(الف) در این حالت، در واقع سه مقاومت $R_1 = ۵٫۰۰ + ۵٫۰۰ = ۱۰٫۰\Omega$ و $R_2 = ۵٫۰۰\Omega$ و $R_3 = ۵٫۰۰ + ۵٫۰۰ = ۱۰٫۰\Omega$، با هم موازی‌اند و بنابراین مقاومت معادل چنین می‌شود:

$$\frac{۱}{R_{eq}(FH)} = \frac{۱}{۱۰٫۰\Omega} + \frac{۱}{۵٫۰۰\Omega} + \frac{۱}{۱۰٫۰\Omega}$$

و از آنجا $R_{eq}(FH) = ۲٫۵۰\Omega$ به‌دست می‌آید.

(ب) در مثلث بالایی، مقاومت‌های $۵٫۰۰\Omega$ متوالی و مقاومت معادل آنها با مقاومت $۵٫۰۰\Omega$ دیگر موازی است و بنابراین مقاومت معادل مثلث بالایی چنین می‌شود:

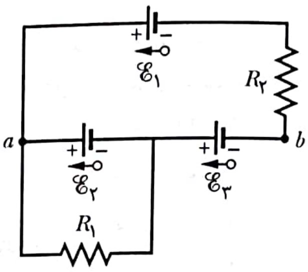
$$R_{eq} = \frac{(۱۰٫۰\Omega)(۵٫۰۰\Omega)}{۱۰٫۰\Omega + ۵٫۰۰\Omega} = ۳٫۳۴\Omega$$

این مقاومت معادل، خود با مقاومت $۵٫۰۰\Omega$ متوالی است و مقاومت معادل آنها $۸٫۳۴\Omega$ می‌شود و سرانجام این مقاومت معادل با مقاومت $۵٫۰۰\Omega$ دیگر موازی است و بنابراین داریم

$$R_{eq}(FG) = \frac{(۵٫۰۰\Omega)(۸٫۳۴\Omega)}{۵٫۰۰\Omega + ۸٫۳۴\Omega} = ۳٫۱۲\Omega$$

Scanned by CamScanner

۲۳● در شکل ۲۷-۳۵، $R_{۱} = ۱۰۰\Omega$ و $R_{۲} = ۵۰\Omega$ و emf باتری‌های آرمانی $\mathscr{E}_{۱} = ۶٫۰\text{V}$، $\mathscr{E}_{۲} = ۵٫۰\text{V}$، و $\mathscr{E}_{۳} = ۴٫۰\text{V}$ است. (الف) جریان در مقاومت ۱، (ب) جریان در مقاومت ۲ و (پ) اختلاف پتانسیل بین نقطه‌های a و b را پیدا کنید.



شکل ۲۷-۳۵ مسئله‌ی ۲۳

حل (الف) جریان عبوری از مقاومت ۱ را با $i_{۱}$ نمایش می‌دهیم. با اختیار یک حلقه‌ی جریان پادساعتگرد (در جهت $\mathscr{E}_{۲}$) در حلقه‌ی پایینی به سادگی خواهیم داشت:

$$i_{۱} = \frac{\mathscr{E}_{۲}}{R_{۱}} = \frac{۵٫۰\text{V}}{۱۰۰\Omega} = ۰٫۰۵۰\text{A} = ۵۰\text{mA}$$

(ب) با اختیار یک حلقه‌ی جریان ساعتگرد (در جهت $\mathscr{E}_{۲}$ و $\mathscr{E}_{۳}$) در حلقه‌ی بالایی، جریان $i_{۲}$ در مقاومت $R_{۲}$ را با استفاده از قاعده‌ی حلقه به‌دست می‌آوریم.

$$-\mathscr{E} - R_{۲}i_{۲} + \mathscr{E}_{۳} + \mathscr{E}_{۲} = ۰$$

و در نتیجه

$$i_{۲} = \frac{\mathscr{E}_{۲} + \mathscr{E}_{۳} - \mathscr{E}_{۱}}{R_{۲}} = \frac{۵٫۰\text{V} + ۴٫۰\text{V} - ۶٫۰\text{V}}{۵۰\Omega} = ۰٫۰۶۰\text{A} = ۶۰\text{mA}$$

(پ) V_{ab} را می‌توانیم از سه مسیر محاسبه کنیم:

مسیر اول.

$$V_a - \mathscr{E}_{۱} - i_{۲}R_{۲} = V_b$$
$$\Rightarrow\ V_a - V_b = \mathscr{E}_{۱} + i_{۲}R_{۲} = ۶٫۰\text{V} + (۰٫۰۶۰\text{A})(۵۰\Omega) = ۹٫۰\text{V}$$

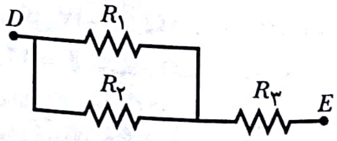
مسیر دوم.

$$V_a - \mathscr{E}_{۱} - \mathscr{E}_{۳} = V_b$$
$$\Rightarrow\ V_a - V_b = \mathscr{E}_{۲} + \mathscr{E}_{۳} = ۵٫۰\text{V} + ۴٫۰\text{V} = ۹٫۰\text{V}$$

مسیر سوم.

$$V_a - i_{۱}R_{۱} - \mathscr{E}_{۳} = V_b$$
$$\Rightarrow\ V_a - V_b = \mathscr{E}_{۳} + i_{۱}R_{۱} = ۴٫۰\text{V} + (۰٫۰۵۰\text{A})(۱۰۰\Omega) = ۹٫۰\text{V}$$

۲۴● در شکل ۲۷-۳۶، $R_{۱} = R_{۲} = ۴٫۰۰\Omega$ و $R_{۳} = ۲٫۵۰\Omega$ است. مقاومت معادل بین نقطه‌های D و E را بیابید. (*راهنمایی*: یک باتری را تصور کنید که به این دو نقطه بسته شده است.)



شکل ۲۷-۳۶ مسئله‌ی ۲۴

حل مقاومت‌های $R_{۱}$ و $R_{۲}$ موازی، و مقاومت معادل آنها با $R_{۳}$ متوالی است. با توجه به اینکه $R_{۱} = R_{۲} = ۴٫۰۰\Omega$ است، نتیجه می‌گیریم $R_{۱۲} = \frac{۴٫۰۰}{۲} = ۲٫۰۰\Omega$ و آنگاه R_{eq} چنین می‌شود:

$$R_{eq} = R_{۱۲} + R_{۳} = ۲٫۰۰\Omega + ۲٫۵۰\Omega = ۴٫۵۰\Omega$$

۲۵● نُه سیم مسی به طول l و قطر d برای تشکیل یک رسانای مرکب با مقاومت R به‌طور موازی به هم بسته شده‌اند. قطر D ی یک سیم مسی تنها، به طول l باید چقدر باشد تا همان مقاومت را داشته باشد؟

حل مقاومت هر یک از ۹ سیم را R بگیرید. چون هر ۹ سیم، مقاومت یکسانی دارند، مقاومت معادل آنها چنین می‌شود:

$$R_{eq} = \frac{R}{۹} = \frac{۱}{۹}\rho\frac{l}{\pi d^{۲}/۴}$$

که در آن ρ مقاومت ویژه‌ی مس است. از طرفی، طبق فرض بدیهی است که

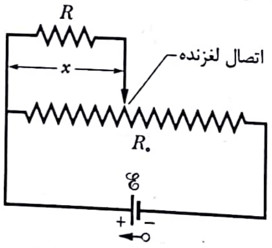
$$R_{eq} = \rho\frac{l}{\pi D^{۲}/۴}$$

از برابر قرار دادن مقاومت‌های معادل خواهیم داشت:

$$\frac{۴}{۹}\rho\frac{l}{\pi d^{۲}} = ۴\rho\frac{l}{\pi D^{۲}}$$

و از آنجا $D = ۳d$ می‌شود.

۲۶●● شکل ۲۷-۳۷ باتری‌ای را نشان می‌دهد که به مقاومت $R_{۰}$ بسته شده است. اتصالی لغزنده می‌تواند روی این مقاومت از $x = ۰$ در سمت چپ تا $x = ۱۰\text{cm}$ در سمت راست حرکت کند. با حرکت لغزنده، مقدار مقاومت در سمت چپ و سمت راست نقطه‌ی اتصال تغییر می‌کند. آهنگی را که با آن انرژی در مقاومت R تلف می‌شود بر حسب تابعی از x به‌دست آورید. این تابع را به‌ازای $\mathscr{E} = ۵۰\text{V}$، $R = ۲۰۰۰\Omega$، و $R_{۰} = ۱۰۰\Omega$ رسم کنید.



شکل ۲۷-۳۷ مسئله‌ی ۲۶

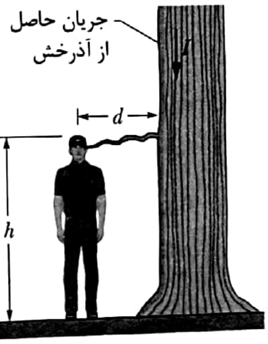
حل مقاومت بخشی از $R_{۰}$ که به‌طور موازی با R بسته شده است برابر با $R_{۱} = R_{۰}x/L$ است که در آن $L = ۱۰\text{cm}$ می‌باشد. اختلاف پتانسیل دو سر R با $V_R = \mathscr{E}R'/R_{eq}$ داده می‌شود که در آن $R' = RR_{۱}/(R+R_{۱})$ و $R_{eq} = R_{۰}(۱ - x/L) + R'$ است. بنابراین داریم:

$$P_R = \frac{V_R^{۲}}{R} = \frac{۱}{R}\left(\frac{\mathscr{E}RR_{۱}/(R+R_{۱})}{R_{۰}(۱-x/L) + RR_{۱}/(R+R_{۱})}\right)^{۲}$$
$$= \frac{۱۰۰R(\mathscr{E}x/R_{۰})^{۲}}{(۱۰۰R/R_{۰} + ۱۰x - x^{۲})^{۲}}$$

Scanned by CamScanner

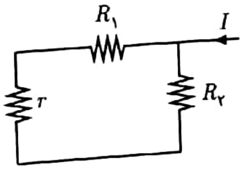
که در آن x بر حسب cm است.

۲۷•• جرقه‌ی فرعی. شکل ۲۷-۳۸ نشان می‌دهد که چرا هیچ‌کس نباید در حین یک یورش آذرخش زیر یک درخت بایستد. اگر آذرخش از پهلوی درخت پایین آید، بخشی از آن می‌تواند به روی شخص بجهد، به‌خصوص اگر جریان روی درخت به ناحیه‌ی خشکی روی پوست درخت برسد و پس از آن مجبور شود برای رسیدن به زمین از میان هوا عبور کند. در این شکل، بخشی از آذرخش از فاصله‌ی d در هوا می‌جهد و سپس از شخص (که مقاومت او نسبت به هوا ناچیز است) عبور می‌کند. بقیه‌ی جریان از پهلوی درخت، به طول h، می‌گذرد. اگر $d/h=۰٫۴۰۰$ و جریان کل $I=۵۰۰۰\,A$ باشد، جریان عبوری از شخص چقدر می‌شود؟



شکل ۲۷-۳۸ مسئله‌ی ۲۷

حل چون مقاومت شخص نسبت به مقاومت هوا ناچیز است، می‌توانیم اختلاف پتانسیل دو سر دو مسیر را یکسان، و شکل را به‌صورت دو مقاومت موازی در نظر بگیریم. (اگر شک دارید، می‌توانید مقاومت شخص را مثلاً r و مقاومت دو مسیر هوایی در دو راستای افقی و قائم را به‌ترتیب R_1 و R_2 در نظر بگیرید و مقاومت معادل را به‌دست آورید. مثلاً چنین شکلی داریم



که مقاومت معادل آن چنین می‌شود

$$R_{eq}=\frac{(R_1+r)R_2}{R_1+R_2+r}=\frac{R_1R_2(1+r/R_1)}{R_1R_2(r/R_1R_2+R_1/R_1R_2+R_2/R_1R_2)}$$

با توجه به اینکه مقاومت r در برابر R_1 و R_2 ناچیز است $r/R_1\approx ۰$ و $r/R_1R_2\approx ۰$ می‌شود و از آنجا به $R_{eq}=R_1R_2/(R_1+R_2)$ می‌رسیم که همان مقاومت معادل دو مقاومت موازی است.)

توجه کنید جریانی که از شخص عبور می‌کند همان جریان عبوری از R_1 به طول d است؛ زیرا بنا به فرض، همان جریان از شخص عبور می‌کند. حال از قانون انشعاب جریان‌ها و اینکه پتانسیل دو سر مقاومت‌های موازی با هم برابر است، به‌ترتیب خواهیم داشت:

$$I=i_1+i_2 \quad , \quad i_1R_1=i_2R_2$$

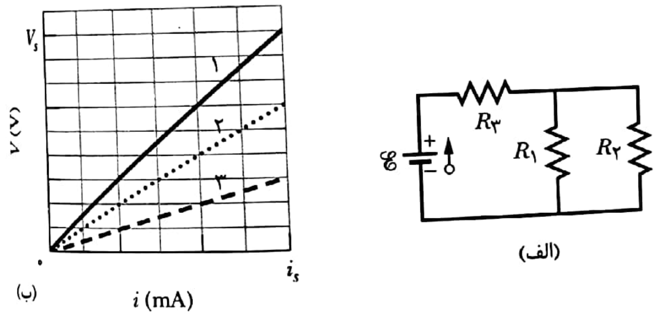
و از آنجا

$$i_1=\frac{R_2I}{R_1+R_2} \quad , \quad i_2=\frac{R_1I}{R_1+R_2}$$

ما به دنبال i_1 می‌گردیم. با توجه به اینکه i_1 و i_2 هر دو از هوا عبور می‌کنند، مقاومت ویژه‌ی هر دو یکسان است و با توجه به یکسان بودن مقطع Aی هر دو مسیر، طبق معادله‌ی ۲۶-۱۶ $(R=\rho l/A)$ مقاومت آنها متناسب با طولشان است و در نتیجه داریم:

$$i_1=\frac{hI}{d+h}=\frac{I}{1+d/h}=\frac{۵۰۰۰A}{۱+۰٫۴۰۰}=۳٫۵۷\times۱۰^{۳}\,A$$

۲۸•• باتری آرمانی شکل ۲۷-۳۹ الف دارای emf ای برابر $\mathscr{E}=۶٫۰V$ است. نمودار ۱ در شکل ۲۷-۳۹ به اختلاف پتانسیل الکتریکی V یی را که می‌تواند در دو سر مقاومت ۱ مدار ایجاد شود برحسب جریان i ی این مقاومت نشان می‌دهد. محور V با $V_s=۱۸٫۰V$ و محور i با $i_s=۳٫۰۰mA$ مقیاس‌بندی شده است. نمودارهای ۲ و ۳، به‌ترتیب نمودارهای مشابهی برای مقاومت‌های ۲ و ۳ هستند. جریان عبوری از مقاومت ۲ شکل ۲۷-۳۹ الف چقدر است؟



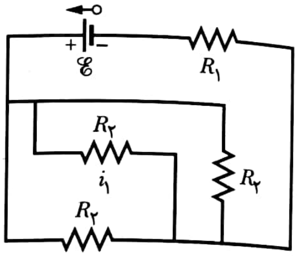
شکل ۲۷-۳۹ مسئله‌ی ۲۸

حل شیب خط ۱ برابر با $R_1=۶٫۰۰k\Omega$، شیب خط ۲ برابر با $R_2=۴٫۰۰k\Omega$، و شیب خط ۳ برابر $R_3=۲٫۰۰k\Omega$ است. بنابراین، مقاومت معادل دو خازن موازی برابر با $R_{12}=R_1R_2/(R_1+R_2)=۲٫۴۰k\Omega$ است. این مقاومت معادل خود با مقاومت R_3 متوالی است و بنابراین مقاومت معادل کل برابر $R_{eq}=۲٫۴۰k\Omega+۲٫۰۰k\Omega=۴٫۴۰k\Omega$ می‌شود. بنابراین جریان عبوری از باتری(که مورد نظر نیست) برابر با $(۶٫۰V)/(۴٫۴۰k\Omega)\approx ۱٫۴A$ و ولتاژ دو سر R_3 برابر با $(۶٫۰V)(۲٫۰۰k\Omega)/(۴٫۴۰k\Omega)=۲٫۷V$ می‌شود. آنگاه با استفاده از قاعده‌ی حلقه، ولتاژ دو سر R_2 برابر با $V_2=۶٫۰V-۲٫۷V$ می‌شود و از آنجا جریان عبوری از R_2 به‌دست می‌آید:

$$i_2=\frac{V_2}{R_2}=\frac{۶٫۰V-۲٫۷V}{۴٫۰۰k\Omega}=۰٫۸۲mA$$

۲۹•• در شکل ۲۷-۴۰، $R_1=۶٫۰۰\Omega$، $R_2=۱۸٫۰\Omega$ و emf باتری آرمانی $\mathscr{E}=۱۲٫۰V$ است. (الف) اندازه و (ب) جهت (رو به سمت چپ یا رو به سمت راست) جریان i_1 چیست؟ (پ) چقدر انرژی توسط هر چهار مقاومت در ۱٫۰۰min تلف شده است؟

Scanned by CamScanner



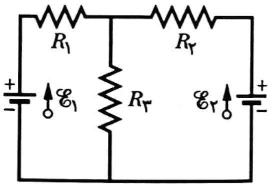
شکل ۲۷-۴۰ مسئله‌ی ۲۹

حل (الف) سه مقاومت $R_2=18.0\,\Omega$ موازی‌اند و مقاومت معادل آنها $R=18.0\,\Omega/3=6.00\,\Omega$ می‌شود. این مقاومت‌ها خود با مقاومت $R_1=6.00\,\Omega$ متوالی‌اند. بنابراین مقاومت کلّ مدار $R'=R_1+R=12.0\,\Omega$ می‌شود. پس جریان عبوری از R' برابر با $(12.0\,V)/R'=1.00\,A$ است که همان جریان عبوری از R نیز هست. از روی تقارن درمی‌یابیم، $\frac{1}{3}$ از این جریان از یکی از سه مقاومت $18.0\,\Omega$ می‌گذرد. بنابراین $i_1=0.333\,A$ است.

(ب) جهت i_1 بوضوح رو به سمت راست است.

(پ) توان $P=i^2R'=(1.00\,A)^2(12.0\,\Omega)=12.0\,W$ است و از آنجا انرژی تلف شده برابر با $(12.0\,J/s)(60.0\,s)=720\,J$ می‌شود.

۳۰۰۰ GO در شکل ۲۷-۴۱، emf باتری‌های آرمانی $\mathscr{E}_1=10.0\,V$ و $\mathscr{E}_2=0.500\mathscr{E}_1$ و هر یک از مقاومت‌ها $4.00\,\Omega$ است. جریان (الف) مقاومت ۲ و (ب) مقاومت ۳ چقدر است؟



شکل ۲۷-۴۱ مسئله‌های ۳۰، ۴۱ و ۸۸

حل دو حلقه‌ی جریان در جهت $\mathscr{E}_1$ و $\mathscr{E}_2$ در نظر می‌گیریم و قاعده‌ی حلقه را به‌کار می‌بندیم:

$$10.0\,V-i_1R_1-(i_1+i_2)R_3=0$$

و

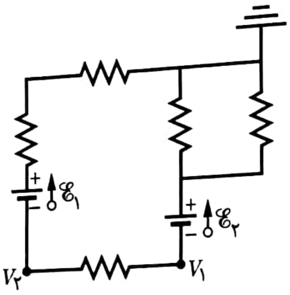
$$5.00\,V-i_2R_2-(i_1+i_2)R_3=0$$

که در آن $R_1=R_2=R_3=4.00\,\Omega$ است. همچنین از قاعده‌ی انشعاب $i_3=i_1+i_2$ می‌شود. از حلّ همزمان این سه معادله، جریان‌ها به‌دست می‌آیند.

(الف) از حلّ معادله‌های بالا به $i_2=0$ می‌رسیم.

(ب) از حلّ معادله‌ی بالا $i_3=1.25\,A$ می‌شود که همان‌طور که در محاسباتمان فرض کردیم، رو به پایین است.

۳۱۰۰ GO در شکل ۲۷-۴۲، emf باتری‌های آرمانی $\mathscr{E}_1=5.0\,V$ و $\mathscr{E}_2=12\,V$، هر یک از مقاومت‌ها $2.00\,\Omega$ و پتانسیل در نقطه‌ی اتصال به زمین مدار صفر تعریف شده است. پتانسیل (الف) V_1 و (ب) V_2 در نقطه‌های نشان داده شده چقدر است؟

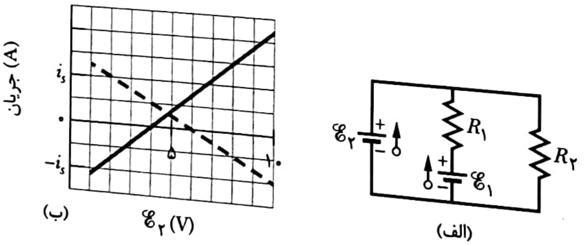


شکل ۲۷-۴۲ مسئله‌ی ۳۱

حل (الف) مقاومت معادل جفت مقاومت مشابه ۲٫۰۰ اهمی موازی در طرف راست برابر $R'=1.00\,\Omega$ می‌شود. همچنین مقاومت معادل جفت مقاومت مشابه ۲٫۰۰ اهمی در سمت چپ بالا $R''=4.00\,\Omega$ می‌شود. این دو مقاومت معادل، خود با مقاومت $R=2.00\,\Omega$ در پایین متوالی‌اند و بنابراین مقاومت معادل مدار برابر $R+R'+R''=7.00\,\Omega$ می‌شود. اختلاف پتانسیل دو سر این مقاومت معادل برابر با $12\,V-5.0\,V=7.0\,V$ است. بنابراین جریان $7.0\,V/7.00\,\Omega=1.0\,A$ (ساعتگرد) از آن می‌گذرد. پس اختلاف پتانسیل دو سر R' برابر با $(1.0\,A)(1.00\,\Omega)=1.0\,V$ می‌شود که بدین معنی است که اختلاف پتانسیل میان زمین و V_1 برابر با $12-1.0=11\,V$ است. با توجه به سمتگیری پایانه‌های باتری نتیجه می‌گیریم که $V_1=-11\,V$ است.

(ب) اختلاف پتانسیل دو سر R'' برابر با $(1.0\,A)(4.00\,\Omega)=4.0\,V$ است که این بدین معنی است که اختلاف پتانسیل میان زمین و V_2 برابر $5.0+4.0=9.0\,V$ است. با توجه به سمتگیری پایانه‌های باتری، نتیجه می‌گیریم که $V_2=-9.0\,V$ می‌شود.

۳۲۰۰ هر دو باتری شکل ۲۷-۴۳ الف آرمانی‌اند. نیروی محرکه‌ی الکتریکی $\mathscr{E}_1$ باتری ۱ مقدار ثابتی دارد، ولی نیروی محرکه‌ی الکتریکی $\mathscr{E}_2$ باتری ۲ می‌تواند بین دو مقدار $1.0\,V$ و $10\,V$ تغییر کند. نمودارهای شکل ۲۷-۴۳ ب جریان‌های عبوری از این دو باتری را برحسب تابعی از $\mathscr{E}_2$ نشان می‌دهد. محور قائم با $i_s=0.20\,A$ مقیاس‌بندی شده است. شما باید تصمیم بگیرید که کدام نمودار مربوط به کدام باتری است، ولی برای هر دو نمودار، جریان منفی وقتی ظاهر می‌شود که جهت جریان عبوری از باتری در خلاف جهت emf باتری باشد. (الف) نیروی محرکه‌ی الکتریکی $\mathscr{E}_1$، (ب) مقاومت R_1 و (پ) مقاومت R_2 چقدر است؟



شکل ۲۷-۴۳ مسئله‌ی ۳۲

Scanned by CamScanner

حل (الف) قاعده‌ی حلقه برای حلقه‌ی سمت چپ $\mathscr{E}_۲ + i_۱R_۱ - \mathscr{E}_۱ = ۰$ را به‌دست می‌دهد. چون $\mathscr{E}_۱$ به هنگام تغییر $\mathscr{E}_۲$ و $i_۱$ ثابت نگه داشته شده است، به‌ازای مقادیر به حدّ کافی بزرگ $\mathscr{E}_۲$ از این عبارت درمی‌یابیم که $i_۱$ باید منفی باشد. بنابراین شیب رو به پایین (خط‌چین در شکل ب) باید نمایشگر $i_۱$ باشد. از روی شکل بدیهی است که به‌ازای $\mathscr{E}_۲ = ۶٫۰V$، $i_۱ = ۰$ می‌شود. آنگاه از رابطه‌ی بالا درمی‌یابیم که $\mathscr{E}_۱ = \mathscr{E}_۲ = ۶٫۰V$ می‌شود.

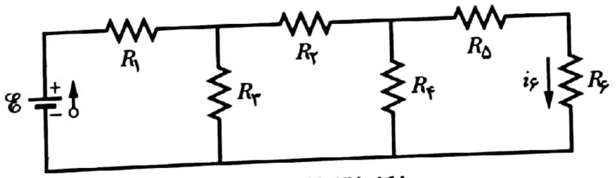
(ب) از روی منحنی درمی‌یابیم که در $\mathscr{E}_۲ = ۲٫۰V$، $i_۱ = ۰٫۲۰A$ می‌شود. حال قاعده‌ی حلقه به‌ازای $\mathscr{E}_۱ = ۶٫۰V$ (توجه کنید که $\mathscr{E}_۱$ که در قسمت الف آن را در یک حالت خاص به‌دست آوردیم، طبق فرض مسئله ثابت است)، $R_۱ = ۲۰Ω$ را به‌دست می‌دهد.

(پ) شیب رو به بالای $i_۲$، محور افقی شکل را در $\mathscr{E}_۲ = ۴٫۰V$ قطع می‌کند. چون $\mathscr{E}_۱ = ۶٫۰V$ و $R_۱ = ۲۰Ω$ است، از قاعده‌ی حلقه در سمت چپ، $i_۱ = ۰٫۱۰A$ می‌شود. حال برای به‌دست آوردن $R_۲$ قاعده‌ی حلقه را در سمت راست به‌ازای $i_۲ = ۰$ می‌نویسیم:

$$\mathscr{E}_۱ - i_۱R_۱ = i_۱R_۲$$

چون $i_۱ = ۰٫۱۰A$ و $R_۱ = ۲۰Ω$ است، از آنجا $R_۲ = ۴۰Ω$ می‌شود.

۳۳●● GO در شکل ۲۷-۴۴، جریان در مقاومت ۶ برابر است با $i_۶ = ۱٫۴۰A$ و مقاومت‌ها عبارت‌اند از $R_۱ = R_۲ = R_۳ = ۲٫۰۰Ω$، $R_۴ = ۱۶٫۰Ω$، $R_۵ = ۸٫۰۰Ω$ و $R_۶ = ۴٫۰۰Ω$. emf باتری آرمانی چقدر است؟



شکل ۲۷-۴۴ مسئله‌ی ۳۳

حل توجه کنید که $V_۴$ (ولتاژ دو سر $R_۴$) برابر با مجموع ولتاژهای دو سر مقاومت‌های $R_۵$ و $R_۶$ است:

$$V_۴ = i_۶(R_۵ + R_۶) = (۱٫۴۰A)(۸٫۰۰Ω + ۴٫۰۰Ω) = ۱۶٫۸V$$

در نتیجه، جریان عبوری از $R_۴$ چنین می‌شود:

$$i_۴ = \frac{V_۴}{R_۴} = \frac{۱۶٫۸V}{۱۶٫۰Ω} = ۱٫۰۵A$$

آنگاه طبق قاعده‌ی انشعاب، جریان در مقاومت $R_۲$ برابر می‌شود با

$$i_۲ = i_۴ + i_۶ = ۱٫۰۵A + ۱٫۴۰A = ۲٫۴۵A$$

بنابراین ولتاژ دو سر مقامت $R_۲$ چنین است

$$V_۲ = (۲٫۰۰Ω)(۲٫۴۵A) = ۴٫۹۰V$$

قاعده‌ی حلقه حکم می‌کند که ولتاژ دو سر $R_۳$ چنین باشد:

$$V_۳ = V_۲ + V_۴ = ۴٫۹۰V + ۱۶٫۸V = ۲۱٫۷V$$

از اینجا همچنین می‌توانیم جریان عبوری از $R_۳$ را نیز بیابیم که برابر با $i_۳ = V_۳/(۲٫۰۰Ω) = ۱۰٫۵۸A$ می‌شود. اکنون از قاعده‌ی انشعاب درمی‌یابیم

$$i_۱ = i_۲ + i_۳ = ۲٫۴۵A + ۱۰٫۵۸A = ۱۳٫۳A$$

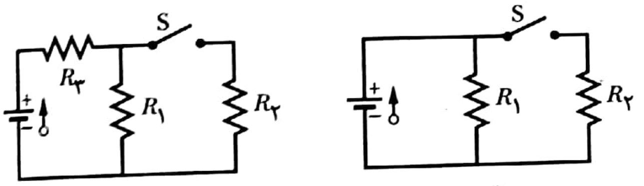
و از اینجا ولتاژ دو سر $R_۱$ به‌دست می‌آید

$$V_۱ = (۱۳٫۳A)(۲٫۰۰Ω) = ۲۶٫۶V$$

بنابراین، طبق قاعده‌ی حلقه داریم

$$\mathscr{E} = V_۱ + V_۲ = ۲۶٫۶V + ۲۱٫۷V = ۴۸٫۳V$$

۳۴●● مقاومت‌های شکل‌های ۲۷-۴۵ الف و ب همگی ۶٫۰Ω، و باتری‌های آرمانی آنها ۱۲V است. (الف) وقتی کلید S در شکل ۲۷-۴۵ الف بسته شود، تغییر پتانسیل الکتریکی $V_۱$ دو سر مقاومت ۱ چقدر می‌شود و یا اصلاً این پتانسیل تغییر نمی‌کند؟ (ب) وقتی کلید S در شکل ۲۷-۴۵ ب بسته شود، تغییر پتانسیل $V_۱$ دو سر مقاومت ۱ چقدر می‌شود و یا اصلاً این پتانسیل تغییر نمی‌کند؟



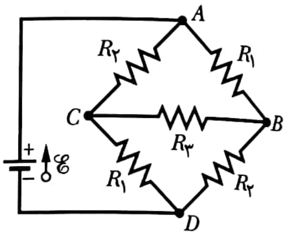
شکل ۲۷-۴۵ مسئله‌ی ۳۴

حل (الف) طبق قاعده‌ی حلقه، پتانسیل الکتریکی دو سر مقاومت ۱، یکسان می‌ماند. هدف از این پرسش، آشنا ساختن دانشجویان با مفهوم اختلاف پتانسیل است. زیرا بسیاری از دانشجویان، مفاهیم اختلاف پتانسیل و جریان را با هم اشتباه می‌گیرند و صحبت از «ولتاژ عبوری» از یک مقاومت می‌نند.

(ب) چون $R_۱ = R_۳$ است، اختلاف پتانسیل دو سر $R_۱$ و $R_۳$ پیش از بسته شدن کلید S یکسان است. ولی پس از بسته شدن کلید، اختلاف پتانسیل آنها دیگر یکسان باقی نمی‌ماند. همان‌طور که خواهیم دید جریان بیشتری از $R_۳$ عبور خواهد کرد که این منجر به افت ولتاژ بیشتری در دو سر این مقاومت می‌شود. چون ولتاژ باتری تغییر نکرده است، از قاعده‌ی حلقه درمی‌یابید که اختلاف پتانسیل دو سر $R_۱$ به همان اندازه کاهش می‌یابد. وقتی کلید باز است، اختلاف پتانسیل دو سر $R_۱$، ۶٫۰V است. ولی وقتی کلید بسته می‌شود، مقاومتی که در برابر باتری قرار می‌گیرد، مقاومت معادل مقاومت‌های $R_۱$، $R_۲$ و $R_۳$ است. مقاومت‌های $R_۱$ و $R_۲$ موازی‌اند و مقاومت معادل آنها ۳٫۰Ω می‌شود. این مقاومت خود با مقاومت $R_۳$ متوالی است و بنابراین مقاومت کل ۹٫۰Ω می‌شود. آنگاه از قانون اهم درمی‌یابیم که جریان کل برابر با $i = ۱۲V/۹٫۰Ω = ۱٫۳۳A$ می‌شود و این به افت ولتاژی برابر با $V_۳ = iR_۳ = (۱٫۳۳A)(۶٫۰Ω) = ۸٫۰V$ در دو سر $R_۳$ می‌انجامد. آنگاه قاعده‌ی حلقه حکم می‌کند که اختلاف پتانسیل دو سر $R_۱$ باید برابر $V_۱ = ۱۲V - ۸٫۰V = ۴٫۰V$ باشد، که این ۲٫۰V کم‌تر از مقدار آن در لحظه‌ای است که کلید باز بود.

Scanned by CamScanner

۳۵۰۰ در شکل ۲۷-۴۶، $\mathscr{E} = ۱۲٫۰\,V$، $R_۱ = ۲۰۰۰\,\Omega$، $R_۲ = ۳۰۰۰\,\Omega$، و $R_۳ = ۴۰۰۰\,\Omega$ است. اختلاف پتانسیل (الف) $V_A - V_B$، (ب) $V_B - V_C$، (پ) $V_C - V_D$، و (ت) $V_A - V_C$ چقدر است؟



شکل ۲۷-۴۶ مسئله‌ی ۳۵

حل (الف) تقارن مسئله به ما امکان می‌دهد که $i_۱$ را جریان در مقاومت‌های $R_۱$ و $i_۲$ را جریان در مقاومت‌های $R_۲$ بگیریم. آنگاه از قاعده‌ی انشعاب $i_۳ = i_۱ - i_۲$ می‌شود. همچنین قاعده‌ی حلقه برای دو حلقه چنین به‌دست می‌دهد:

$$\mathscr{E} - i_۲R_۲ - i_۱R_۱ = ۰$$

$$\mathscr{E} - ۲i_۱R_۱ - (i_۱ - i_۲)R_۳ = ۰$$

توجه کنید که اولین معادله مربوط به حلقه‌ی بیرونی شامل $\mathscr{E}$، $R_۲$ و $R_۱$، و دومین حلقه مربوط به مسیر زیگزاکی است که شامل $\mathscr{E}$، $R_۱$، $R_۳$ و $R_۱$ است. از حلّ همزمان این دو معادله به پاسخ‌های $i_۱ = ۰٫۰۰۲۶۲A$، $i_۲ = ۰٫۰۰۲۲۵A$، و $i_۳ = i_۱ - i_۲ = ۰٫۰۰۰۳۷۵A$ می‌رسیم. بنابراین $V_A - V_B = i_۱R_۱ = (۰٫۰۰۲۶۲A)(۲۰۰۰\Omega) = ۵٫۲۵V$ می‌شود.

(ب) همچنین از بالا درمی‌یابیم

$$V_B - V_C = i_۳R_۳ = (۰٫۰۰۰۳۷۵A)(۴۰۰۰\Omega) = ۱٫۵۰V$$

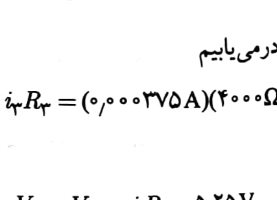
(پ) و نیز داریم

$$V_C - V_D = i_۱R_۱ = ۵٫۲۵V$$

(ت) و سرانجام

$$V_A - V_C = i_۲R_۲ = (۰٫۰۰۲۲۵A)(۳۰۰۰\Omega) = ۶٫۷۵V$$

۳۶۰۰ در شکل ۲۷-۴۷، $\mathscr{E}_۱ = ۸٫۰۰\,V$، $\mathscr{E}_۲ = ۱۲٫۰\,V$، $R_۱ = ۱۰۰\,\Omega$، $R_۲ = ۲۰۰\,\Omega$، و $R_۳ = ۳۰۰\,\Omega$ است. یک نقطه‌ی مدار، اتصال به زمین شده است ($V = ۰$). (الف) اندازه و (ب) جهت (رو به بالا یا رو به پایین) جریان عبوری از مقاومت ۱، (پ) اندازه و (ت) جهت (رو به سمت چپ یا رو به سمت راست) جریان عبوری از مقاومت ۲، (ث) اندازه و (ج) جهت جریان عبوری از مقاومت ۳ چیست؟ (چ) پتانسیل الکتریکی در نقطه‌ی A چقدر است؟



شکل ۲۷-۴۷ مسئله‌ی ۳۶

حل (الف) تا (ج) با استفاده از قاعده‌ی انشعاب $(i_۱ = i_۲ + i_۳)$، دو معادله‌ی حاصل از قاعده‌ی حلقه را می‌توانیم چنین بنویسیم:

$$\mathscr{E}_۱ - i_۲R_۲ - (i_۲ + i_۳)R_۱ = ۰$$

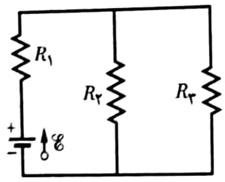
$$\mathscr{E}_۲ - i_۳R_۳ - (i_۲ + i_۳)R_۱ = ۰$$

به‌ازای $\mathscr{E}_۱ = ۶٫۰۰V$، $\mathscr{E}_۲ = ۱۲٫۰V$، $R_۱ = ۱۰۰\Omega$، $R_۲ = ۲۰۰\Omega$ و $R_۳ = ۳۰۰\Omega$ معادله‌های بالا $i_۲ = ۰٫۰۱۰۹A$ (رو به سمت راست، همان‌طور که در نوشتن معادلات فرض کرده‌ایم)، $i_۳ = ۰٫۰۲۷۳A$ (رو به سمت چپ)، و $i_۱ = i_۲ + i_۳ = ۰٫۰۳۸۲A$ (رو به پایین) می‌شود.

(ج) ولتاژ دو سر $R_۱$ برابر است با

$$V_A = (۰٫۰۳۸۲A)(۱۰۰\Omega) = +۳٫۸۲V$$

۳۷۰۰ در شکل ۲۷-۴۸، $R_۱ = ۲٫۰۰\Omega$، $R_۲ = ۵٫۰۰\Omega$ و باتری آرمانی است. به‌ازای چه مقداری از $R_۳$ آهنگ اتلاف در مقاومت ۳ بیشینه می‌شود؟



شکل ۲۷-۴۸ مسئله‌ی ۳۷

حل برای آنکه آهنگ اتلاف انرژی فقط در مقاومت $R_۳$ بیشینه باشد به جریان عبوری از $R_۳$ نیاز داریم. بدین منظور دو حلقه‌ی جریان ساعتگرد در نظر می‌گیریم. آنگاه از به کار بستن قاعده‌ی حلقه برای این دو حلقه خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \mathscr{E} - (i_۱ - i_۲)R_۲ - i_۱R_۱ = ۰ \\ -i_۲R_۳ + (i_۱ - i_۲)R_۲ = ۰ \end{cases}$$

از معادله‌ی دوم $i_۱$ را به‌دست می‌آوریم

$$i_۱ = \frac{R_۲ + R_۳}{R_۲} i_۲$$

و آن را در معادله‌ی دوم قرار می‌دهیم تا $i_۲$ (جریان عبوری از $R_۳$) به‌دست آید:

$$\mathscr{E} - \frac{(R_۱ + R_۲)(R_۲ + R_۳)}{R_۲} i_۲ + i_۲R_۲ = ۰$$

آنگاه به‌ازای $R_۱ = ۲٫۰۰\Omega$ و $R_۲ = ۵٫۰۰\Omega$ خواهیم داشت:

$$\mathscr{E} = \left[\frac{-(۷٫۰۰\Omega)(۵٫۰۰\Omega + R_۳)(۵٫۰۰\Omega)^۲}{۵٫۰۰\Omega}\right] i_۲$$

و یا

$$i_۲ = \frac{-(۵٫۰۰\Omega)}{۱۰٫۰ + ۷٫۰۰R_۳}$$

آنگاه آهنگ اتلاف انرژی در $R_۳$ چنین می‌شود:

$$P = i_۲^۲ R_۳ = \frac{۲۵٫۰\mathscr{E}^۲}{(۱۰٫۰ + ۷٫۰۰R_۳)^۲} R_۳$$

برای آنکه این آهنگ بیشینه شود باید $dP/dR_۳ = ۰$ باشد و یا

$$\frac{dR}{dR} = ۲۵٫۰\mathscr{E}^۲ \left[\frac{(۱۰٫۰ + ۷٫۰۰R_۳)^۲ - ۱۴٫۰(۱۰٫۰ + ۷٫۰۰R_۳)R_۳}{(۱۰٫۰ + ۷٫۰۰R_۳)^۲}\right] = ۰$$

Scanned by CamScanner

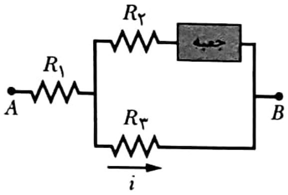
و در نتیجه

$$(۱۰٫۰+۷٫۰۰R_3)(۱۰٫۰+۷٫۰۰R_3-۱۴٫۰R_3)=۰$$

و از آنجا R_3 مورد نظر به‌دست می‌آید:

$$R_3=\frac{۱۰٫۰}{۷٫۰۰}\Omega\approx ۱٫۴۳\Omega$$

۳۸•• شکل ۲۷-۴۹ بخشی از یک مدار را نشان می‌دهد. مقاومت‌ها عبارت‌اند از $R_1=۲٫۰\Omega$، $R_2=۴٫۰\Omega$، و $R_3=۶٫۰\Omega$، و جریان مشخص شده $i=۶٫۰A$ است. اختلاف پتانسیل الکتریکی میان نقطه‌های A و B که این بخش را به بقیه‌ی مدار وصل می‌کند $V_A-V_B=۷۸V$ است. (الف) آیا وسیله‌ای که با "جعبه" مشخص شده است، انرژی را از مدار می‌گیرد یا به مدار می‌دهد و (ب) با چه آهنگی؟



شکل ۲۷-۴۹ مسئله‌ی ۳۸

حل اختلاف پتانسیل دو سر $R_3=۶٫۰\Omega$ برابر است با

$$V_3=iR_3=(۶٫۰A)(۶٫۰\Omega)=۳۶V$$

حال می‌توانیم اختلاف پتانسیل دو سر $R_1=۲٫۰\Omega$ را به‌دست آوریم:

$$V_1=(V_A-V_B)-V_3=۷۸V-۳۶V=۴۲V$$

در نتیجه جریان عبوری از مقاومت R_1 برابر با $i_1=(۴۲V)(۲٫۰\Omega)=۲۱A$ می‌شود. آنگاه از قاعده‌ی انشعاب جریان عبوری از $R_2=۴٫۰\Omega$ به‌دست می‌آید:

$$i_2=i_1-i=۲۱A-۶٫۰A=۱۵A$$

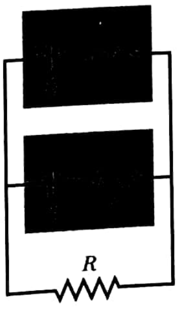
پس، توان کل تلف شده توسط مقاومت‌ها با استفاده از معادله‌ی $P=i^2R$ چنین می‌شود:

$$P_B=i_1^2(۲٫۰\Omega)+i_2^2(۴٫۰\Omega)+i^2(۶٫۰\Omega)\approx ۲٫۰\times۱۰^۳\,W$$

از طرفی، توان خارجی وارد شده به این بخش $P_A=i_A(V_A-V_B)$ می‌شود که در آن $i_A=i_1=۲۱A$ است. پس $P_A=۱٫۶\times۱۰^۳\,W$ می‌شود. بنابراین "جعبه" باید به مدار انرژی بدهد.

(ب) آهنگ ارائه‌ی این انرژی به مدار برابر با $P_B-P_A\approx ۴٫۰\times۱۰^۲\,W$ می‌شود.

۳۹•• GO در شکل ۲۷-۵۰، دو باتری با emf برابر با $\mathscr{E}=۱۲٫۰V$ و مقاومت داخلی $r=۰٫۳۰۰\Omega$ به‌طور موازی به دو سر مقاومت R بسته شده‌اند. (الف) به‌ازای چه مقداری از R آهنگ اتلاف در مقاومت بیشینه است؟ (ب) این مقدار بیشینه چقدر است؟



شکل ۲۷-۵۰ مسئله‌ی ۳۹ و ۴۰

حل باتری‌ها یکسان هستند و چون به‌طور موازی بسته شده‌اند، اختلاف پتانسیل دو سر آنها برابر است. این بدین معنی است که جریان آنها نیز برابر است. جریان هر یک از دو باتری را i و سوی جریان را به سمت چپ بگیرید. بنا بر قاعده‌ی انشعاب، جریان در مقاومت R برابر با $۲i$ می‌شود و سوی آن به سمت راست است. قاعده‌ی حلقه برای هر یک از حلقه‌های شامل مقاومت داخلی r و مقاومت R چنین به‌دست می‌دهد:

$$\mathscr{E}-ir-۲iR=۰ \quad\Rightarrow\quad i=\frac{\mathscr{E}}{r+۲R}$$

آنگاه توان تلف شده در R چنین می‌شود:

$$P=(۲i)^۲R=\frac{۴\mathscr{E}^۲R}{(r+۲R)^۲}$$

برای آنکه توان بیشینه شود باید $dP/dR=۰$ باشد:

$$\frac{dP}{dR}=\frac{۴\mathscr{E}^۲\left[(r+۲R)^۲-۴R(r+۲R)\right]}{(r+۲R)^۴}=۰$$

و از آنجا خواهیم داشت:

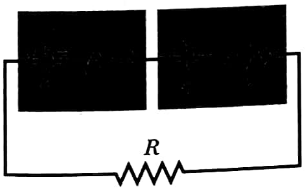
$$(r+۲R)[r+۲R-۴R]=۰$$

و در نتیجه $R=r/۲$ می‌شود. آنگاه به‌ازای $r=۰٫۳۰۰\Omega$ به $R=۰٫۱۵۰\Omega$ می‌رسیم.

(ب) $R=r/۲$ را در رابطه‌ی P قرار می‌دهیم و از آنجا آهنگ اتلاف انرژی بیشینه را به‌دست می‌آوریم:

$$P_{max}=\frac{۴\mathscr{E}^۲(r/۲)}{[r+۲(r/۲)]^۲}=\frac{\mathscr{E}^۲}{۲r}=\frac{(۱۲٫۰V)^۲}{۲(۰٫۳۰۰\Omega)}=۲۴۰W$$

۴۰••• GO قرار است دو باتری با emf برابر $\mathscr{E}=۱۲٫۰V$ و مقاومت داخلی $r=۰٫۲۰۰\Omega$ به یک مقاومت خارجی R یا به‌طور موازی (شکل ۲۷-۵۰) و یا به‌طور متوالی (شکل ۲۷-۵۱) بسته شوند. اگر $R=۲٫۰۰r$ باشد، جریان i در مقاومت خارجی (الف) آرایش موازی و (ب) آرایش متوالی چقدر است؟ (پ) برای کدام آرایش i بزرگتر است؟ اگر $R=r/۲٫۰۰$ باشد، i در مقاومت خارجی (ت) آرایش موازی و (ث) آرایش متوالی چقدر است؟ (ج) اکنون برای کدام آرایش i بزرگتر است؟



شکل ۲۷-۵۱ مسئله‌ی ۴۰

حل (الف) وقتی باتری‌ها را به‌طور موازی متصل کرده‌ایم، همان‌طور که در حلّ مسئله ۳۹ دیدیم، چون باتری‌ها یکسان‌اند، اختلاف پتانسیل دو سر آنها برابر است. این بدین معنی است که جریان آنها نیز برابر است. اگر جریان هر یک از دو باتری را i بگیریم، جریان در R برابر با $۲i$ می‌شود و آنگاه از قاعده‌ی حلقه به $\mathscr{E}=ir+(۲i)R$ می‌رسیم. آنگاه به‌ازای $r=۰٫۲۰۰\Omega$ و $R=۲٫۰۰r$ خواهیم داشت:

$$i_R=۲i=\frac{۲\mathscr{E}}{r+۲R}=\frac{۲(۱۲٫۰V)}{۰٫۲۰۰\Omega+۲(۰٫۴۰۰\Omega)}=۲۴٫۰A$$

Scanned by CamScanner

(ب) در اتصال متوالی داریم:

$$\sum \mathscr{E} = i\sum R$$

و با

$$2\mathscr{E} - i_R r - i_R r - i_R R = 0$$

$$\Rightarrow \quad i_R = \frac{2\mathscr{E}}{2r+R} = \frac{2(12.0\,V)}{2(0.200\,\Omega)+0.400\,\Omega} = 30.0\,A$$

(پ) در آرایش متوالی؛ چون $R>r$ است.

(ت) اگر $R = r/2.00$ باشد، آنگاه برای اتصال موازی داریم:

$$i_R = 2i = \frac{2\mathscr{E}}{r+2R} = \frac{2(12.0\,V)}{2(0.200\,\Omega)+0.100\,\Omega} = 60.0\,A$$

(ث) برای اتصال متوالی، داریم

$$i_R = 2i = \frac{2\mathscr{E}}{2r+R} = \frac{2(12.0\,V)}{2(0.200\,\Omega)+0.100\,\Omega} = 48.0\,V$$

۴۱●● در شکل ۲۷-۴۱، $\mathscr{E}_1 = 3.00\,V$، $\mathscr{E}_2 = 1.00\,V$، $R_1 = 4.00\,\Omega$، $R_2 = 2.00\,\Omega$، $R_3 = 5.00\,\Omega$، و هر دو باتری آرمانی‌اند. آهنگی که با آن انرژی در (الف) R_1، (ب) R_2 و (پ) R_3 تلف می‌شود چقدر است؟ توان (ت) باتری ۱ و (ث) باتری ۲ چقدر است؟

حل دو حلقه‌ی جریان ساعتگرد در حلقه‌ها در نظر می‌گیریم و آنگاه قاعده‌ی حلقه را به‌کار می‌بندیم. به‌ترتیب برای حلقه‌های سمت چپ و راست داریم:

$$\begin{cases}\mathscr{E}_1 - R_1 i_1 - R_3(i_1 - i_2) = 0\\ \mathscr{E}_2 + R_2 i_2 + R_3(i_1 - i_2) = 0\end{cases}$$

که با قرار دادن مقادیر چنین به‌دست می‌دهند:

$$\begin{cases}9i_1 - 5i_2 = 3\\ 5i_1 - 7i_2 = 1\end{cases}$$

از آنجا $i_1 = 0.421\,A$ و $i_2 = 0.158\,A$ می‌شود. همچنین جریان در شاخه‌ی میانی برابر با $i_3 = i_1 - i_2 = 0.263\,A$ می‌شود. توجه شود که چون علامت جریان‌ها مثبت شده است، سوی آنها را به درستی برگزیده‌ایم.

(الف) توان تلف شده در R_1 برابر است با

$$P_1 = i_1^2 R_1 = (0.421\,A)^2(4.00\,\Omega) = 0.709\,W$$

(ب) توان تلف شده در R_2 برابر است با

$$P_2 = i_2^2 R_2 = (0.158\,A)^2(2.00\,\Omega) = 0.050\,W$$

(پ) توان تلف شده در R_3 برابر است با

$$P_3 = i_3^2 R_3 = (0.263\,A)^2(5.00\,\Omega) = 0.346\,W$$

(ت) توان باتری ۱ برابر است با

$$P_{\mathscr{E}_1} = i_1\mathscr{E}_1 = (0.421\,A)(3.00\,V) = 1.26\,W$$

(ت) توان باتری ۲ برابر است با

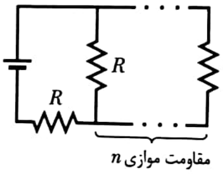
$$P_{\mathscr{E}_2} = i_2\mathscr{E}_2 = (0.158\,A)(1.00\,V) = 0.158\,W$$

ولی توجه شود جریان دارد به باتری ۲ وارد می‌شود (در حالی که از باتری ۱ خارج می‌گردد). بنابراین علامت توان باتری ۲ باید منفی باشد. یعنی این باتری از مدار انرژی می‌گیرد. در حالی که باتری ۱ به مدار انرژی می‌دهد. خوب است در اینجا پایستگی انرژی را نیز امتحان کنیم. پایستگی انرژی حکم می‌کند

$$P_1 + P_2 + P_3 = P_{\mathscr{E}_1} - P_{\mathscr{E}_2}$$

که اگر مقادیر بالا را جایگزین کنید، درمی‌یابید که برقرار است.

۴۲●● در شکل ۲۷-۵۲، آرایه‌ای از n مقاومت موازی به‌طور متوالی به یک مقاومت و یک باتری آرمانی بسته شده‌اند. اندازه‌ی همه‌ی این مقاومت‌ها یکسان است. اگر مقاومت یکسانی به‌طور موازی به این آرایه‌ی موازی اضافه شود، جریان عبوری از باتری به اندازه‌ی ۱٫۲۵٪ تغییر می‌کند. مقدار n چقدر است؟



شکل ۲۷-۵۲ مسئله‌ی ۴۲

حل مقاومت معادل شکل (با n مقاومت موازی) برابر است با

$$R_{eq} = R + \frac{R}{n} = \frac{(n+1)R}{n}$$

در این حالت، جریان در باتری باید چنین شود

$$i_n = \frac{V_{\text{باتری}}}{R_{eq}} = \frac{nV_{\text{باتری}}}{(n+1)R}$$

در نتیجه i_{n+1} برابر است با

$$i_{n+1} = \frac{(n+1)V_{\text{باتری}}}{(n+2)R}$$

برای آنکه افزایش نسبی برابر با $0.0125 (=1/80)$ شود، لازم است که داشته باشیم

$$\frac{i_{n+1} - i_n}{i_n} = \frac{i_{n+1}}{i_n} - 1 = \frac{\left(\frac{n+1}{n+2}\right)}{\left(\frac{n}{n+1}\right)} - 1 = \frac{1}{80}$$

$$n^2 + 2n - 80 = (n+10)(n-8) = 0$$

این به معادله‌ی درجه دوم می‌انجامد که به‌وضوح پاسخ آن $n = 8$ است. بنابراین، علاوه بر مقاومتی که به‌طور متوالی نشان داده شده است، هشت مقاومت موازی وجود دارد.

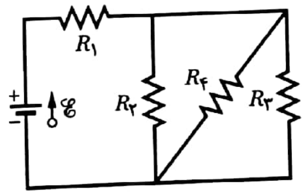
۴۳●● به شما تعدادی مقاومت $10\,\Omega$ داده شده است که هر کدام می‌توانند بی‌آنکه بسوزند، فقط $1.0\,W$ تلف کنند. کمترین تعداد چنین مقاومت‌هایی باید چقدر باشد تا ترکیب آنها به‌طور متوالی یا موازی، مقاومتی $10\,\Omega$ را ایجاد کند که بتواند دست‌کم $5.0\,W$ تلف کند؟

حل نخست نشان می‌دهیم که حتماً تعداد مقاومت‌های متوالی و موازی باید برابر باشند. مقاومت معادل n مقاومت موازی R/n و مقاومت معادل m مقاومت متوالی mR است. بنابراین مقاومت معادل m مقاومت متوالی در n شاخه‌ی موازی برابر $\frac{m}{n}R$ می‌شود. برای آنکه این مقاومت با مقاومت R برابر باشد، باید $m=n$ شود. از طرفی، جریان در هر مقاومت یکسان است و چون $n=m$ است، به تعداد $n\cdot m=n^۲$ مقاومت وجود دارد. بنابراین بیشینه‌ی توان کلی که می‌تواند اتلاف می‌شود برابر با $P_{کل}=n^۲P$ می‌شود. توجه شود که در این رابطه P توان بیشینه‌ای است که در هر یک از مقاومت‌ها تلف می‌شود و طبق فرض $P=۱٫۰W$ است. چون باید $P_{کل}\ge ۵٫۰P$ باشد، بنابراین داریم

$$n^۲P\ge ۵P \Rightarrow n^۲\ge ۵$$

پس $n^۲$ باید بزرگ‌تر از ۵ باشد. ولی n نمی‌تواند هر عددی باشد؛ چرا که n عددی صحیح است. اولین مقدار n صحیحی که توان دوم آن بزرگ‌تر از ۵ می‌شود، عدد ۳ است. پس کمترین تعداد مقاومت $n^۲=۹$ می‌شود.

••۴۴ GO در شکل ۲۷-۵۳، $R_۱=۱۰۰\Omega$، $R_۲=R_۳=۵۰٫۰\Omega$، $R_۴=۷۵٫۰\Omega$، و emf باتری آرمانی $\mathscr{E}=۱۲٫۰V$ است. (الف) مقاومت معادل چقدر است؟ i در (ب) مقاومت ۱، (پ) مقاومت ۲، (ت) مقاومت ۳ و (ث) مقاومت ۴ چقدر است؟



شکل ۲۷-۵۳ مسئله‌های ۴۴ و ۴۸

حل (الف) همان‌طور که مشاهده می‌شود مقاومت‌های $R_۲$، $R_۳$ و $R_۴$ موازی‌اند و مقاومت معادل آنها با $R_۱$ متوالی است. بنابراین داریم

$$\frac{۱}{R_{۲۳۴}}=\frac{۱}{R_۲}+\frac{۱}{R_۳}+\frac{۱}{R_۴}=\frac{۱}{۵۰٫۰\Omega}+\frac{۱}{۵۰٫۰\Omega}+\frac{۱}{۷۵٫۰\Omega}$$

و از آنجا $R_{۲۳۴}=۱۸٫۷\Omega$ می‌شود. پس مقاومت معادل مدار چنین می‌شود:

$$R_{eq}=R_{۲۳۴}+R_۱=۱۸٫۷\Omega+۱۰۰\Omega\approx ۱٫۱۹\times۱۰^۲\Omega$$

(ب) جریان عبوری از $R_۱$، همان جریان کل مدار است:

$$i_۱=\frac{\mathscr{E}}{R_{eq}}=\frac{۶٫۰۰V}{۱٫۱۹\times۱۰^۲\Omega}=۵٫۰۵\times۱۰^{-۲}A=۵۰٫۵mA$$

(پ) پتانسیل دو سر $R_۲$، $R_۳$ و $R_۴$ با هم برابر است و از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$V=\mathscr{E}-R_۱i_۱=۶٫۰۰V-(۱۰۰\Omega)(۵٫۰۵\times۱۰^{-۲}A)=۰٫۹۵۰V$$

و از آنجا $i_۲$ چنین می‌شود:

$$i_۲=\frac{V}{R_۲}=\frac{۰٫۹۵۰}{۵۰٫۰\Omega}=۱٫۹۰\times۱۰^{-۲}A=۱۹٫۰mA$$

(ت) به همان ترتیب $i_۳$ چنین می‌شود:

$$i_۳=\frac{V}{R_۳}=\frac{۰٫۹۵۰V}{۵۰٫۰\Omega}=۱٫۹۰\times۱۰^{-۲}A=۱۹٫۰mA$$

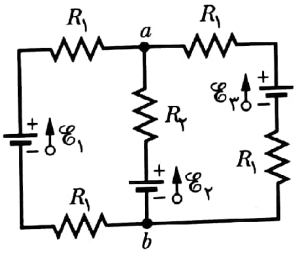
(ت) به نیز $i_۴$ چنین می‌شود:

$$i_۴=\frac{V}{R_۴}=\frac{۰٫۹۵۰V}{۷۵٫۰\Omega}=۱٫۲۵\times۱۰^{-۲}A=۱۲٫۵mA$$

همچنین می‌توانستیم $i_۴$ را چنین نیز محاسبه کنیم:

$$i_۴=i_۱-i_۲-i_۳=۵٫۰۵\times۱۰^{-۲}A-۲(۱٫۹۰\times۱۰^{-۲}A)$$
$$=۱٫۲۵\times۱۰^{-۲}A=۱۲٫۵mA$$

••۴۵ ILW در شکل ۲۷-۵۴، مقاومت‌ها عبارت‌اند از $R_۱=۱٫۰\Omega$ و $R_۲=۲٫۰\Omega$، و emf باتری آرمانی $\mathscr{E}_۱=۲٫۰V$ و $\mathscr{E}_۲=\mathscr{E}_۳=۴٫۰V$ است. (الف) اندازه و (ب) جهت (رو به بالا یا رو به پایین) جریان در باتری ۱، (پ) اندازه و (ت) جهت جریان در باتری ۲ و (ث) اندازه و (ج) جهت جریان در باتری ۳ چیست؟ (چ) اختلاف پتانسیل V_a-V_b چقدر است؟



شکل ۲۷-۵۴ مسئله‌ی ۴۵

حل مسئله را می‌شود به دو روش حل کرد. **روش هوشمندانه** آن است که از تقارن‌های مسئله استفاده کنیم. مقاومت‌های $R_۱$ در هر حلقه با هم متوالی‌اند و مقاومت معادل آنها برابر با $۲R_۱$ می‌شود. چون $\mathscr{E}_۲=\mathscr{E}_۳$ و $R_۲=۲R_۱$ است، از تقارن درمی‌یابیم که جریان عبوری از $\mathscr{E}_۲$ و $\mathscr{E}_۳$ یکسان است: $i_۲=i_۳=i$. بنابراین جریان عبوری از $\mathscr{E}_۱$ برابر با $i_۱=۲i$ می‌شود. آنگاه از $V_b-V_a=\mathscr{E}_۲-iR_۲=\mathscr{E}_۱+(۲R_۱)(۲i)$، جریان i را به‌دست می‌آوریم

$$i=\frac{\mathscr{E}_۲-\mathscr{E}_۱}{۴R_۱+R_۲}=\frac{۴٫۰V-۲٫۰V}{۴(۱٫۰\Omega)+۲٫۰\Omega}=۰٫۳۳A$$

بنابراین جریان عبوری از $\mathscr{E}_۱$ برابر با $i_۱=۲i=۰٫۶۶A$ می‌شود.

روش دیگر آن است که قضیه‌ی حلقه را برای دو حلقه به کار بندیم. برتری این روش در جامعیت آن است که همواره کاربرد دارد. دو حلقه‌ی جریان پادساعتگرد در دو حلقه در نظر می‌گیریم. اگر جریان حلقه‌ی اول را با $i_۱$ و جریان حلقه‌ی دوم را با $i_۲$ نمایش دهیم، جریان عبوری از شاخه‌ی میانی $i_۳=i_۱-i_۲$ می‌شود. آنگاه به‌ترتیب خواهیم داشت:

$$\begin{cases}-i_۱R_۱-\mathscr{E}_۱-i_۱R_۱+\mathscr{E}_۲-R_۲(i_۱-i_۲)=۰\\ -i_۲R_۱+\mathscr{E}_۳-i_۲R_۱+R_۲(i_۱-i_۲)-\mathscr{E}_۲=۰\end{cases}$$

که به‌ازای $R_۱=۱٫۰\Omega$، $R_۲=۲٫۰\Omega$، $\mathscr{E}_۱=۲٫۰V$ و $\mathscr{E}_۲=\mathscr{E}_۳=۴٫۰V$ به

Scanned by CamScanner

دستگاه زیر می‌انجامد:

$$\begin{cases}-۴٫۰i_1+۲٫۰i_2+۲٫۰=۰\\ ۲٫۰i_1-۴٫۰i_2=۰\end{cases}$$

و از آنجا $i_1=۰٫۶۶A$ و $i_2=۰٫۳۳A$ می‌شود. با توجه به اینکه $i_3=i_1-i_2$ است، $i_3=۰٫۶۷A-۰٫۳۳A=۰٫۳۳A$ می‌شود.

در هر حال، بر اساس نتایج بالا خواهیم داشت:

(الف) جریان عبوری از $\mathscr{E}_1$ برابر $i_1=۰٫۶۶A$ است.

(ب) جهت i_1 رو به پایین است.

(پ) جریان عبوری از $\mathscr{E}_2$ برابر $i_2=۰٫۳۳A$ است.

(ت) جهت i_2 رو به بالا است.

(ث) $i_3=i_2=۰٫۳۳A$ است.

(ج) جهت i_3 به مانند i_2 رو به بالا است.

(چ) V_{ab} را از سه مسیر محاسبه می‌کنیم.

مسیر I

$$V_a-R_1i_1-\mathscr{E}_1-R_1i_1=V_b$$
$$\Rightarrow\quad V_a-V_b$$
$$=۲R_1i_1+\mathscr{E}_1=۲(۱٫۰\Omega)(۰٫۶۶A)+۲٫۰V\approx۳٫۳V$$

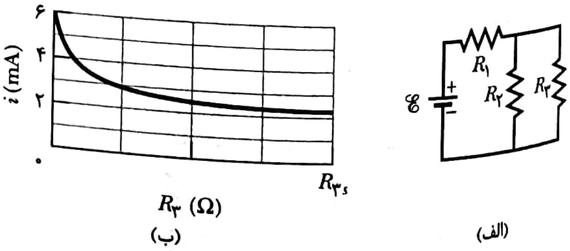
مسیر II

$$V_a+R_2i_2-\mathscr{E}_2=V_a$$
$$\Rightarrow\quad V_a-V_b$$
$$=\mathscr{E}_2-R_2i_2=۴٫۰V-(۲٫۰\Omega)(۰٫۳۳A)\approx۳٫۳V$$

مسیر III

$$V_a+R_1i_2-\mathscr{E}_3+R_1i_2=V_a$$
$$\Rightarrow\quad V_a-V_b=\mathscr{E}_3-۲R_1i_2$$
$$=۴٫۰V-۲(۱٫۰\Omega)(۰٫۳۳A)\approx۳٫۳V$$

۴۶●● در شکل ۲۷-۵۵ الف، مقاومت ۳ یک مقاومت متغیر و emf باتری آرمانی $\mathscr{E}=۱۲V$ است. شکل ۲۷-۵۵ ب جریان i ی عبوری از باتری را برحسب تابعی از R_3 نشان می‌دهد. محور افقی با $R_{3s}=۲۰\Omega$ مقیاس‌بندی شده است. وقتی $R_3\to\infty$ میل کند این منحنی، مجانبی $۲٫۰mA$ دارد. (الف) مقاومت R_1 و (ب) مقاومت R_2 چقدر است؟



شکل ۲۷-۵۵ مسئله‌ی ۴۶

حل (الف) وقتی $R_3=۰$ است، اتصال کوتاه می‌شود و بنابراین تمام جریان از R_1 و R_3 می‌گذرد. از شکل ب درمی‌یابیم که به‌ازای $R_3=۰$، جریان عبوری از باتری $i=۶٫۰mA$ است. آنگاه از قانون اهم $R_1=(۱۲V)/(۰٫۰۰۶A)=۲٫۰\times۱۰^۳\Omega=۲٫۰k\Omega$ می‌شود.

(ب) وقتی $R_3=\infty$ است، اتصال باز می‌شود و بنابراین تمام جریان از R_1 و R_2 می‌گذرد. از شکل ب درمی‌یابیم که به‌ازای $R_3=\infty$، جریان عبوری از باتری $i=۲٫۰mA$ است. آنگاه از قاعده‌ی حلقه خواهیم داشت:

$$i=\frac{\mathscr{E}}{R_1+R_2}\quad\Rightarrow\quad R_2=\frac{\mathscr{E}}{i}-R_1=\frac{۱۲V}{۰٫۰۰۲۰A}-۲٫۰\times۱۰^۳\Omega$$
$$=۴٫۰\times۱۰^۳\Omega=۴٫۰k\Omega$$

۴۷●●● یک سیم مسی به شعاع $a=۰٫۲۵۰mm$ دارای یک پوشش آلومینیومی با شعاع خارجی $b=۰٫۳۸۰mm$ است. از این سیم مرکب جریان $i=۲٫۰۰A$ می‌گذرد. با استفاده از جدول ۲۶-۱، جریان در (الف) مس و (ب) آلومینیوم را محاسبه کنید. (پ) اگر اختلاف پتانسیل $V=۱۲٫۰V$ بین دو انتهای سیم موجب ایجاد این جریان شده باشد، طول این سیم مرکب چقدر است؟

حل (الف) سیم مسی و روکش آلومینیومی به‌طور موازی بسته شده‌اند و بنابراین اختلاف پتانسیل آنها یکسان است. چون اختلاف پتانسیل حاصل‌ضرب جریان در مقاومت است $i_CR_C=i_AR_A$ می‌شود که در آن i_C جریان در سیم مسی، i_A جریان در سیم آلومینیومی، R_C مقاومت سیم مسی و R_A مقاومت آلومینیوم است. مقاومت هر کدام با $R=\rho L/A$ داده می‌شود که ρ مقاومت ویژه، L طول، و A مساحت سطح مقطع است. مقاومت سیم مسی برابر $R_C=\rho_CL/\pi a^۲$ و مقاومت پوشش آلومینیومی $R_A=\rho_AL/\pi(b^۲-a^۲)$ است. این عبارت‌ها را در $i_CR_C=i_AR_A$ قرار می‌دهیم و عامل‌های مشترک L و π را حذف می‌کنیم. از آنجا خواهیم داشت:

$$\frac{i_C\rho_C}{a^۲}=\frac{i_A\rho_A}{b^۲-a^۲}$$

این معادله را همزمان با $i=i_C+i_A$ حل می‌کنیم که i جریان کل است. از آنجا درمی‌یابیم:

$$i_C=\frac{r_C^۲\rho_Ci}{(r_A^۲-r_C^۲)\rho_C+r_C^۲\rho_A}$$

و

$$i_A=\frac{(r_A^۲-r_C^۲)\rho_Ci}{(r_A^۲-r_C^۲)\rho_C+r_C^۲\rho_A}$$

مخرج کسرها برابر و هر کدام دارای مقدار زیر هستند:

$$(b^۲-a^۲)\rho_C+a^۲\rho_A$$
$$=\left[(۰٫۳۸۰\times۱۰^{-۳}m)^۲-(۰٫۲۵۰\times۱۰^{-۳}m)^۲\right](۱٫۶۹\times۱۰^{-۸}\Omega\cdot m)$$
$$+(۰٫۲۵۰\times۱۰^{-۳}m)^۲(۲٫۷۵\times۱۰^{-۸}\Omega\cdot m)$$
$$=۳٫۱۰\times۱۰^{-۱۵}\Omega\cdot m^۳$$

بنابراین i_C چنین می‌شود:

$$i_C=\frac{(۰٫۲۵۰\times۱۰^{-۳}m)^۲(۲٫۷۵\times۱۰^{-۸}\Omega\cdot m)(۲٫۰۰A)}{۳٫۱۰\times۱۰^{-۱۵}\Omega\cdot m^۳}$$
$$=۱٫۱۱A$$

(ب) و به همان ترتیب

$$i_A=\frac{\left[(۰٫۳۸۰\times ۱۰^{-۳}\,\mathrm{m})^{۲}-(۰٫۲۵۰\times ۱۰^{-۳}\,\mathrm{m})^{۲}\right](۱٫۶۹\times ۱۰^{-۸}\,\Omega\cdot\mathrm{m})(۲٫۰۰\,\mathrm{A})}{۳٫۱۰\times ۱۰^{-۱۵}\,\Omega\cdot\mathrm{m}^{۳}}$$

$$=۰٫۸۹۳\,\mathrm{A}$$

(پ) سیم مسی را در نظر بگیرید. اگر V اختلاف پتانسیل دو سر آن باشد، آنگاه خواهیم داشت

$$V=i_C R_C=i_C\rho_C\frac{L}{\pi a^{۲}}$$

و از آنجا L به‌دست می‌آید:

$$L=\frac{\pi a^{۲}V}{i_C\rho_C}=\frac{(\pi)(۰٫۲۵۰\times ۱۰^{-۳}\,\mathrm{m})^{۲}(۱۲٫۰\,\mathrm{V})}{(۱٫۱۱\,\mathrm{A})(۱٫۶۹\times ۱۰^{-۸}\,\Omega\cdot\mathrm{m})}\approx ۱۲۶\,\mathrm{m}$$

روش دیگر. همچنین می‌توانستیم با استفاده از $R_{eq}=V/i$ که در آن $R_{eq}=R_C R_A/(R_C+R_A)$ است، L را به‌دست آوریم.

۴۸●●● GO در شکل ۲۷-۵۳، $R_1=۷٫۰۰\,\Omega$، $R_2=۱۲٫۰\,\Omega$، $R_3=۴٫۰۰\,\Omega$ و emf باتری آرمانی $\mathscr{E}=۲۴٫۰\,\mathrm{V}$ است. به‌ازای چه مقداری از R_4 آهنگ انتقال انرژی از باتری به مقاومت‌ها برابر با (الف) ۶۰٫۰W، (ب) بیشترین آهنگ انتقال ممکن P_{max} و (پ) کمترین آهنگ ممکن P_{min} است؟ (ت) P_{max} و (ث) P_{min} چقدر است؟

حل

(الف) از $P=\mathscr{E}^{۲}/R_{eq}$ استفاده می‌کنیم که در آن

$$R_{eq}=۷٫۰۰\,\Omega+\frac{(۱۲٫۰\,\Omega)(۴٫۰۰\,\Omega)R_4}{(۱۲٫۰\,\Omega)(۴٫۰۰\,\Omega)+(۱۲٫۰\,\Omega)R_4+(۴٫۰۰\,\Omega)R_4}$$

$P=۶۰٫۰\,\mathrm{W}$ و $\mathscr{E}=۲۴٫۰\,\mathrm{V}$ قرار می‌دهیم. از آنجا $R=۱۹٫۵\,\Omega$ به‌دست می‌آید.

(ب) چون $P\propto ۱/R_{eq}$ است، باید R_{eq} را کمینه کنیم و در نتیجه R_4 باید برابر با صفر باشد.

(پ) حال باید R_{eq} را بیشینه کنیم. در این صورت $R_4=\infty$ می‌شود.

(ت) همان‌طور که در قسمت ب دیدیم $R_{eq,min}=۷٫۰۰\,\Omega$ است. بنابراین P_{max} چنین می‌شود:

$$P_{max}=\frac{\mathscr{E}^{۲}}{R_{eq,min}}=\frac{(۲۴٫۰\,\mathrm{V})^{۲}}{۷٫۰۰\,\Omega}=۸۲٫۳\,\mathrm{W}$$

(ث) به‌ازای $R_4=\infty$، $R_{eq,max}$ چنین می‌شود

$$R_{eq,max}=\lim_{R_4\to\infty}\left[۷٫۰۰\,\Omega+\frac{(۱۲٫۰\,\Omega)(۴٫۰۰\,\Omega)}{\frac{(۱۲٫۰\,\Omega)(۴٫۰۰\,\Omega)}{R_4}+۱۲٫۰\,\Omega+۴٫۰۰\,\Omega}\right]$$

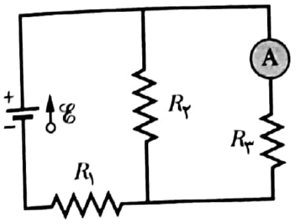
$$=۷٫۰۰\,\Omega+\frac{(۱۲٫۰\,\Omega)(۴٫۰۰\,\Omega)}{۱۲٫۰\,\Omega+۴٫۰۰\,\Omega}=۱۰٫۰\,\Omega$$

و از آنجا P_{min} چنین می‌شود

$$P_{min}=\frac{\mathscr{E}^{۲}}{R_{eq,max}}=\frac{(۲۴٫۰\,\mathrm{V})^{۲}}{۱۰٫۰\,\Omega}=۵۷٫۶\,\mathrm{W}$$

بخش ۲۷-۴ آمپرسنج و ولت‌سنج

۴۹●● ILW (الف) در شکل ۲۷-۵۶، اگر $\mathscr{E}=۵٫۰\,\mathrm{V}$ (باتری آرمانی)، $R_1=۲٫۰\,\Omega$، $R_2=۴٫۰\,\Omega$، و $R_3=۶٫۰\,\Omega$ باشد، آمپرسنج چه عددی را نشان می‌دهد؟ (ب) حال جای آمپرسنج و باتری را عوض کنید. نشان دهید که در این صورت عددی که آمپرسنج نشان می‌دهد تغییری نمی‌کند.



شکل ۲۷-۵۶ مسئله‌ی ۴۹

حل

(الف) جریان عبوری از R_1 با رابطه‌ی زیر داده می‌شود:

$$i_1=\frac{\mathscr{E}}{R_1+R_2R_3/(R_2+R_3)}$$

$$=\frac{۵٫۰\,\mathrm{V}}{۲٫۰\,\Omega+(۴٫۰\,\Omega)(۶٫۰\,\Omega)/(۴٫۰\,\Omega+۶٫۰\,\Omega)}=۱٫۱\,\mathrm{A}$$

پتانسیل دو سر R_3 همان پتانسیل دو سر R_1 و $\mathscr{E}$ است و داریم

$$i_3=\frac{\mathscr{E}-V_1}{R_3}=\frac{\mathscr{E}-i_1R_1}{R_3}=\frac{۵٫۰\,\mathrm{V}-(۱٫۱\,\mathrm{A})(۲٫۰\,\Omega)}{۶٫۰\,\Omega}$$

$$=۰٫۴۵\,\mathrm{A}$$

(ب) کافی است که شاخص‌های پایین ۱ و ۳ را در معادله‌های بالا عوض کنیم. در این صورت خواهیم داشت:

$$i_3=\frac{\mathscr{E}}{R_3+\left(R_2R_1/(R_2+R_1)\right)}$$

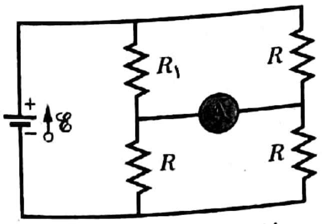
$$=\frac{۵٫۰\,\mathrm{V}}{۶٫۰\,\Omega+\left((۲٫۰\,\Omega)(۴٫۰\,\Omega)/(۲٫۰\,\Omega+۴٫۰\,\Omega)\right)}\approx ۰٫۶۸\,\mathrm{A}$$

و از آنجا i_1 چنین می‌شود:

$$i_1=\frac{\mathscr{E}-V_3}{R_1}=\frac{۵٫۰\,\mathrm{V}-(۰٫۶۸\,\mathrm{A})(۶٫۰\,\Omega)}{۲٫۰\,\Omega}=۰٫۴۵\,\mathrm{A}$$

که همان مقدار قبلی است.

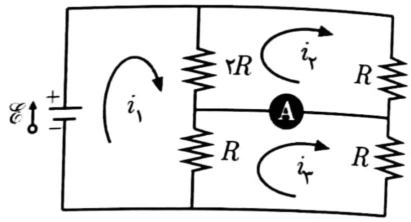
۵۰●●● در شکل ۲۷-۵۷، $R_1=۲٫۰۰R$، مقاومت آمپرسنج صفر و باتری آرمانی است. چه مضربی از $\mathscr{E}/R$ جریان آمپرسنج را به‌دست می‌دهد؟



شکل ۲۷-۵۷ مسئله‌ی ۵۰

Scanned by CamScanner

حل **روش اول.** سه حلقه مطابق شکل زیر در نظر می‌گیریم و قاعده‌ی حلقه را برای هر یک به‌کار می‌بندیم:



$$\begin{cases} \mathscr{E} - 2R(i_1 - i_2) - R(i_1 - i_3) = 0 \\ 2R(i_2 - i_1) + Ri_2 = 0 \\ R(i_3 - i_1) + Ri_3 = 0 \end{cases}$$

این سه معادله را می‌توانیم چنین بازنویسی کنیم:

$$\begin{cases} 3Ri_1 - 2Ri_2 - Ri_3 = \mathscr{E} \\ 3Ri_2 - 2Ri_1 = 0 \\ 2Ri_3 - Ri_1 = 0 \end{cases}$$

از دو رابطه‌ی آخر به‌ترتیب $i_2 = \frac{2}{3}i_1$ و $i_3 = \frac{1}{2}i_1$ به‌دست می‌آید. با قرار دادن این دو مقدار در رابطه‌ی اول، i_1 را به‌دست می‌آوریم:

$$3Ri_1 - 2R\left(\frac{2}{3}i_1\right) - R\left(\frac{i_1}{2}\right) = \mathscr{E} \quad \Rightarrow \quad i_1 = \frac{6}{7R}\mathscr{E}$$

جریانی که آمپرسنج نشان می‌دهد برابر است با

$$i_2 - i_3 = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right)i_1 = \frac{1}{6}i_1 = \frac{\mathscr{E}}{7R} = 0.143\mathscr{E}/R$$

روش دوم. توجه کنید که هیچ افت پتانسیلی در آمپرسنج وجود ندارد. بنابراین جریان‌ها در مقاومت‌های پایینی یکسان است که آن را i می‌نامیم. پس، جریان عبوری از باتری $2i$ و افت پتانسیل دو سر هر یک از مقاومت‌های پایین iR می‌شود. مقاومت معادل مدار برابر است با

$$R_{eq} = \frac{(2R)(R)}{2R+R} + \frac{(R)(R)}{R+R} = \frac{7}{6}R$$

که بدین معنی است که می‌توانیم جریان عبوری از باتری (و نیز از هر یک از مقاومت‌های پایینی) را تعیین کنیم:

$$2i = \frac{\mathscr{E}}{R_{eq}} \quad \Rightarrow \quad i = \frac{3\mathscr{E}}{7R}$$

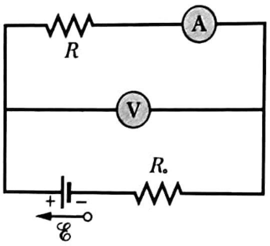
با استفاده از قاعده‌ی حلقه برای حلقه‌ی سمت چپ که شامل $\mathscr{E}$ و مقاومت $2R$ است خواهیم داشت

$$\mathscr{E} - i_{2R}(2R) - iR = 0 \quad \Rightarrow \quad i_{2R} = \frac{\mathscr{E} - iR}{2R}$$

با قرار دادن $i = 3\mathscr{E}/7R$ به $i_{2R} = 2\mathscr{E}/7R$ می‌رسیم. تفاوت میان i_{2R} و i، همان جریان عبوری از آمپرسنج است. بنابراین داریم:

$$i_A = i - i_{2R} = \frac{3\mathscr{E}}{7R} - \frac{2\mathscr{E}}{7R} = \frac{\mathscr{E}}{7R} = 0.143\mathscr{E}/R$$

۵۱●● در شکل ۲۷-۵۸، ولت‌سنجی به مقاومت $R_V = 300\Omega$ و آمپرسنجی به مقاومت $R_A = 3.00\Omega$ برای اندازه‌گیری مقاومت R موجود در مداری استفاده شده‌اند که همچنین شامل یک مقاومت $R_0 = 100\Omega$ و یک باتری آرمانی با emf برابر با $\mathscr{E} = 12.0V$ است. مقاومت R با $R = V/i$ داده می‌شود، که V پتانسیل دو سر R و i عددی است که آمپرسنج نشان می‌دهد. عددی که ولت‌سنج نشان می‌دهد V' است که عبارت است از V به‌علاوه‌ی اختلاف پتانسیل دو سر آمپرسنج. بنابراین، نسبت دو عددی که سنجه‌ها نشان می‌دهند برابر با R نیست، بلکه فقط *مقاومت ظاهری* $R' = V'/i$ است. اگر $R = 85.0\Omega$ باشد، (الف) عددی که آمپرسنج نشان می‌دهد، (ب) عددی که ولت‌سنج نشان می‌دهد و (پ) R' چقدر است؟ (ت) اگر R_A کاهش یابد، آیا تفاوت بین R' و R افزایش می‌یابد یا کاهش، و یا تغییر نمی‌کند؟



شکل ۲۷-۵۸ مسئله‌ی ۵۱

حل دو حلقه‌ی جریان در نظر می‌گیریم و قاعده‌ی حلقه را برای هر یک به‌کار می‌بندیم. اگر جریان عبوری از R_0 را i_1 و جریان عبوری از R و آمپرسنج را i_2 بنامیم، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \mathscr{E} - R_V(i_1 - i_2) - R_0 i_2 = 0 \\ R_V(i_1 - i_2) - Ri_2 - R_A i_2 = 0 \end{cases}$$

که با گذاشتن مقادیر چنین به‌دست می‌دهد:

$$\begin{cases} 12.0 - 400i_1 + 300i_2 = 0 \\ 300i_1 - 388i_2 = 0 \end{cases}$$

از معادله‌ی دوم $i_1 = 1.29i_2$ می‌شود و با گذاشتن آن در معادله‌ی اول خواهیم داشت:

$$i_2 = i_A = 0.0552\text{A} = 55.2\text{mA}$$

که همان‌طور که در بالا نوشتیم، i_2 همان جریانی است که آمپرسنج نشان می‌دهد.

(ب) عددی که ولت‌سنج نشان می‌دهد چنین می‌شود:

$$V' = R_V(i_1 - i_2) = (300\Omega)(0.061\text{A}) = 4.85\text{V}$$

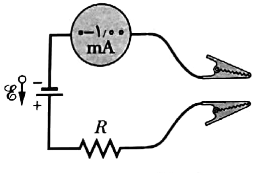
(پ) مقاومت ظاهری R' برابر است با

$$R' = \frac{V'}{i_A} = \frac{4.85\text{V}}{0.0552\text{A}} = 88.0\Omega$$

روش دیگر: $R' = R + R_A = 85.0\Omega + 3.00\Omega = 88.0\Omega$.

(ت) چون $R = R' - R_A$ است، اگر R_A کاهش یابد، اختلاف میان R' و R کاهش می‌یابد. در واقع وقتی که $R_A = 0$ شود، $R' = R$ می‌شود.

۵۲۰۰ همان‌طور که در شکل ۲۷-۵۹ نشان داده شده است، یک اهم‌سنج ساده با اتصال متوالی یک باتری ۱٫۵۰V چراغ‌قوه به یک مقاومت R و آمپرسنجی که از ۰ تا ۱٫۰۰mA مدرّج شده، ساخته شده است. مقاومت R طوری تنظیم شده است که هرگاه گیره‌ها به هم متصل شوند، آمپرسنج تا آخرین درجه ۱٫۰۰mA خود منحرف شود. چه مقاومت خارجی‌ای باید به دو سر گیره‌ها بسته شود تا انحرافی برابر با (الف) ۱۰٫۰٪، (ب) ۵۰٫۰٪، و (پ) ۹۰٫۰٪ آخرین درجه حاصل شود؟ (ت) اگر مقاومت آمپرسنج ۲۰٫۰Ω و مقاومت داخلی باتری ناچیز باشد، مقدار R چقدر است؟



شکل ۲۷-۵۹ مسئله‌ی ۵۲

حل (الف) نخست مقاومت R را به‌دست می‌آوریم. در هنگام اتصال گیره‌ها داریم

$$i=\frac{\mathscr{E}}{R} \Rightarrow 1.00\times10^{-3}\,A=\frac{1.50\,V}{R} \Rightarrow R=1500\,\Omega$$

اگر نمایشگر اهم‌سنج بخواهد ۱۰٫۰٪ تمام مقیاس را نشان دهد داریم

$$1.00\times10^{-4}\,A=\frac{1.50\,V}{(1500\,\Omega+R_{\text{خارجی}})} \Rightarrow R_{\text{خارجی}}=1.35\times10^{4}\,\Omega$$

(ب) اگر نمایشگر اهم‌سنج بخواهد ۵۰٫۰٪ تمام مقیاس را نشان دهد داریم

$$5.00\times10^{-4}\,A=\frac{1.50\,V}{1500\,\Omega+R_{\text{خارجی}}} \Rightarrow R_{\text{خارجی}}=1.50\times10^{3}\,\Omega$$

(پ) اگر نمایشگر اهم‌سنج بخواهد ۹۰٫۰٪ تمام مقیاس را نشان دهد داریم

$$9.00\times10^{-4}\,A=\frac{1.50\,V}{1500\,\Omega+R_{\text{خارجی}}} \Rightarrow R_{\text{خارجی}}=167\,\Omega$$

(ت) در این صورت داریم

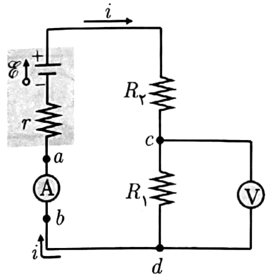
$$1.00\times10^{-3}\,A=\frac{1.50\,V}{R+20.0\,\Omega} \Rightarrow R=1.48\times10^{3}\,\Omega$$

روش دیگر: همچنین می‌توانستیم با استفاده از $R+20.0=r$، مقدار R را به‌دست آوریم:

$$R=1.50\times10^{3}\,\Omega-20.0\,\Omega=1.48\times10^{3}\,\Omega$$

۵۳۰۰ در شکل ۲۷-۱۴ فرض کنید که $\mathscr{E}=3.0\,V$، $r=100\,\Omega$، $R_1=250\,\Omega$، و $R_2=300\,\Omega$ است. اگر مقاومت R_Vی ولت‌سنج برابر ۵٫۰kΩ باشد، در اندازه‌گیری اختلاف پتانسیل دو سر R_1 چند درصد خطا وجود دارد؟ حضور آمپرسنج را نادیده بگیرید.

حل شکل ۲۷-۱۴ به این ترتیب بود:



جریان در R_2 برابر با i است. جریان در R_1 را برابر i_1 بگیرید که سوی آن رو به پایین است. طبق قاعده‌ی انشعاب، جریان در ولت‌سنج برابر با $i-i_1$ و سوی آن رو به پایین است. از قاعده‌ی حلقه برای حلقه‌ی سمت چپ خواهیم داشت:

$$\mathscr{E}-iR_2-i_1R_1-ir=0$$

و از قاعده‌ی حلقه برای حلقه‌ی سمت راست داریم

$$i_1R_1-(i-i_1)R_V=0$$

از معادله‌ی دوم i را به‌دست می‌آوریم:

$$i=\frac{R_1+R_V}{R_V}i_1$$

و آن را در معادله‌ی نخست قرار می‌دهیم:

$$\mathscr{E}-\frac{(R_2+r)(R_1+R_V)}{R_V}i_1+R_1i_1=0$$

و از آنجا i_1 چنین می‌شود:

$$i_1=\frac{\mathscr{E}R_V}{(R_2+r)(R_1+R_V)+R_1R_V}$$

عددی که ولت‌سنج نشان می‌دهد برابر است با

$$i_1R_1=\frac{\mathscr{E}R_VR_1}{(R_2+r)(R_1+R_V)+R_1R_V}$$

$$=\frac{(3.0\,V)(5.0\times10^{3}\,\Omega)(250\,\Omega)}{(300\,\Omega+100\,\Omega)(250\,\Omega+5.0\times10^{3}\,\Omega)+(250\,\Omega)(5.0\times10^{3}\,\Omega)}$$

$$=1.12\,V$$

جریان در غیاب ولت‌سنج را می‌توان با در نظر گرفتن حل $R_V\to\infty$ به‌دست آورد. آنگاه خواهیم داشت:

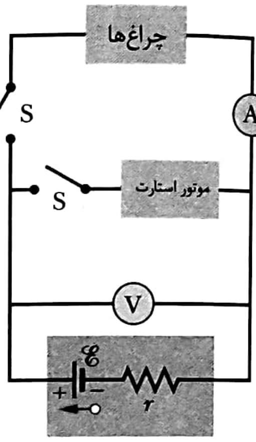
$$i_1R_1=\frac{\mathscr{E}R_1}{R_1+R_2+r}=\frac{(3.0\,V)(250\,\Omega)}{250\,\Omega+300\,\Omega+100\,\Omega}=1.15\,V$$

بنابراین خطای نسبی چنین می‌شود

$$\frac{1.12-1.15}{1.15}=-0.030 \text{ یا } -3.0\%$$

Scanned by CamScanner

۵۴ •• وقتی چراغ‌های اتومبیلی روشن شود، آمپرسنجی که به‌طور متوالی با آنها بسته شده عدد $۱۰٫۰A$ و ولت‌سنجی که به دو سر آنها بسته شده عدد $۱۲٫۰V$ را نشان می‌دهد (شکل ۲۷–۶۰). وقتی استارت زده شود، عددی که آمپرسنج نشان می‌دهد به $۸٫۰۰A$ افت می‌کند و نور چراغ‌ها قدری کم می‌شود. اگر مقاومت داخلی باتری $۰٫۰۵۰۰\Omega$ و مقاومت آمپرسنج ناچیز باشد، (الف) emf باتری و (ب) جریان عبوری از موتور استارت وقتی چراغ‌ها روشن‌اند چقدر است؟



شکل ۲۷–۶۰ مسئله‌ی ۵۴

حل (الف) وقتی که هنوز موتور استارت روشن نشده است، داریم:

$$\mathscr{E} = V + ir = ۱۲٫۰V + (۱۰٫۰A)(۰٫۰۵۰۰\Omega) = ۱۲٫۵V$$

(ب) وقتی کلید S بسته می‌شود ولی استارت موتور هنوز خاموش است از قاعده‌ی حلقه، مقاومت چراغ‌ها $R = ۱۲٫۰V/۱۰٫۰A = ۱٫۲۰\Omega$ به‌دست می‌آید. وقتی موتور استارت روشن می‌شود، جریان عبوری از آمپرسنج برابر $۸٫۰۰A$ می‌شود. اگر R_s را مقاومت موتور استارت بگیریم، از قاعده‌ی حلقه برای دو حلقه خواهیم داشت:

$$(۱٫۲۰\Omega)(۸٫۰۰A) + R_s(i - ۸٫۰۰A) = ۰$$

$$۱۲٫۵ - (۰٫۰۵۰۰\Omega(i)) + R_s(۸٫۰۰A - i) = ۰$$

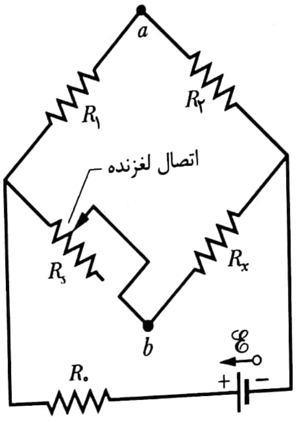
که در آن i جریان عبوری از مقاومت است. از جمع دو معادله‌ی بالا خواهیم داشت:

$$۱۲٫۵V - ۹٫۶۰V = (۰٫۰۵۰۰\Omega)i \Rightarrow i = ۵۸٫۰A$$

ولی جریان عبوری از موتور استارت برابر با $i_s = (i - ۸٫۰۰A)$ است. بنابراین $i_s = ۵۰٫۰A$ می‌شود.

۵۵ •• در شکل ۲۷–۶۱، مقدار R_s باید طوری تنظیم شود که با حرکت دادن اتصال لغزنده روی آن، سرانجام پتانسیل نقطه‌های a و b یکسان شود. (یک روش برای تحقیق این شرط آن است که برای لحظه‌ای آمپرسنج حساسی را بین نقطه‌های a و b ببندیم؛ اگر این دو نقطه در پتانسیل یکسانی باشند، آمپرسنج منحرف نخواهد شد.) نشان دهید هرگاه این تنظیم ایجاد شود، رابطه‌ی $R_x = R_sR_۲/R_۱$ برقرار است. یک مقاومت مجهول (R_x) را می‌توان با استفاده از این وسیله، که *پل وتستون*[1] خوانده می‌شود، برحسب یک مقاومت استاندارد (R_s) اندازه‌گیری کرد.

[1] Wheatstone bridge



شکل ۲۷–۶۱ مسئله‌ی ۵۵

حل $i_۱$ را جریان در مقاومت‌های $R_۱$ و $R_۲$، و سوی مثبت این جریان را به سمت نقطه‌ی a در $R_۱$ بگیرید. $i_۲$ را جریان در مقاومت‌های R_s و R_x، و سوی مثبت این جریان را به سمت نقطه‌ی b در R_s بگیرید. آنگاه اگر از قاعده‌ی حلقه استفاده کنیم، خواهیم داشت:

$$(R_۱+R_۲)i_۱ - (R_x+R_s)i_۲ = ۰$$

حال بیایید $V_a - V_b$ را از مسیر $R_۱ \to R_s$ محاسبه کنیم:

$$V_a - V_b = i_۱R_۱ - i_۲R_{sl}$$

با توجه به اینکه نقاط a و b هم‌پتانسیل‌اند از اینجا خواهیم داشت:

$$i_۱R_۱ = i_۲R_s \Rightarrow i_۲ = i_۱R_۱/R_s$$

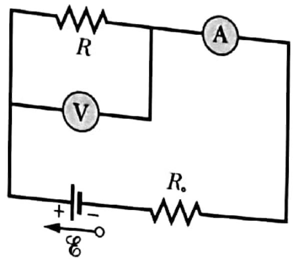
با قرار دادن $i_۲$ در معادله‌ی اول به معادله‌ی زیر می‌رسیم:

$$(R_۱+R_۲)i_۱ = (R_x+R_s)\frac{R_۱}{R_s}i_۱ \Rightarrow R_x = \frac{R_۲R_s}{R_۱}$$

روش دیگر آن بود که $V_a - V_b$ را از مسیر $R_۲ \to R_x$ نیز محاسبه کنیم که در آن صورت با توجه به اینکه $V_a = V_b$ است به $i_۱R_۲ = i_۲R_x$ می‌رسیم. آنگاه با تقسیم این رابطه بر رابطه‌ی $i_۱R_۱ = i_۲R_s$ به رابطه‌ی مورد نظر خواهیم رسید.

۵۶ •• در شکل ۲۷–۶۲، از یک ولت‌سنج به مقاومت $R_V = ۳۰۰\Omega$ و یک آمپرسنج به مقاومت $R_A = ۳٫۰۰\Omega$ برای اندازه‌گیری مقاومت R در مداری استفاده شده است که همچنین شامل یک مقاومت $R_۰ = ۱۰۰\Omega$ و یک باتری آرمانی با emf برابر با $\mathscr{E} = ۱۲٫۰V$ است. مقاومت R با $R = V/i$ داده می‌شود، که V عددی است که ولت‌سنج نشان می‌دهد و i جریان عبوری از مقاومت R است. ولی عددی که آمپرسنج نشان می‌دهد i نیست، بلکه i' است که عبارت است از i به‌علاوه‌ی جریانی که از ولت‌سنج می‌گذرد. بنابراین، نسبت دو عددی که سنجه‌ها نشان می‌دهند برابر با R نیست، بلکه فقط مقاومت *ظاهری* $R' = V'/i'$ است. اگر $R = ۸۵٫۰\Omega$ باشد، (الف) عددی که آمپرسنج نشان می‌دهد، (ب) عددی که ولت‌سنج نشان می‌دهد و (پ) R' چقدر است؟ (ت) اگر R_V افزایش یابد، آن اختلاف بین R' و R افزایش می‌یابد یا کاهش، و یا تغییر نمی‌کند؟

Scanned by CamScanner



شکل ۲۷-۶۲ مسئله‌ی ۵۶

حل (الف) در این اتصال R_V موازی R، و مقاومت معادل آنها با مقاومت‌های متوالی $R_\circ$ و R_A، متوالی است. بنابراین داریم:

$$R_{eq}=\frac{RR_V}{R+R_V}+R_A+R_\circ$$

در نتیجه جریانی که آمپرسنج نشان می‌دهد چنین می‌شود:

$$i'=\frac{\mathscr{E}}{R_{eq}}=\frac{\mathscr{E}}{R_A+R_\circ+RR_V/(R+R_V)}$$

$$=\frac{۱۲/۰\text{V}}{۳/۰۰\Omega+۱۰۰\Omega+(۸۵/۰\Omega)(۳۰۰\Omega)/(۸۵/۰\Omega+۳۰۰\Omega)}$$

$$=۷/۰۹\times۱۰^{-۲}\text{A}$$

(ب) **روش اول.** عددی که ولت‌سنج نشان می‌دهد، برابر است با

$$V=\mathscr{E}-i'(R_A+R_\circ)=۱۲/۰\text{V}-(۰/۰۷۰۹\text{A})(۳/۰۰\Omega+۱۰۰\Omega)$$
$$=۴/۷۰\text{V}$$

روش دوم. از قاعده‌ی انشعاب جریان‌ها داریم

$$i'=i_R+i_V=\frac{V}{R}+\frac{V}{R_V}=V\left(\frac{۱}{R}+\frac{۱}{R_V}\right)$$

و در نتیجه V چنین می‌شود:

$$V=\frac{RR_V}{R+R_V}i'=\frac{(۸۵/۰\Omega)(۳۰۰\Omega)}{۸۵/۰\Omega+۳۰۰\Omega}(۰/۰۷۰۹\text{A})=۴/۷۰\text{V}$$

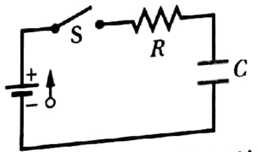
(پ) مقاومت ظاهری برابر است با

$$R'=\frac{V}{i'}=\frac{۴/۷۰\text{V}}{۷/۰۹\times۱۰^{-۲}\text{A}}=۶۶/۳\Omega$$

(ت) اگر R_V افزایش یابد، اختلاف میان R و R' کاهش می‌یابد. در واقع وقتی $R_V\to\infty$ میل کند، $R'\to R$ میل خواهد کرد.

بخش ۲۷-۵ مدارهای RC

۵۷● کلید S در شکل ۲۷-۶۳ در لحظه‌ی $t=۰$ بسته می‌شود، تا بدین ترتیب خازن بدون بار اولیه با ظرفیت $C=۱۵/۰\mu\text{F}$ از طریق مقاومتی با $R=۲۰/۰\Omega$ باردار شود. در چه زمانی پتانسیل دو سر خازن برابر با پتانسیل دو سر این مقاومت می‌شود؟



شکل ۲۷-۶۳ مسئله‌های ۵۷ و ۹۶

حل برای آنکه اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت برابر با اختلاف پتانسیل دو سر خازن باشد باید $iR=V_{خازن}$ باشد و یا

$$\mathscr{E}e^{-t/RC}=\mathscr{E}(۱-e^{-t/RC})$$

که در آن از معادله‌های ۲۷-۳۴ و ۲۷-۳۵ استفاده کرده‌ایم. از آنجا به $t=RC\ln۲$ می‌رسیم که به‌ازای $C=۱۵/۰\times۱۰^{-۶}$ F و $R=۲۰/۰\Omega$، $t=۰/۲۰۸$ms را به‌دست می‌دهد.

۵۸● در یک مدار RC متوالی، $\mathscr{E}=۱۲/۰$V، $R=۱/۴۰$MΩ، $C=۱/۸۰\mu$F است. (الف) ثابت زمانی را محاسبه کنید. (ب) بیشینه‌ای را که در حین باردار شدن روی خازن ظاهر می‌شود پیدا کنید. (پ) چقدر طول می‌کشد تا بار خازن $۱۶/۰\mu$C شود؟

حل (الف) ثابت زمانی خازن برابر است با

$$\tau=RC=(۱/۴۰\times۱۰^{۶}\Omega)(۱/۸۰\times۱۰^{-۶}\text{F})=۲/۵۲\text{s}$$

(ب) بیشینه‌ی بار به‌ازای $t\to\infty$ به‌دست می‌آید:

$$q_{max}=\mathscr{E}C=(۱۲/۰\text{V})(۱/۸۰\mu\text{F})=۲۱/۶\ \mu\text{C}$$

(پ) زمان t در $q=q_{max}(۱-e^{-t/RC})$ صدق می‌کند و از آنجا خواهیم داشت:

$$t=RC\ln\left(\frac{q_{max}}{q_{max}-q}\right)=(۲/۵۲\text{s})\ln\left(\frac{۲۱/۶\mu\text{C}}{۲۱/۶\mu\text{C}-۱۶/۰\mu\text{C}}\right)$$
$$=۳/۴۰\text{s}$$

۵۹● برحسب مضربی از ثابت زمانی τ، زمان لازم برای آنکه یک خازن بدون بار در یک مدار RC متوالی به اندازه‌ی ۹۹٪ بار نهایی آن باردار شود، چقدر است؟

حل در حین باردار شدن، بار روی صفحه‌ی مثبت خازن با $q=C\mathscr{E}(۱-e^{-t/\tau})$ داده می‌شود که C ظرفیت، $\mathscr{E}$ نیروی محرکه اعمال شده، و $\tau=RC$ ثابت زمانی خازن است. بار تعادل همان بار در $t\to\infty$ یا $q_{max}=C\mathscr{E}$ است. قرار است $q=۰/۹۹q_{eq}=۰/۹۹C\mathscr{E}$ شود بنابراین داریم:

$$۰/۹۹=۱-e^{-t/\tau}$$

و از آنجا $e^{-t/\tau}=۰/۰۱۰$ می‌شود. با گرفتن لگاریتم طبیعی از طرفین خواهیم داشت:

$$t/\tau=-\ln۰/۰۱۰=۴/۶۵\ \Rightarrow\ t=۴/۶۱\tau$$

۶۰● خازنی با بار اولیه‌ی $q_\circ$ از طریق یک مقاومت، تخلیه می‌شود. برحسب مضربی از ثابت زمانی τ، زمان لازم برای آنکه این خازن (الف) یک‌سوم بار خود و (ب) دو‌سوم بار خود را از دست دهد، چقدر است؟

حل (الف) بنا بر معادله‌ی ۲۷-۳۹، $q=q_\circ e^{-t/\tau}$ و بنابراین $t=\tau\ln(q_\circ/q)$ است که در آن τ ثابت زمانی خازن است. حال با قرار دادن $q=۲q_\circ/۳$ خواهیم داشت:

Scanned by CamScanner

$$t_{1/3} = \tau \ln[q_0/(2q_0/3)] = \tau \ln\left(\frac{۳}{۲}\right) = ۰٫۴۱\tau$$

و از آنجا $t_{1/3}/\tau = ۰٫۴۱$ می‌شود.

(ب) با قرار دادن $q = q_0/3$ خواهیم داشت:

$$t_{2/3} = \tau \ln[q_0/(q_0/3)] = \tau \ln ۳ = ۱٫۱\tau$$

و از آنجا $t_{2/3}/\tau = ۱٫۱$ می‌شود.

۶۱ ILW یک مقاومت $۱۵٫۰\text{k}\Omega$ و یک خازن به‌طور متوالی به هم بسته می‌شوند و سپس اختلاف پتانسیل $۱۲٫۰\text{V}$ به‌طور ناگهانی به دو سر آنها اعمال می‌گردد. اختلاف پتانسیل دو سر خازن در عرض $۱٫۳۰\mu s$ به $۵٫۰۰\text{V}$ افزایش می‌یابد. (الف) ثابت زمانی مدار را محاسبه کنید. (ب) ظرفیت این خازن را به‌دست آورید.

حل (الف) اختلاف پتانسیل V دو سر خازن با $V(t) = \mathscr{E}(1-e^{-t/RC})$ داده می‌شود. در $t = ۱٫۳۰\mu s$، $V(t) = ۵٫۰۰\text{V}$ است و بنابراین داریم

$$۵٫۰۰\text{V} = (۱۲٫۰\text{V})(1-e^{-۱٫۳۰\mu s/RC})$$

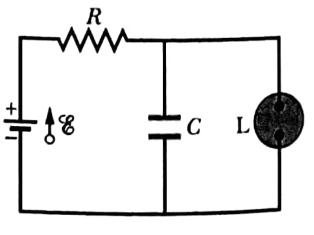
و از آنجا $\tau = RC$ به‌دست می‌آید:

$$\tau = (۱٫۳۰\mu s)\ln\left(\frac{۱۲}{۷}\right) = ۲٫۴۱\mu s$$

(ب) ظرفیت خازن برابر است با

$$C = \frac{\tau}{R} = \frac{۲٫۴۱\mu s}{۱۵٫۰\text{k}\Omega} = \frac{۲٫۴۱\times ۱۰^{-۶}\text{s}}{۱۵٫۰\times ۱۰^{۳}\Omega} = ۱۶۱\text{pF}$$

۶۲•• شکل ۲۷-۶۴ مدار یک لامپ چشمک‌زن را، مانند همان‌هایی که در محل‌های راه‌سازی روی بشکه‌هایی سوارند، نشان می‌دهد. لامپ فلوئورسان L (با ظرفیت ناچیز) به‌طور موازی به دو سر خازن C ی یک مدار RC بسته شده است. تنها در صورتی جریان از لامپ می‌گذرد که اختلاف پتانسیل دو سر آن به ولتاژ فروریزش V_L برسد؛ آنگاه خازن از طریق لامپ، کاملاً تخلیه می‌شود و لامپ، درخشش کوتاهی می‌زند. برای لامپی با ولتاژ فروریزش $V_L = ۷۲٫۰\text{V}$ که به یک باتری آرمانی $۹۵٫۰\text{V}$ و یک خازن $۰٫۱۵۰\mu\text{F}$ بسته شده است، مقاومت R مورد نیاز برای آنکه دو درخشش در هر ثانیه زده شود، چقدر است؟



شکل ۲۷-۶۴ مسئله‌ی ۶۲

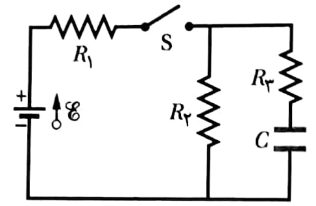
حل چون در هر ثانیه دو چشمک لازم است، بنابراین زمان هر چشمک و رسیدن ولتاژ دو سر لامپ به ولتاژ شکست، $۰٫۵۰۰\text{s}$ می‌شود. همچنین خازن از طریق مقاومت تخلیه می‌شود و زمانی را که اختلاف پتانسیل دو سر خازن به ولتاژ شکست V_L می‌رسد می‌توانیم از رابطه‌ی $V_L = \mathscr{E}(1-e^{-t/RC})$ به‌دست آوردیم. از آنجا برای R خواهیم داشت:

$$R = \frac{t}{C\ln[\mathscr{E}/(\mathscr{E}-V_L)]}$$

$$= \frac{۰٫۵۰۰\text{s}}{(۰٫۱۵۰\times ۱۰^{-۶}\text{F})\ln[۹۵٫۰\text{V}/(۹۵٫۰\text{V}-۷۲٫۰\text{V})]}$$

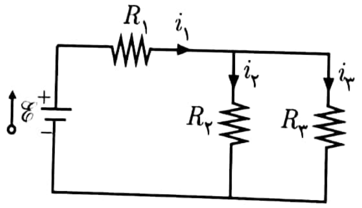
$$= ۲٫۳۵\times ۱۰^{۶}\Omega$$

۶۳•• WWW در مدار شکل ۲۷-۶۵، $\mathscr{E} = ۱٫۲\text{kV}$، $C = ۶٫۵\mu\text{F}$ و $R_1 = R_2 = R_3 = ۰٫۷۳\text{M}\Omega$ است. وقتی C کاملاً بدون بار است، کلید S ناگهان زده می‌شود (لحظه‌ی $t = ۰$). در $t = ۰$، (الف) جریان i_1 مقاومت ۱، (ب) جریان i_2 مقاومت ۲، (پ) جریان i_3 مقاومت ۳ چقدر است؟ در $t = \infty$ (یعنی، پس از گذشت چندین ثابت زمانی)، (ت) i_1، (ث) i_2 و (ج) i_3 چقدر می‌شود؟ اختلاف پتانسیل V_2 ی دو سر مقاومت ۲ در (چ) $t = ۰$ و (ح) $t = \infty$ چقدر است؟ (خ) V_2 را بر حسب زمان t ی بین این دو زمان حدّی رسم کنید.



شکل ۲۷-۶۵ مسئله‌ی ۶۳

حل در لحظه‌ی بسته شدن کلید ($t = ۰$) خازن کاملاً بدون بار است و خازن اتصال کوتاه می‌شود. بنابراین شکل مدار چنین است:



(الف) برای مدار بالا جریان عبوری از R_1 چنین می‌شود:

$$i_1 = \frac{\mathscr{E}}{R_1 + (R_2 \| R_3)} = \frac{\mathscr{E}(R_2+R_3)}{R_2R_3 + R_1R_2 + R_1R_3}$$

و چون $R_1 = R_2 = R_3 = R$ است، خواهیم داشت:

$$i_1 = \frac{۲\mathscr{E}}{۳R} = \frac{۲}{۳}\left(\frac{۱٫۲\times ۱۰^{۳}\text{V}}{۰٫۷۳\times ۱۰^{۶}\Omega}\right) = ۱٫۱\times ۱۰^{-۳}\text{A} = ۱٫۱\text{mA}$$

(ب) و (پ) جریان عبوری از R_2 و R_3 را به‌ترتیب زیر محاسبه می‌کنیم. از قاعده‌ی انشعاب جریان‌ها می‌دانیم $i_1 = i_2 + i_3$ است. از طرفی پتانسیل دو سر مقاومت‌های R_2 و R_3 مساوی است و داریم $i_2R_2 = i_3R_3$. از این دو رابطه نتیجه می‌گیریم:

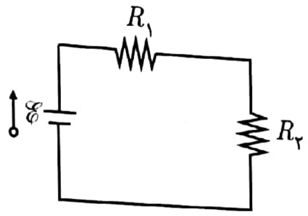
$$i_2 = \frac{R_3}{R_2+R_3}i_1 \quad , \quad i_3 = \frac{R_2}{R_2+R_3}i_1$$

Scanned by CamScanner

که چون در این مسئله، مقاومت‌ها برابر است، جریان‌ها هم با هم برابر می‌شوند و داریم

$$i_2 = i_3 = \frac{i_1}{2} = 5.5\times10^{-4}A = 0.55 mA$$

در $t=\infty$، خازن کاملاً باردار شده و اتصال باز می‌شود. بنابراین جریانی از آن عبور نخواهد کرد و شکل مدار به‌صورت زیر می‌شود:



(ت) و (ث) پس جریان عبوری از R_1 و R_2 چنین می‌شود:

$$i_1 = i_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_1+R_2} = \frac{\mathcal{E}}{2R} = \frac{1.2\times10^3 V}{2(0.73\times10^6 \Omega)} = 8.2\times10^{-4}A = 0.82 mA$$

(ج) همان‌طور که پیشتر گفتیم جریان در شاخه‌ی خازنی $i_3 = 0$ می‌شود.

(چ) تا (خ) دو حلقه‌ی جریان ساعتگرد در نظر می‌گیریم و قاعده‌ی حلقه را برای دو حلقه به‌کار می‌بندیم:

$$\mathcal{E} - i_1R - i_2R = 0 \quad , \quad i_2R - i_3R - \frac{q}{C} = 0$$

همچنین از قاعده‌ی انشعاب جریان‌ها داریم:

$$i_1 = i_2 + i_3$$

حال i_1 را از معادله‌ی سوم در معادله‌ی اول قرار می‌دهیم و از آنجا i_2 را به‌دست می‌آوریم:

$$\mathcal{E} - 2i_2R - i_3R = 0 \Rightarrow i_2 = (\mathcal{E} - i_3R)/2R$$

حال این نتیجه را در معادله‌ی دوم قرار می‌دهیم:

$$-i_3R - i_3R/2 + \mathcal{E}/2 - q/C = 0$$

از طرفی $i_3 = dq/dt$ است و در نتیجه معادله‌ی دیفرانسیلی با متغیر q به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{3R}{2}\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \frac{\mathcal{E}}{2}$$

پاسخ معادله‌ی دیفرانسیل $R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \mathcal{E}$ را می‌شناسیم:

$$q = C\mathcal{E}(1 - e^{-t/RC})$$

که در اینجا $R' = 3R/2$ و $\mathcal{E}' = \mathcal{E}/2$ است. در نتیجه، بار q چنین می‌شود

$$q = \frac{C\mathcal{E}}{2}(1 - e^{-\frac{2t}{3RC}})$$

از اینجا می‌توانیم جریان‌های عبوری از R_3 را به‌دست آوریم

$$i_3 = \frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{3R}e^{-\frac{2t}{3RC}}$$

و آنگاه با توجه به اینکه $i_2 = (\mathcal{E} - i_3R)/2R$ به‌دست آمد، خواهیم داشت:

$$i_2 = \left(\mathcal{E} - \frac{\mathcal{E}}{3}e^{-2t/3RC}\right)\Big/2R = \frac{\mathcal{E}}{6R}(3 - e^{-2t/3RC})$$

حال می‌توانیم $V_2(t)$ را به‌دست آوریم:

$$V_2(t) = i_2R = \frac{\mathcal{E}}{6}(3 - e^{-2t/3RC})$$

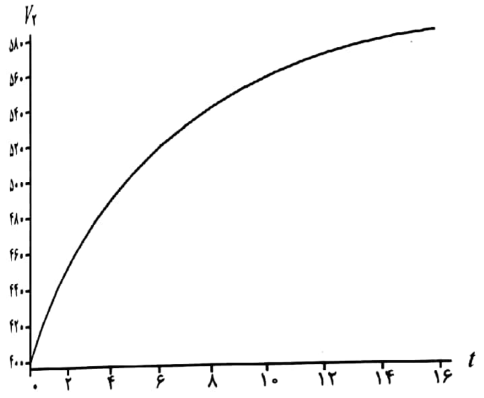
این معادله به‌ازای $t = 0$ چنین می‌شود

$$V_{2,0} = \frac{\mathcal{E}}{3} = \frac{1.2\times10^3 V}{3} = 4.0\times10^2 V$$

و به‌ازای $t = \infty$ خواهیم داشت:

$$V_{2,\infty} = \frac{\mathcal{E}}{2} = \frac{1.2\times10^3 V}{2} = 6.0\times10^2 V$$

براساس نتایج بالا، منحنی V_2 برحسب زمان چنین خواهد شد:



۶۴●● خازنی با اختلاف پتانسیل اولیه‌ی ۱۰۰V از طریق یک مقا[ومت] تخلیه می‌شود، هرگاه کلیدِ بین آنها در $t = 0$ بسته شود. در ۱۰٫۰s اختلاف پتانسیل دو سر این خازن ۱٫۰۰V است. (الف) ثابت زمانی مدار چقدر است؟ (ب) اختلاف پتانسیل دو سر خازن در ۱۷٫۰s چقدر می‌شود؟

حل (الف) اختلاف پتانسیل V بین صفحه‌های خازن با بار q روی صفحه‌ی مثبت مربوط می‌شود. $V = q/C$ به بار چون بار خازنی که تخلیه می‌شود با $q = q_0e^{-t/\tau}$ داده می‌شود، $V = V_0e^{-t/\tau}$ می‌شود که V_0 اختلاف پتانسیل اولیه است. با تقسیم بر V_0 و گرفتن لگاریتم طبیعی، آن را برای ثابت زمانی τ حل می‌کنیم:

$$\tau = -\frac{t}{\ln(V/V_0)} = -\frac{10.0 s}{\ln[(1.00V)/(100V)]} = 2.17 s$$

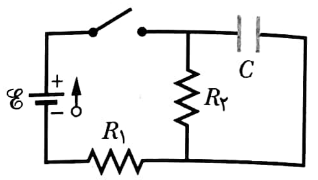
(ب) در $t = 17.0 s$، $t/\tau = (17.0 s)/(2.17 s) = 7.83$ می‌شود و خواهیم داشت:

$$V = V_0e^{-t/\tau} = (100V)e^{-7.83} = 3.96\times10^{-2} V = 39.6 mV$$

۶۵●● GO در شکل ۲۷-۶۶، $R_1 = 10.0 k\Omega$، $R_2 = 15.0 k\Omega$، $C = 0.400 \mu F$، و emf باتری آرمانی $\mathcal{E} = 20.0 V$ است. ...

Scanned by CamScanner

برای مدتی طولانی بسته می‌شود تا اینکه حالت پایا برقرار شود. سپس کلید در زمان $t=0$ باز می‌شود. جریان در مقاومت ۲ در $t=4{,}00\,ms$ چقدر است؟



شکل ۲۷-۶۶ مسئله‌ی ۶۵

حل در وضعیت حالت پایا، ولتاژ خازن با ولتاژ دو سر مقاومت $R_2=15{,}0k\Omega$ برابر است و داریم:

$$V_0=R_2\frac{\mathscr{E}}{R_1+R_2}=(15{,}0k\Omega)\left(\frac{20{,}0V}{10{,}0k\Omega+15{,}0k\Omega}\right)=12{,}0V$$

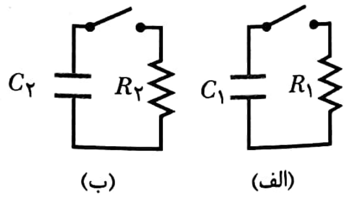
حال معادله‌ی $q=q_0e^{-t/RC}$ را در ظرفیت ضرب می‌کنیم و به $V=V_0e^{-t/RC}$ برای ولتاژ دو سر خازن (و مقاومت $R_2=15{,}0k\Omega$) پس از باز کردن کلید (در $t=0$) می‌رسیم. بنابراین به‌ازای $t=0{,}00400s$ خواهیم داشت:

$$V=(12)e^{-0{,}004/(15000)(0{,}4\times10^{-6})}=6{,}16V$$

بنابراین با استفاده از تعریف قانون، جریان عبوری از R_2 چنین می‌شود:

$$i_2=\frac{V}{R_2}=\frac{6{,}16V}{15000\Omega}=4{,}11\times10^{-4}A=411\mu A$$

۶۶●● شکل ۲۷-۶۷ دو مدار با یک خازن باردار را نشان می‌دهد که باید به هنگام بسته شدن کلید از طریق یک مقاومت تخلیه شوند. در شکل ۲۷-۶۷ الف، $R_1=20{,}0\Omega$ و $C_1=5{,}00\mu F$ است. در شکل ۲۷-۶۷ ب، $R_2=10{,}0\Omega$ و $C_2=8{,}00\mu F$ است. نسبت بارهای اولیه‌ی روی دو خازن $q_{02}/q_{01}=1{,}50$ است. در لحظه‌ی $t=0$ هر دو کلید بسته می‌شوند. در چه زمان t یی، هر دو خازن بار یکسانی دارند؟



شکل ۲۷-۶۷ مسئله‌ی ۶۶

حل $q=q_0e^{-t/RC}$ را برای هر خازن به کار می‌گیریم و آن‌گونه که در صورت مسئله آمده است، می‌طلبیم که نسبت بارها $\frac{3}{2}$ باشد. از آنجا خواهیم داشت:

$$t=\frac{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}{\left(\frac{1}{R_2C_2}-\frac{1}{R_1C_1}\right)}=162\mu s$$

که در آن از $R_1=20{,}0\Omega$، $R_2=10{,}0\Omega$، $C_1=5{,}00\mu F$ و $C_2=8{,}00\mu F$ استفاده کردیم.

۶۷●● اختلاف پتانسیل بین صفحه‌های یک خازن $2{,}0\mu F$ نشتی (به این معنی که بار از یک صفحه به صفحه‌ی دیگر نشت می‌کند) در عرض $2{,}0s$ به یک‌چهارم مقدار اولیه‌اش کاهش می‌یابد. مقاومت معادل بین صفحه‌های این خازن چقدر است؟

حل اختلاف پتانسیل دو سر خازن طبق رابطه‌ی $V(t)=V_0e^{-t/RC}$ با زمان t تغییر می‌کند. با استفاده از $V=V_0/4$ در $t=2{,}0s$، مقاومت R را به‌دست می‌آوریم:

$$R=\frac{t}{C\ln(V_0/V)}=\frac{2{,}0s}{(2{,}0\times10^{-6}F)\ln4{,}0}=7{,}2\times10^5\Omega$$

۶۸●● یک خازن $1{,}0\mu F$ با انرژی ذخیره شده‌ی اولیه‌ی $0{,}50J$ از طریق یک مقاومت $1{,}0M\Omega$ تخلیه می‌شود. (الف) بار اولیه‌ی روی این خازن چقدر است؟ (ب) وقتی تخلیه شروع شود، جریان عبوری از مقاومت چقدر است؟ عبارت‌هایی برحسب زمان t بیابید که (پ) اختلاف پتانسیل V_Cی دو سر خازن، (ت) اختلاف پتانسیل V_R دو سر مقاومت و (ث) آهنگی که با آن انرژی گرمایی در مقاومت ایجاد می‌شود را به‌دست دهند.

حل (الف) انرژی اولیه‌ی ذخیره شده در خازن با $U_c=q_0^2/2C$ داده می‌شود که C ظرفیت خازن و q_0 بار اولیه روی هر صفحه‌ی آن است. بنابراین داریم

$$q_0=\sqrt{2CU_c}=\sqrt{2(1{,}0\times10^{-6}F)(0{,}50J)}=1{,}0\times10^{-3}C=1{,}0mC$$

(ب) در لحظه‌ی شروع تخلیه، داریم

$$i_0=\frac{\mathscr{E}}{R}=\frac{q_0/C}{R}=\frac{q_0}{RC}=\frac{1{,}0\times10^{-3}C}{(1{,}0\times10^{6}\Omega)(1{,}0\times10^{-6}F)}=1{,}0\times10^{-3}A=1{,}0mA$$

(پ) $q=q_0e^{-t/\tau}$ را در $V_C=q/C$ قرار می‌دهیم و از آنجا چنین به دست می‌آوریم:

$$V_C=\frac{q_0}{C}e^{-t/\tau}=\left(\frac{1{,}0\times10^{-3}C}{1{,}0\times10^{-6}F}\right)e^{-t/1{,}0s}=(1{,}0\times10^{3}V)e^{-1{,}0t}$$

که t بر حسب ثانیه است.

(ت) اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت $V_R=iR$ است که در آن

$$i=\frac{dq}{dt}=\frac{d}{dt}(q_0e^{-t/\tau})=\frac{-q_0}{\tau}e^{-t/\tau}$$

در نتیجه V_R چنین می‌شود:

$$|V_R|=\frac{q_0R}{\tau}e^{-t/\tau}=\frac{(1{,}0\times10^{-3}C)(1{,}0\times10^{6}C)}{1{,}0s}e^{-t/1{,}0s}=(1{,}0\times10^{3}V)e^{-1{,}0t}$$

Scanned by CamScanner

که t بر حسب ثانیه است. می‌توانستیم به همین رابطه با استفاده از رابطه‌ی زیر نیز برسیم:

$$|V_R| = iR = \left|-\mathscr{E}e^{-t/\tau}\right| = \frac{q_۰}{C}e^{-t/RC}$$

که همان رابطه‌ی بالاست.

(ث) آهنگ تولید انرژی گرمایی برابر است با

$$P=\frac{V_R^۲}{R}=\frac{(۱٫۰\times ۱۰^۳\ \mathrm{V})^۲ e^{-۲/۰t}}{۱٫۰\times ۱۰^۶\ \Omega} = (۱٫۰\ \mathrm{W})e^{-۲٫۰t}$$

که t بر حسب ثانیه است.

روش دیگر. می‌توانستیم با استفاده از $P=i^۲R$ و قرار دادن i از قسمت ت نیز به همین رابطه برسیم.

۶۹●●● GO یک مقاومت $۳٫۰۰\mathrm{M\Omega}$ و یک خازن $۱٫۰۰\mu\mathrm{F}$ به‌طور متوالی به یک باتری آرمانی با emf برابر $\mathscr{E} = ۴٫۰۰\mathrm{V}$ بسته شده‌اند. $۱٫۰۰\mathrm{s}$ پس از اتصال، آهنگ (الف) افزایش بار خازن (ب) انرژی ذخیره شده در خازن، (پ) انرژی گرمایی ظاهر شده در مقاومت و (ت) انرژی تولید شده توسط باتری چقدر است؟

حل (الف) بار روی صفحه‌ی مثبت خازن با $q=C\mathscr{E}(1-e^{-t/\tau})$ داده می‌شود که $\mathscr{E}$ نیروی محرکه‌ی الکتریکی باتری، C ظرفیت، و τ ثابت زمانی خازن است. مقدار τ برابر است با

$$\tau = RC = (۳٫۰۰\times ۱۰^۶\ \Omega)(۱٫۰۰\times ۱۰^{-۶}\ \mathrm{F}) = ۳٫۰۰\mathrm{s}$$

در $t=۱٫۰۰\mathrm{s}$، $t/\tau = (۱٫۰۰\mathrm{s})/(۳٫۰۰\mathrm{s}) = ۰٫۳۳۳$ است و از آنجا آهنگی که با آن بار خازن افزایش می‌یابد، چنین می‌شود:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{C\mathscr{E}}{\tau}e^{-t/\tau} = \frac{(۱٫۰۰\times ۱۰^{-۶}\mathrm{F})(۴٫۰۰\mathrm{V})}{۳٫۰۰\mathrm{s}}e^{-۰٫۳۳۳}$$
$$= ۹٫۵۵\times ۱۰^{-۷}\ \mathrm{C/s} = ۰٫۹۵۵\mu\mathrm{C/s}$$

(ب) انرژی ذخیره شده در خازن با $U_C = q^۲/۲C$ داده می‌شود و آهنگ تغییر آن برابر است با

$$\frac{dU_C}{dt} = \frac{q}{C}\frac{dq}{dt}$$

حال با توجه به اینکه

$$q = C\mathscr{E}(1-e^{-t/\tau}) = (۱٫۰۰\times ۱۰^{-۶}\mathrm{F})(۴٫۰۰\mathrm{V})(1-e^{-۰٫۳۳۳})$$
$$= ۱٫۱۳\times ۱۰^{-۶}\mathrm{C}$$

است، خواهیم داشت:

$$\frac{dU_C}{dt} = \left(\frac{۱٫۱۳\times ۱۰^{-۶}\mathrm{C}}{۱٫۰۰\times ۱۰^{-۶}\mathrm{F}}\right)(۹٫۵۵\times ۱۰^{-۷}\mathrm{C/s})$$
$$= ۱٫۰۸\times ۱۰^{-۶}\ \mathrm{W} = ۱٫۰۸\mu\mathrm{W}$$

(پ) آهنگ اتلاف انرژی در مقاومت با $P=i^۲R$ داده می‌شود. جریان برابر با $۹٫۵۵\times ۱۰^{-۷}\mathrm{A}$ است و بنابراین داریم

$$P = (۹٫۵۵\times ۱۰^{-۷}\mathrm{A})^۲(۳٫۰۰\times ۱۰^۶\Omega)$$
$$= ۲٫۷۴\times ۱۰^{-۶}\mathrm{W} = ۲٫۷۴\mu\mathrm{W}$$

(ت) آهنگی که انرژی از باتری منتقل می‌شود برابر است با

$$i\mathscr{E} = (۹٫۵۵\times ۱۰^{-۷}\mathrm{A})(۴٫۰۰\mathrm{V}) = ۳٫۸۲\times ۱۰^{-۶}\ \mathrm{W} = ۳٫۸۲\mu\mathrm{W}$$

روش دیگر. می‌توانستیم این آهنگ را بر اساس پایستگی انرژی به‌دست آوریم. در یک مدار RC، از قاعده‌ی حلقه داریم:

$$\mathscr{E} = \frac{q}{C} + iR$$

که با ضرب طرفین در i چنین می‌شود

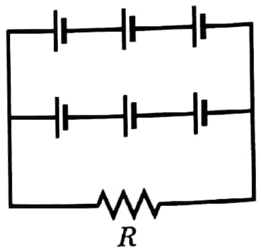
$$\mathscr{E}i = \frac{q}{C}\left(\frac{dq}{dt}\right) + i^۲R = \frac{dU_C}{dt} + i^۲R$$

جمله‌ی سمت چپ به معنی آهنگ انتقال انرژی از باتری است. اولین جمله‌ی سمت راست آهنگ انباشت انرژی در خازن و دومین جمله آهنگ تولید انرژی گرمایی در مقاومت است. بنابراین داریم:

$$\mathscr{E}i = ۱٫۰۸\times ۱۰^{-۶}\ \mathrm{W} + ۲٫۷۴\times ۱۰^{-۶}\ \mathrm{W}$$
$$= ۳٫۸۲\times ۱۰^{-۶}\ \mathrm{W}$$

مسئله‌های تکمیلی

۷۰ GO هر یک از شش باتری واقعی شکل ۲۷-۶۸ دارای emf ای برابر $۲۰\mathrm{V}$ و مقاومت $۴٫۰\Omega$ هستند. (الف) جریان عبوری از مقاومت (خارجی) $R = ۴٫۰\Omega$ چقدر است؟ (ب) اختلاف پتانسیل دو سر هر باتری چقدر است؟ (پ) توان هر باتری چقدر است؟ (ت) در هر باتری، انرژی با چه آهنگی به انرژی گرمایی داخلی تبدیل می‌شود؟



شکل ۲۷-۶۸ مسئله‌ی ۷۰

حل از روی تقارن درمی‌یابیم جریان عبوری از ردیف بالای باتری‌ها (i) همان جریان عبوری از ردیف دوم است. این بدین معنی است که جریان عبوری از مقاومت $R=۴٫۰\Omega$ در پایین $i_R=۲i$ است. بنابراین، با اختیار r به‌عنوان مقاومت داخلی هر باتری (که برابر با $r=۴٫۰\Omega$ است) و $\mathscr{E}=۲۰\mathrm{V}$ به عنوان نیروی محرکه‌ی الکتریکی هر باتری، از قاعده‌ی حلقه برای حلقه‌ی خارجی خواهیم داشت:

$$۳(\mathscr{E} - ir) - (۲i)R = ۰$$

توجه کنید که حلقه‌ی جریان را پادساعتگرد اختیار کرده‌ایم. از آنجا $i=۳٫۰\mathrm{A}$ و در نتیجه $i_R=۶٫۰\mathrm{A}$ می‌شود.

(ب) ولتاژ پایانه‌ی هر باتری $\mathscr{E} - ir = ۲۰\mathrm{V} - (۳٫۰\mathrm{A})(۴٫۰\Omega) = ۸٫۰\mathrm{V}$ است.

(پ) با استفاده از معادله‌ی ۲۷-۱۷ خواهیم داشت:

$$P = i\mathscr{E} = (۳٫۰\mathrm{A})(۲۰\mathrm{V}) = ۶۰\mathrm{W}$$

Scanned by CamScanner